STATISTIKA DAN PROBABILITAS

Leksmono Suryo Putranto

PENERBIT ANDI

STATISTIKA DAN PROBABILITAS
Oleh : Leksmono Suryo Putranto

Editor : Erang Risanto
Setter : Vanio Praba
Desain Cover : Andang Suhana
Korektor : Rani

Diterbitkan oleh Penerbit ANDI (Anggota IKAPI)
Jl. Beo 38-40, Telp. (0274) 561881 (Hunting), Fax (0274) 588282 Yogyakarta 55281

Percetakan : CV ANDI OFFSET
Jl. Beo 38-40, Telp. (0274) 561881 (Hunting), Fax (0274) 588282 Yogyakarta 55281

Putranto, Leksmono Suryo
STATISTIKA DAN PROBABILITAS/Leksmono Suryo Putranto
– Ed. I. – Yogyakarta: ANDI;

32 - 31 - 30 - 29 - 27 - 26 - 25 - 24 - 23 - 22
X + 246 hlm.; 16x23 cm.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

ISBN: 978-623-01-2970-4
978-623-01-2971-1 (PDF)

I. Judul

1. Statistical Mathematics

DDC'23 : 519.5

PRAKATA

Buku ini membahas tentang teori serta aplikasi statistika dan probabilitas, khususnya di bidang teknik dan lebih khusus lagi di bidang teknik sipil. Hal ini karena ilmu statistika dan probabilitas adalah ilmu dasar yang dapat digunakan untuk proses pengambilan keputusan di berbagai bidang. Oleh sebab itu, buku ini dapat digunakan untuk para mahasiswa maupun praktisi di berbagai bidang.

Dibandingkan buku sejenis yang sudah beredar, buku ini lebih ringkas dan berorientasi praktis. Penurunan rumus secara matematis yang terlalu berkepanjangan sengaja dihindari tanpa harus kehilangan landasan keilmuan. Selain dilengkapi dengan contoh soal yang disertai penyelesaian, buku ini juga menyediakan soal-soal untuk latihan pembaca.

Buku ini dapat digunakan untuk mahasiswa D-3, S-1, S-2, dan S-3 Jurusan Teknik Sipil atau Bidang Ilmu Teknik pada umumnya. Namun demikian, mahasiswa jurusan lain yang ingin mempelajari statistika dan probabilitas tingkat dasar dapat juga menggunakan buku ini. Selain mahasiswa, buku ini juga dapat digunakan para praktisi yang membutuhkan landasan statistika untuk pengambilan keputusan, misalnya di kalangan konsultan, kontraktor, pemasok, distributor, pengecer, dan lain sebagainya.

DAFTAR ISI

BAB 9 REGRESI LINEAR DAN KORELASI 153

BAB 1

PENDAHULUAN DAN STATISTIKA DESKRIPTIF

TUJUAN INSTRUKSIONAL:

Bab ini mempelajari pengertian statistika dan beberapa istilah dasar dalam statistika. Bab ini juga mempelajari cara merangkum data, baik dengan menyusun tabel distribusi frekuensi, menggambar histogram/poligon, maupun menghitung *central tendency* dan dispersi.

1.1 PENGERTIAN STATISTIKA

Secara makna istilah, terdapat perbedaan antara statistik *(statistic)* dengan statistika *(statistics)*. **Statistik** adalah sekumpulan angka, misalnya statistik hasil pertandingan sepak bola liga Indonesia. Sementara itu, **statistika** adalah penggunaan data numerik untuk membantu membuat keputusan dalam ketidakpastian.

1.1.1 Statistika Deskriptif dan Statistika Inferensial

Statistika deskriptif adalah perhitungan rangkuman dan tampilan grafis. Statistika deskriptif menyusun dan memanipulasi data mentah (titik-titik data yang belum disusun dalam bentuk yang bermakna jelas) agar maknanya dapat diterjemahkan dengan mudah, misalnya dalam bentuk tabel dan grafik distribusi frekuensi, atau kecenderungan pemusatan dan variabilitas.

Sementara itu, **statistika inferensial** adalah pembuatan kesimpulan umum mengenai keseluruhan (populasi) dengan melakukan pengamatan atas suatu bagian (sampel). Tidak ada sampel yang dijamin sangat sesuai menggambarkan populasi sasaran, tetapi galat pengambilan sampel *(sampling error)* harus dijaga agar dalam batas wajar.

1.1.2 Statistika Deduktif dan Statistika Induktif

Statistik deduktif sama dengan statistik deskriptif. Dalam statistika deduktif, sifat-sifat kasus khusus dapat diduga dari keadaan yang umum. Misalnya, kita menetapkan 0,1 sebagai probabilitas bahwa komputer merek A terpilih secara acak, jika kita tahu bahwa 10% komputer yang dibeli sebuah perusahaan bermerek A. Sementara itu, **Statistika induktif** adalah kebalikan dari statistika deduktif. Statistika induktif sama dengan statistika inferensial.

1.2 POPULASI VERSUS SAMPEL

Populasi statistika adalah kumpulan seluruh pengamatan yang mungkin dari karakteristik tertentu yang diteliti. **Sampel** adalah kumpulan pengamatan yang berasal dari bagian tertentu dari populasi tertentu. **Galat** *(error)* adalah kesalahan yang salah satu sumbernya karena tindakan pengambilan sampel. Galat antara lain dipengaruhi oleh jumlah sampel. Sampel diambil karena keterbatasan biaya, waktu, dan tenaga.

1.2.1 Unsur Dasar *(Elementary Unit)*

Unsur dasar adalah pengelompokan tunggal dari unsur-unsur dasar yang dapat menimbulkan beberapa buah populasi. Misalnya mahasiswa yang terdaftar di sebuah universitas dapat menjadi unsur-unsur dasar populasi indeks prestasi, populasi penghasilan, populasi jenis kelamin, populasi jurusan, populasi tinggi badan, populasi usia, dan lain sebagainya. Hal ini harus dibedakan dengan pengertian **populasi** yang berarti kelompok demografis sejumlah makhluk hidup.

1.2.2 Jenis Populasi

Populasi dikelompokkan atas beberapa jenis.

a. Populasi berdasarkan jenis data. Berdasarkan jenis data, populasi dikelompokkan menjadi kuantitatif dan kualitatif. Populasi kuantitatif, yaitu data bersifat numerik. Sementara itu, populasi kualitatif datanya bersifat atribut (misalnya jenis kelamin, pekerjaan, dan lain sebagainya).

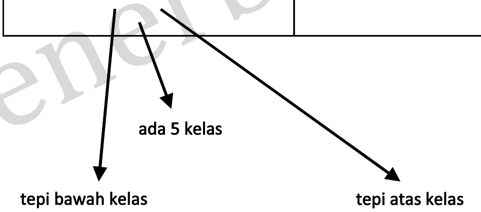
b. Populasi berdasarkan posisi waktu. Berdasarkan posisi waktu, populasi mencakup objek yang telah ada, masa mendatang. dan imajiner.

1.3 DISTRIBUSI FREKUENSI

Distribusi frekuensi adalah cara penyajian data ke dalam kelas-kelas. Banyaknya data di dalam tiap kelas dihitung sehingga diperoleh frekuensi kelas.

Contoh 1.1

Berat (kg)	Frekuensi
7-9	4
10-12	16
13-15	28
16-18	38
19-21	14



a. Tabel di atas adalah distribusi frekuensi berat 100 koper yang ditimbang secara acak di bandara. Pencatatan dibulatkan ke kilogram (kg) terdekat. Misalnya kelas 19-21 meliputi semua koper dengan berat > 18,5 kg (batas bawah kelas), tetapi < 21,5 kg (batas atas kelas).

b. Batas kelas dibuat 1 desimal lebih banyak dari data asli.

c. Lebar kelas=batas atas kelas-batas bawah kelas.

d. Titik tengah kelas 19-21 misalnya adalah 20.

1.3.1 Panduan Membuat Tabel Distribusi Frekuensi

Agar tabel distribusi frekuensi dapat menggambarkan karakteristik data mentah secara optimal, perlu dilaksanakan tata cara sebagai berikut.

a. Hitung jangkauan (*range*), r = nilai maksimal-nilai minimal.

b. Perkirakan banyak kelas, $k = 1 + 3{,}3\log(n)$ bila n adalah banyaknya data.

c. Tentukan lebar kelas, $c = \frac{r}{k}$. Umumnya lebar kelas dibuat seragam agar mudah diinterpretasikan (perhatikan dampak nilai k dan c di Gambar 1.3.).

d. Tentukan tepi bawah kelas pertama, a_1 = nilai min-$\frac{(kc-r)}{2}$. Lalu $a_2 = a_1 + c$ dan seterusnya.

e. Tentukan batas atas kelas pertama,

$$b_1 = a_2 - \frac{(satu\ unit\ pengukuran\ terkecil)}{2}$$

Contoh 1.2

Buatlah tabel distribusi frekuensi dan tabel distribusi frekuensi kumulatif, disertai histogram/poligon frekuensi dari data tinggi muka air sebuah sungai pada 100 kali pengamatan (cm) sebagai berikut.

Tabel 1.2 Tinggi muka air sungai pada 100 kali pengamatan

156	170	165	170	158	164	160	162	167	171
168	161	169	153	165	169	164	158	164	157
161	166	173	163	173	162	166	161	163	169
157	152	159	168	156	163	155	164	156	165
164	163	164	162	164	157	161	167	164	167
166	160	169	172	167	167	164	163	168	156
162	167	163	161	163	162	167	156	174	170
160	162	156	164	154	158	162	162	163	164
165	171	162	158	162	165	174	164	169	153
167	157	168	161	169	163	159	168	159	168

Jawab

a) $$\begin{aligned} r &= 174 - 152 \\ &= 22 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} k &= 1 + 3{,}3 \log(100) \\ &= 7{,}6 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} c &= \frac{r}{k} \\ &= \frac{22}{7{,}6} \\ &= 2{,}89 \approx 3 \end{aligned}$$

d) Bila $k = 7$, maka

$$\begin{aligned} a_1 &= 152 - \frac{((7 \times 3) - 22)}{2} \\ &= 152{,}5 > 152 \end{aligned}$$

e) Bila $k = 8$, maka

$$\begin{aligned} a_1 &= 152 - \frac{((8 \times 3) - 22)}{2} \\ &= 151 \end{aligned}$$

f) Tepi bawah kelas berikutnya: 154, 157, 160, 163, 166, 169, 172.

g) Selanjutnya, dapat ditentukan batas-batas bawah & atas kelas dan tepi atas kelas dengan memperhatikan $c = 3$.

1.3.2 Tabel Distribusi Frekuensi

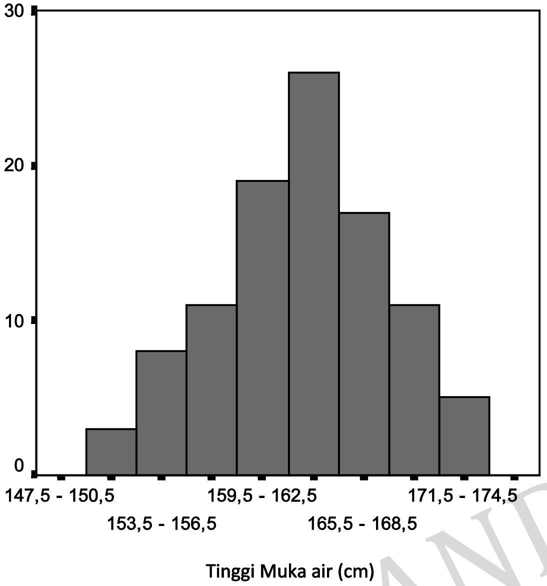
Tabel 1.3 Distribusi frekuensi tinggi muka air sungai dari 100 kali pengamatan

Tepi Kelas	Batas Kelas	Titik Tengah (X)	Frekuensi (f)	Frekuensi Relatif
151-153	150,5-153,5	152	3	0,03
154-156	153,5-156,5	155	7	0,07
157-159	156,5-159,5	158	12	0,12
160-162	159,5-161,5	161	18	0,18
163-165	162,5-164,5	164	27	0,27
166-168	165,5-168,5	167	17	0,17
169-171	168,5-171,5	170	11	0,11
172-174	171,5-174,5	173	5	0,05
		Total	**100**	**1,00(100%)**

1.3.3 Tabel Distribusi Frekuensi Kumulatif

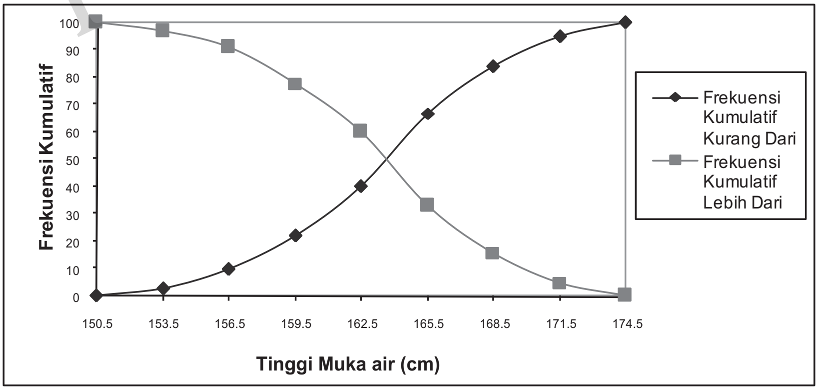
Tabel 1.4 Distribusi frekuensi kumulatif tinggi muka air sungai dari 100 kali pengamatan

Tepi Kelas	Batas Kelas	Frekuensi Kumulatif < Batas Atas Kelas	Frekuensi Kumulatif > Batas Bawah Kelas
151-153	150,5-153,5	3	100
154-156	153,5-156,5	10	97
157-159	156,5-159,5	22	90
160-162	159,5-161,5	40	78
163-165	162,5-164,5	67	60
166-168	165,5-168,5	84	33
169-171	168,5-171,5	95	16
172-174	171,5-174,5	100	5

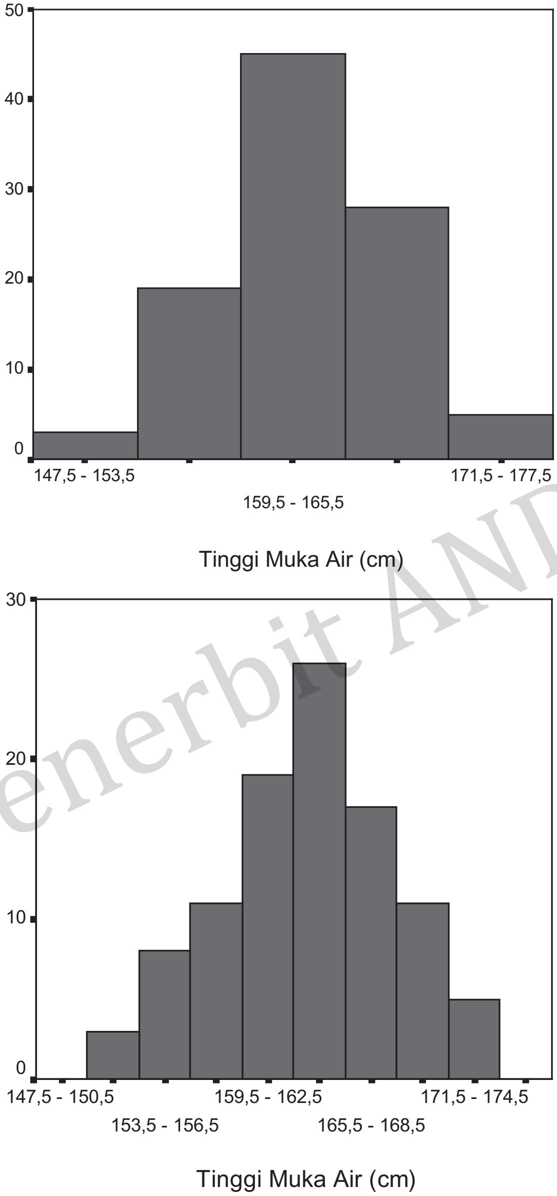


Gambar 1.1 Histogram Tinggi Muka Air

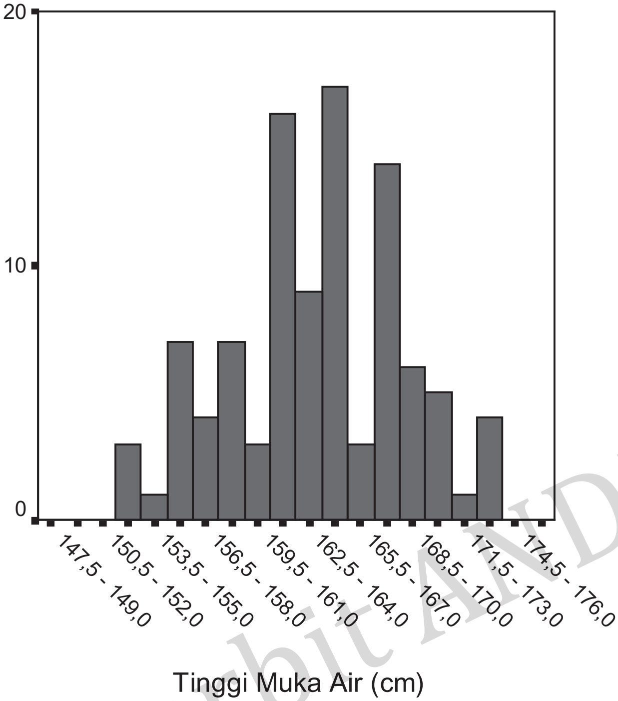
1.3.4 Histogram & Poligon Frekuensi



Gambar 1.2 Poligon Frekuensi Kumulatif Tinggi Muka Air



Gambar 1.3a Dampak dari Pilihan k dan c



Gambar 1.3b Dampak dari Pilihan k dan c

1.3.5 Central Tendency

Central tendency adalah ukuran pemusatan yang meliputi rataan hitung/ukur/harmonis (*arithmetic/geometric/harmonic mean*), median dan modus (*mode*). *Central tendency* bertujuan untuk mendapat gambaran mengenai karakteristik data (selain menggunakan analisis distribusi frekuensi).

1.4 RATAAN HITUNG (*ARITHMETIC MEAN*)

Rataan hitung adalah jumlah seluruh sampel atau seluruh populasi dibagi jumlah data.

a. Untuk sampel: $$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \qquad (1.1)$$

b. Untuk populasi: $$\mu = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i}{N} \qquad (1.2)$$

c. Untuk data dikelompokkan bila k adalah banyaknya kelas:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i X_i}{n} \qquad (1.3)$$

Contoh 1.3

a. Gunakan data 100 tinggi muka air.

b. Bila belum dikelompokkan maka mean adalah 163,40.

c. Bila telah dikelompokkan (misalnya dalam pembagian kelas yang telah dilakukan pada contoh sebelumnya) maka mean adalah 163,37.

d. Nilai mean yang hampir sama menunjukkan pengelompokan yang baik.

1.4.1 Mean untuk Data Berkelompok

Tabel 1.5 Distribusi frekuensi dan nilai rataan hitung dari 100 kali pengamatan muka sungai

Tepi Kelas	**Batas Kelas**	**Titik Tengah (X_i)**	**Frekuensi (f_i)**	**$X_i f_i$**
151-153	150,5-153,5	152	3	456
154-156	153,5-156,5	155	7	1085
157-159	156,5-159,5	158	12	1896
160-162	159,5-161,5	161	18	1288
163-165	162,5-164,5	164	27	4428
166-168	165,5-168,5	167	17	2839
169-171	168,5-171,5	170	11	1870
172-174	171,5-174,5	173	5	865
		Total	**100**	**16337**

1.4.2 Metode Transformasi

Bila dalam situasi alat bantu hitung (seperti kalkulator dan komputer) tidak bisa atau tidak boleh digunakan, penting sekali untuk menyederhanakan kalkulasi dengan cara tertentu. Metode transformasi memungkinkan penyederhanaan seperti itu.

Metode transformasi adalah upaya menyederhanakan perhitungan yang rumit sebagai akibat operasi matematika pada bilangan yang bernilai besar. Hal ini dilakukan dengan cara mentransformasi bilangan tersebut dengan bilangan yang jauh lebih kecil tanpa mengubah hasil akhir. Dalam hal ini, karena lebar kelas konstan maka titik-titik tengah kelas-kelas tersebut dapat ditransformasi menjadi bilangan-bilangan bulat yang berturutan.

Tabel 1.6 Proses transformasi data pada data pengamatan muka air sungai

Tepi Kelas	**Titik Tengah (X_i)**	**Frekuensi (f_i)**	**U_i**	**$U_i f_i$**
151-153	152	3	-4	-12
154-156	155	7	-3	-21
157-159	158	12	-2	-24
160-162	161	18	-1	-18
163-165	164	27	0	0
166-168	167	17	1	17
169-171	170	11	2	22
172-174	173	5	3	15
	Total	**100**		**-21**

1.4.3 Menghitung Mean dengan Metode Transformasi

$$\bar{X} = \bar{X}_{sementara} + c\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i U_i}{n} \qquad (1.4)$$

Sehingga mean untuk contoh sebelumnya adalah:

$$\bar{X} = 164 + 3\frac{-21}{100} = 163,37$$

1.5 MEDIAN

Median adalah nilai tengah dari data yang telah diurutkan dari kecil ke besar atau sebaliknya. Untuk data ganjil, median adalah **nilai tengah**. Untuk data genap median adalah **rataan dua nilai tengah**.

Contoh 1.4

a. Median dari 3,4,4,5,6,8,8,9,10 adalah data ke 5 dari 9 data, yaitu 6.

b. Median dari data 3,4,4,5,6,8,8,9,10 adalah rataan dari data ke-5 dan ke-6, yaitu $\frac{(6+8)}{2}=7$

1.5.1 Median untuk Data Berkelompok

Penentuan median untuk data berkelompok dilakukan dengan menggunakan rumus 1.5. Bila L_o batas bawah kelas median; c lebar kelas; $(\sum f_i)^0$ frekuensi kelas-kelas di bawah kelas median; f_m frekuensi kelas median; n banyaknya data; median dapat dihitung sebagai berikut.

$$Med = L_0 + c\frac{\frac{n}{2}-(\sum f_i)^0}{f_m} \qquad (1.5)$$

Sehingga median untuk contoh sebelumnya.

$$Med = 162{,}5 + 3\frac{\frac{100}{2}-40}{27} = 163{,}61$$

1.6 MODUS

Modus adalah data yang paling banyak muncul atau data yang frekuensinya terbesar. Data dapat memiliki 1 modus, lebih dari 1 modus atau tanpa modus. Contohnya sebagai berikut.

a. Modus dari 3,4,4,5,6,8,8,8,9,10 adalah 8.

b. Modus dari 3,4,4,5,6,8,8,9,10 adalah 4 dan 8.

c. Modus dari 3,4,5,6,7,8, 9,10 tidak ada.

d. Modus dari 8,8,8,8,8,8 tidak ada.

1.6.1 Modus untuk Data Berkelompok

Penentuan modus untuk data berkelompok dilakukan dengan menggunakan rumus 1.6.

Bila diketahui data berikut.

L_o batas bawah kelas modus

c lebar kelas

f_{mod} frekuensi kelas modus

$f_{i-1}f_{mod}$- frekuensi kelas sebelum f_{mod}

$f_{i+1}f_{mod}$- frekuensi kelas sesudah f_{mod}

Mediannya adalah sebagai berikut.

$$Mod = L_0 + c\frac{f_{-1}}{f_{-1} + f_{+1}} \qquad (1.6)$$

Sehingga median untuk contoh sebelumnya adalah sebagai berikut.

$$Mod = 162,5 + 3\frac{9}{9+10} = 164,04$$

1.7 *SKEWNESS* VS. POSISI NILAI SENTRAL

Skewness atau kemencengan adalah ukuran kesimetrisan distribusi frekuensi sebuah kumpulan data. Kemencengan dapat dihitung dengan rumus-rumus berikut, terutama bila distribusi frekuensinya cenderung simetris.

$$\alpha = \frac{\overline{X} - Mod}{S} \tag{1.7}$$

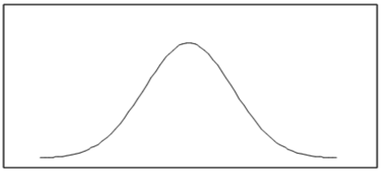
atau

$$\alpha = \frac{3(\overline{X} - Med)}{S} \tag{1.8}$$

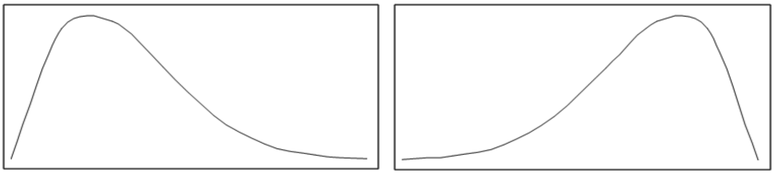
Sementaara secara umum, kemencengan dapat dihitung dengan rumus berikut.

$$\alpha_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X} \right)^3}{nS^3} \tag{1.9}$$

Gambar 1.4 menyajikan hubungan antara kemencengan dengan nilai mean, median, dan modus. Dalam distribusi frekuensi yang simetris sempurna, nilai kemencengannya sama dengan nol, sedangkan nilai mean, median, dan modusnya sama. Hal sebaliknya terjadi bila distribusi frekuensi tidak simetris. Nilai kemencengan negatif terjadi bila mean lebih besar dari median dan median lebih besar dari modus. Nilai kemencengan positif bila mean lebih kecil dari median dan median lebih kecil dari modus.



Simetris: Mean=Median=Modus



Positively Skewed:
Mean>Median>Modus

Negatively Skewed:
Mean<Median<Modus

Gambar 1.4 Skewness versus Posisi Nilai Sentral

1.8 MEAN VS. MEDIAN VS. MODUS

Mean adalah rataan data. Mean baik dipakai untuk data yang tidak terlalu bervariasi. **Median** adalah nilai tengah data setelah diurutkan. Median baik dipakai untuk data yang sangat bervariasi atau ada nilai ekstrem. **Modus** adalah nilai yang paling sering muncul. Modus baik untuk data yang terkonsentrasi.

Tingkat variasi tersebut dapat ditunjukkan oleh nilai simpangan baku. Bila kurva distribusi frekuensi tidak terlalu menceng, berlaku hubungan sebagai berikut.

$$\text{Modus} = 3\text{Median} - 2\text{Mean} \qquad (1.10)$$

Dalam contoh tinggi muka air, Modus = (3)(163,61) – (2)(163,37) = 164,09, yang tidak jauh berbeda dengan hasil perhitungan sebelumnya (164,04). Hal ini menunjukkan kurva relatif simetris.

1.8.1 Kurtosis

Kurtosis adalah ukuran keruncingan distribusi frekuensi. Nilai nol menunjukkan distribusi frekuensi memiliki keruncingan normal. Nilai negatif menunjukkan distribusi frekuensi yang landai. Nilai positif menunjukkan distribusi frekuensi runcing. Rumus untuk menghitung kurtosis adalah sebagai berikut.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^4}{nS^4} \qquad (1.11)$$

1.8.2 Measure of Dispersion

Dispersi adalah tingkat penyebaran suatu data. Jenis dispersi meliputi *range* (jangkauan), *mean deviation*, *variance* (variansi), *standard deviation* (simpangan baku), *coefficient of variation* (koefisien variasi). Empat jenis pertama merupakan ukuran dispersi mutlak, sedang jenis terakhir merupakan ukuran dispersi relatif.

1.8.3 Range

Range adalah selisih nilai terbesar dan terkecil dari data. Pada contoh tinggi muka air, nilai *range* $r = 174 - 152 = 22$. r terlalu kasar dan sangat dipengaruhi nilai ekstrem, sehingga jarang dipakai untuk ukuran dispersi.

1.8.4 Mean Deviation

Mean deviation adalah jumlah mutlak dari selisih setiap nilai dengan mean.

a. Untuk data tidak berkelompok:

$$MD = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| X_i - \overline{X} \right|}{n} \qquad (1.12)$$

b. Untuk data berkelompok:

$$MD = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left| X_i - \overline{X} \right|}{n} \qquad (1.13)$$

c. Mean dapat diganti dengan median atau modus.

1.8.5 *Variance* (Variansi) Sampel

Variance *(variansi)* **sampel** adalah rataan dari selisih kuadrat tiap data dengan meannya.

a. Untuk data tidak berkelompok, variansi sampel adalah sebagai berikut.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X} \right)^2}{n-1} = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2}{n(n-1)} \qquad (1.14)$$

b. Untuk data berkelompok, variansi sampel adalah sebagai berikut.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left(X_i - \overline{X} \right)^2}{n-1} = \frac{n \sum_{i=1}^{n} f_i X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i X_i \right)^2}{n(n-1)} \qquad (1.15)$$

1.8.6 Standard Deviation (Simpangan Baku)

Simpangan Baku adalah akar kuadrat dari variansi. Walaupun variansi adalah ukuran dispersi yang baik (karena mencerminkan selisih nilai dengan mean), tetapi berbentuk kuadrat, padahal dispersi lebih mudah diinterpretasikan secara linier. Oleh sebab itu, akar dari variansi berupa simpangan baku juga digunakan.

1.8.7 Koefisien Variansi

Koefisien Variansi adalah perbandingan antara simpangan standar dengan nilai mean. Simpangan baku dan variansi adalah ukuran variasi dari suatu set data atau biasa disebut variasi absolut. Untuk membandingkan variasi atau dispersi dari beberapa set data, dipakai dispersi atau variasi relatif, yaitu koefisien variasi (KV):

$$KV = \frac{Simpangan\ Baku}{Mean} \tag{1.16}$$

1.9. SOAL-SOAL

Soal 1.1

Sepuluh benda uji kubus beton yang dibuat dalam praktikum Teknologi Bahan Konstruksi di Untar dirancang untuk mencapai kuat tekan 250 kg/cm^2. Kuat tekan yang dihasilkan kesepuluh benda uji tersebut (dalam kg/cm^2) masing-masing adalah 240, 260, 250, 245, 255, 250, 247, 253, 250, dan 249.

a. Hitung *mean*, median dan modus kuat tekan.

b. Hitung *range* dan simpangan baku kuat tekan.

c. Hitung kuartil 1 dan 3 kuat tekan.

d. Berdasarkan jawaban 1b. dan 1c., bagaimana tingkat variabilitas kuat tekan?

e. Hitung Pearson *skewness* dan kurtosis dan jelaskan makna dari hasilnya.

BAB 2

PELUANG

TUJUAN INSTRUKSIONAL:

Bab ini mempelajari dasar-dasar teori peluang (probabilitas) dan istilah-istilah yang digunakan. Untuk menghitung anggota ruang sampel dan anggota kejadian akan dipelajari beberapa teknik perhitungan seperti permutasi dan kombinasi. Beberapa teorema terkait peluang seperti peluang bersyarat dan teorema Bayes juga dipelajari.

2.1 RUANG SAMPEL

Ruang sampel adalah kumpulan seluruh titik sampel. Tiap hasil dalam ruang sampel (S) disebut titik sampel. Bila jumlah titik sampel berhingga, S dapat dinyatakan dalam bentuk daftar. Sebagai contoh, bila S kumpulan hasil pelemparan mata uang maka S = {Angka, Gambar}. Sedangkan untuk S yang besar atau tak hingga titik sampelnya, ditulis dengan aturan. Contoh $S = \{x|x$ suatu bangunan yang tingginya lebih dari 50 meter$\}$.

Contoh 2.1

Perhatikan suatu percobaan melantunkan sebuah dadu. Bila yang diselidiki adalah nomor yang muncul di muka sebelah atas maka ruang sampelnya: $S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Bila yang ingin diselidiki pada percobaan di atas adalah apakah nomor genap atau ganjil yang muncul, ruang sampelnya adalah sebagai berikut.

$S_2 = \{\text{ganjil, genap})$

Umumnya lebih baik kita gunakan S yang memberikan informasi terbanyak mengenai hasil percobaan.

2.1.1 Kejadian

Kejadian adalah himpunan bagian dari S.

Contoh 2.2

Misalkan $A = \{v \mid v < 40\}$ himpunan bagian $S = \{v \mid v \geq 0\}$; v menyatakan kecepatan sepeda motor di suatu ruas jalan dalam km/jam; dan A kejadian bahwa kecepatan sepeda motor di ruas jalan tersebut kurang dari 40 km/jam.

Kejadian yang hanya mengandung 1 unsur S disebut **kejadian sederhana**. Sementara kejadian yang dapat dinyatakan sebagai gabungan beberapa kejadian sederhana disebut **kejadian majemuk**.

Contoh 2.3

Kejadian menarik sebuah kartu *heart* dari sekotak kartu bridge merupakan kejadian sederhana dari S = {*heart, spade, club,* *diamond*), sedangkan kejadian menarik sebuah kartu hitam merupakan kejadian majemuk dari *S* (gabungan *spade* dan *club*).

Himpunan bagian S yang tidak mengandung titik sampel disebut **ruang hampa** atau **himpunan kosong**. Himpunan kosong dinyatakan dengan lambang Ø.

2.1.2 Diagram Venn

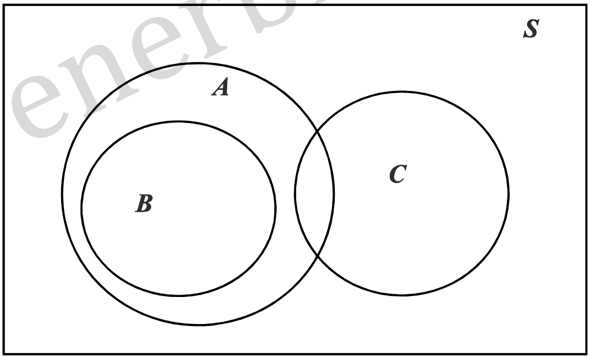
Diagram venn adalah diagram untuk menyatakan hubungan beberapa kejadian dalam ruang sampel.

Contoh 2.4

A: Kartu yang ditarik berwarna hitam.

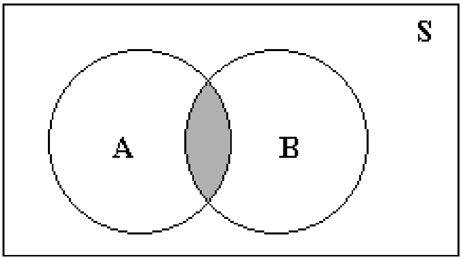
B: Kartu yang ditarik jack, queen, atau king spade.

C: Kartu yang ditarik as.



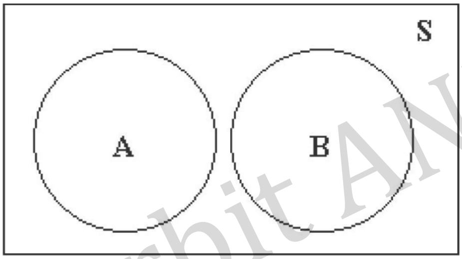
2.1.2.1 Irisan

Irisan adalah dua kejadian *A* dan *B* yang dinyatakan dengan lambang $A \cap B$. Irisan dua kejadian *A* dan *B* ialah kejadian yang unsurnya termasuk dalam *A* dan *B*. Misalnya bila $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{1,4,5,8\}$ maka $A \cap B = \{1,4,5\}$.



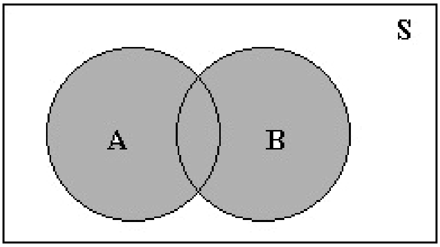
2.1.2.2 Kejadian Terpisah

Dua kejadian *A* dan *B* terpisah bila $A \cap B = \emptyset$. Misalnya bila *A* bilangan ganjil dan *B* bilangan genap.



2.1.2.3 Gabungan

Gabungan dua kejadian *A* dan *B* dinyatakan dengan lambang $A \cup B$. Gabungan dua kejadian A dan *B* adalah kejadian yang mengandung semua unsur yang termasuk *A* atau *B* atau keduanya. Misalnya $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{1,4,5,8\}$, maka $A \cup B = \{1,2,3,4,5,8\}$.



2.1.3 Komplemen (*A'*)

Komplemen adalah kejadian *A* terhadap *S* ialah himpunan semua unsur *S* yang tidak termasuk *A*. Biasanya dilambangkan dengan:

$$A' = \{x \mid x \in S \,\&\, x \notin A\}$$

Misalnya, *S* adalah manusia dan *A* adalah wanita maka *A*‘ adalah laki-laki. Ada beberapa sifat himpunan yang perlu diketahui, yaitu:

a. $A \cap \varnothing = \varnothing$

b. $A \cup \varnothing = A$

c. $A \cap A' = \varnothing$

d. $A \cup A' = S$

e. $S' = \varnothing$

f. $\varnothing' = S$

g. $(A')' = A$

2.2 MENGHITUNG TITIK SAMPEL

Titik sampel adalah anggota ruang sampel. Bila suatu operasi dapat dilakukan dengan n_1 cara; dan bila untuk tiap cara itu operasi kedua dapat dikerjakan dengan n_2 cara; dan bila untuk kedua operasi tersebut operasi ketiga dapat dikerjakan dengan n_2 cara (dan seterusnya). Deretan *k* operasi dapat dikerjakan dengan $n_1 n_2 \ldots.. n_k$ cara.

Contoh 2.5

Berapa banyak bilangan genap yang terdiri atas 3 angka dapat dibuat dari angka 2, 3, 5, 6 dan 7 bila tiap angka itu hanya boleh digunakan sekali?

Karena bilangan yang hendak dibentuk ialah bilangan genap, terdapat 2 pilihan untuk tempat satuan (digit terakhir). Untuk tempat puluhan terdapat 4 pilihan dan kemudian 3 pilihan untuk tempat ratusan. Jadi, semuanya ada sebanyak 2 × 4 × 3 = 24 bilangan

2.2.1 Permutasi

Permutasi adalah susunan yang dapat dibentuk dari kumpulan benda yang diambil sebagian atau seluruhnya. Banyaknya permutasi *n* benda yang berlainan adalah *n*! Banyak permutasi *n* benda berlainan bila diambil *r* sekaligus adalah sebagai berikut.

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{2.1}$$

Contoh 2.6

Dari 10 kupon undian, dua diambil untuk hadiah pertama dan kedua. Hitunglah banyak titik sampel dalam *S*.

$$ {}_{10}P_2 = \frac{10!}{(10-2)!}$$

$$= \frac{10!}{8!}$$

$$= (10)(9)$$

$$= 90$$

2.2.2 Permutasi Melingkar

Banyaknya permutasi n benda berlainan yang disusun melingkar adalah $(n\text{-}1)!$ Misalnya banyaknya cara menyusun tempat duduk 4 orang pemain kartu yang duduk mengitari meja bundar adalah $(4–1)! = 3! = 6$ cara.

2.2.3 Permutasi Kelompok Benda

Banyaknya permutasi yang berlainan dari n benda bila n_1 diantaranya berjenis pertama, n_2 berjenis kedua, …, n_k berjenis ke k.

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \qquad (2.2)$$

Contoh 2.7

Sebuah etalase dihias dengan 8 bola lampu yang dirangkai seri. Ada berapa cara menyusun 8 bola lampu itu bila tiga diantaranya berwarna hijau, tiga kuning, dan dua biru?

$$\frac{8!}{3!3!2!} = 560\,\text{cara}$$

2.2.4 Menyekat

Banyaknya cara menyekat n benda dalam r sel, masing-masing berisi n_1 elemen dalam sel pertama, n_2 dalam sel ke dua, dst. adalah sebagai berikut.

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \qquad (2.3)$$

dengan $n_1+n_2+\ldots+n_r = n$

Contoh 2.8

Berapa banyak cara untuk menampung 8 dosen dalam 3 kamar hotel, bila 2 kamar bertempat tidur 3 sedang lainnya bertempat tidur 2?

$$\frac{8!}{3!3!2!} = 560 \text{ cara}$$

2.2.5 Kombinasi

Kombinasi adalah permutasi yang tidak membedakan urutan benda. Jumlah kombinasi dari *n* benda yang berlainan bila diambil sebanyak *r* adalah sebagai berikut.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{2.4}$$

Contoh 2.9

Bila ada 3 arsitek dan 2 perancang grafis, carilah banyaknya kelompok 3 orang yang dapat dibuat yang beranggotakan 2 arsitek dan 1 perancang grafis.

Banyaknya cara memilih 2 arsitek dari 3 adalah sebagai berikut.

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!}$$

$$= 3$$

Banyaknya cara memilih 1 perancang grafis dari 2 adalah sebagai berikut.

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!}$$

$$= 2$$

Banyaknya kelompok yang dapat dibentuk yang 2 arsitek dan 1 perancang grafis $=3\times2=6$

2.3 TEORI PELUANG

Teori peluang adalah beberapa teori terkait peluang. Peluang kejadian *A* adalah jumlah bobot semua titik sampel yang termasuk A. Beberapa ketentuan berikut ini berlaku sebagai berikut.

a. $0 \le P(A) \le 1$

b. $P(\emptyset) = 0$

c. $P(S) = 1$

Bila suatu percobaan dapat menghasilkan *N* macam hasil yang memiliki kemungkinan sama dan bila tepat sebanyak n dari hasil berkaitan dengan kejadian *A* maka peluang kejadian *A* adalah sebagai berikut.

$$P(A)=\frac{n}{N} \qquad (2.5)$$

Contoh 2.10

Bila 1 kartu ditarik dari 1 kotak kartu *bridge* isi 52, hitunglah peluangnya bahwa kartu itu berwarna merah!

Jawab

Jumlah hasil yang mungkin 52, 26 di antaranya berwarna merah. Jadi peluang kejadian *A* menarik satu kartu hati adalah:

$$P(A)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$$

a. Bila A dan B dua kejadian sembarang maka

$$P(A\text{U}B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

b. Bila A dan B dua kejadian terpisah maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

c. Bila A dan A' kejadian yang saling berkomplemen maka $P(A') = 1 - P(A)$

d. Peluang bersyarat B dengan diketahui A, dinyatakan dengan $P(B|A)$ ditentukan oleh $P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A)$ bila $P(A) > 0$

Contoh 2.11

Misalkan ruang sampel S menyatakan orang dewasa yang telah tamat perguruan tinggi di suatu kota. Mereka dikelompokkan menurut jenis kelamin dan status pekerjaan (lihat tabel). Kita ingin meneliti kejadian B (lelaki yang terpilih) dengan syarat A (orang yang terpilih dalam status bekerja).

	Bekerja	**Tak Bekerja**	**Total**
Lelaki	500	50	550
Wanita	150	250	400
Total	650	300	950

Dengan menggunakan ruang sampel yang diperkecil (A) diperoleh hasil berikut.

$$P(B|A) = \frac{500}{650}$$

$$= \frac{10}{13}$$

Bila digunakan ruang sampel semula (*S*) maka:

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

$$= \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad (2.6)$$

Untuk memeriksa hasil ini perhatikan bahwa:

$$P(A) = \frac{650}{950}$$

$$= \frac{13}{19}$$

$$P(A \cap B) = \frac{500}{950}$$

$$= \frac{10}{19}$$

$$P(B|A) = \frac{\frac{10}{19}}{\frac{13}{19}}$$

$$= \frac{10}{13} \rightarrow \text{sama seperti sebelumnya}$$

P(A∩B)

Bila kejadian *A* dan *B* dapat terjadi pada suatu percobaan maka:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) \qquad (2.7)$$

Contoh 2.12

Kotak berisi 12 filter, 3 cacat. Bila 2 filter dikeluarkan dari kotak satu persatu tanpa pengembalian, berapa peluang kedua sekring cacat?

Jawab

Peluang filter pertama cacat (A) adalah $\frac{3}{12}$ atau $\frac{1}{4}$. Peluang filter ke dua cacat (B) adalah $\frac{2}{11}$.

Sehingga:

$$P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{11} = \frac{1}{22}$$

Bila dalam suatu percobaan, kejadian A_1, A_2, A_3...dapat terjadi, maka:

$$P\left(A1 \cap A2 \cap A3 \cap \ldots\right) = P\left(A1\right) P(A2 \mid A1)(P(A3 \mid A1 \cap A2) \ldots (2.8)$$

Bila dalam contoh sebelumnya filter pertama dikembalikan dan isi kotak disusun kembali secara acak sebelum yang kedua diambil, peluang mengeluarkan filter cacat dalam pengambilan ke dua tetap $\frac{1}{4}$. Dalam kasus di atas berarti $P(B \mid A) = P\left(B\right)$. Sehingga A dan B dikatakan bebas. Kejadian A dan B bebas jika dan hanya jika $P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) P\left(B\right)$ (2.9)

Contoh 2.13

Dua dadu dilantunkan 2 kali. Berapa peluangnya mendapat jumlah 7 & 9 dalam 2 lantunan?

Jawab

Misalkan A1, A2, B1 dan B2 menyatakan kejadian bebas bahwa 7 muncul pada lantunan pertama, 7 muncul pada lantunan ke dua, 9 muncul pada lantunan pertama dan 9 muncul dalam lantunan ke dua. Yang akan dicari ialah peluang gabungan kejadian $A_1 \cap B_2$ dan $B_1 \cap A_2$ yang saling terpisah.

$$\begin{aligned} P\left[\left(A1 \cap B2\right) U \left(B1 \cap A2\right)\right] &= P\left(A1 \cap B2\right) + P\left(B1 \cap A2\right) \\ &= P\left(A1\right) P\left(B2\right) + P\left(B1\right) P\left(A2\right) \\ &= \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} \times \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

2.4 ATURAN BAYES

Aturan Bayes adalah teorema yang menggambarkan hubungan antara peluang bersyarat dari dua kejadian A dan B. Misalkan $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ adalah himpunan kejadian yang merupakan sekatan ruang sampel S dengan $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$. Misalkan A merupakan kejadian sembarang dalam S dengan $P(A) \neq 0$. Maka untuk $k = 1,2,\ldots,n$,

$$\begin{aligned} P(B_k \mid A) &= \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)} \\ &= \frac{P(B_k) P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)} \qquad (2.10) \end{aligned}$$

Contoh 2.14

Tiga anggota DPRD suatu daerah dicalonkan menjadi bupati di daerah tersebut. Peluang anggota B_1 terpilih 0,35, peluang anggota B_2 terpilih 0,25, sedangkan peluang anggota B_3 terpilih 0,40. Kalau anggota B_1 terpilih, peluang perubahan tata ruang adalah 0,8. Bila anggota B_2 atau anggota B_3 yang terpilih, peluang perubahan tata ruang masing-masing 0,1 dan 0,4. Bila terjadi perubahan tata ruang, berapakah peluang anggota B_3 terpilih menjadi bupati daerah tersebut?

Contoh Aturan Bayes

Perhatikan kejadian berikut**:**

A : Orang yang terpilih mengubah tata ruang.

B_1 : anggota B_1 yang terpilih.

B_2 : anggota B_2 yang terpilih.

B_3 : anggota B_3 yang terpilih.

Berdasarkan aturan Bayes, dapat ditulis sebagai berikut.

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3 \cap A)}{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)}$$

Sekarang:

$$P(B_1 \cap A) = P(B_1)P(A \mid B_1) = (0,35)(0,8) = 0,28$$

$$P(B_1 \cap A) = P(B_1)P(A \mid B_1)$$

$$= (0,35)(0,8)$$

$$= 0,28$$

$$\begin{aligned} P(B_2 \cap A) &= P(B_2)P(A \mid B_2) \\ &= (0,25)(0,1) \\ &= 0,025 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_3 \cap A) &= P(B_3)P(A \mid B_3) \\ &= (0,4)(0,4) \\ &= 0,16 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} P(B_3 \mid A) &= \frac{0,16}{0,28 + 0,025 + 0,16} \\ &= 0,34 \end{aligned}$$

2.5 SOAL-SOAL

Soal 2.1

a. Berapa banyak bilangan yang terdiri atas 3 digit dapat dibentuk dari angka 0,1,2,3, dan 4 bila tiap angka hanya dapat digunakan sekali?

b. Berapa banyak daripadanya yang merupakan bilangan genap?

c. Berapa banyak yang lebih besar dari 220?

Soal 2.2

a. Dengan berapa cara 5 benda seni dapat ditata pada suatu lingkaran?

b. Dengan berapa cara dapat disusun iring-iringan kendaraan yang terdiri dari 3 mobil, 4 sepeda motor dan 2 truk dalam satu garis lurus bila kendaraan yang sejenis tak dibedakan?

Soal 2.3

Sepuluh orang akan bepergian. Tersedia 3 kendaraan berkapasitas 5,4,3 penumpang. Berapa carakah dapat dibuat untuk mengangkut 10 orang tersebut?

Soal 2.4

Bila 3 buku diambil secara acak dari suatu rak yang berisi 4 novel, 3 biografi dan 1 kamus, berapakah peluang dari:

a. kamus terpilih;

b. satu novel dan satu biografi yang terpilih.

Soal 2.5

Sebuah kota mempunyai 2 mobil ambulans yang bekerja saling bebas. Peluang mobil tertentu tersedia bila diperlukan adalah 0,98.

a. Berapakah peluang keduanya tidak tersedia bila diperlukan?

b. Berapakah peluang paling tidak 1 mobil ambulans tersedia bila diperlukan?

Soal 2.6

Peluang seorang suami menonton berita televisi adalah 0,5 dan peluang seorang istri berita televisi yang sama 0,4. Peluang seorang suami berita televisi tersebut bila istrinya menonton adalah 0,7. Hitunglah:

a. peluang sepasang suami istri menonton film tersebut;

b. peluang seorang istri menonton film tersebut bila suaminya menonton;

c. peluang paling sedikit seorang dari pasangan suami istri menonton film tersebut.

Soal 2.7

Seorang pegawai mempunyai 2 mobil, 1 sedan dan 1 lagi MPV. Untuk pergi bekerja dia menggunakan sedan 75% dan MPV 25%. Bila dia menggunakan sedan, biasanya dia tiba kembali di rumah pukul 18.00 sebanyak 75%, sedangkan bila menggunakan MPV dia tiba pukul 18.00 kira-kira 50%. Bila dia tiba di rumah pukul 18.00, berapakah peluangnya dia memakai sedan?

Soal 2.8

Sebuah serum kejujuran yang diberikan kepada tertuduh diketahui 89% terandalkan bila orang tersebut bersalah, dan 98% terandalkan bila ia tidak bersalah. Dengan kata lain, 11% dari yang bersalah ditemukan tidak bersalah oleh serum dan 2% dari yang tidak bersalah ditemukan bersalah. Bila si tertuduh dipilih dari sekelompok tertuduh yang hanya 6% yang pernah melakukan kejahatan dan serum menyatakan bahwa dia bersalah, berapakah peluang orang itu tak bersalah?

Soal 2.9

Laboratorium Jalan Raya & Lalu-Lintas Untar menggunakan *speed gun* untuk pengukuran kecepatan setempat. Berdasarkan pengalaman penggunaan di masa lalu, alat ini 80% akurat untuk mengukur kecepatan tinggi dan 90% akurat untuk mengukur kecepatan rendah. Karena Untar terletak di kota besar berkepadatan lalu-lintas tinggi, 60% kegiatan pengukuran kecepatan terjadi pada keadaan kecepatan rendah. Dalam sebuah laporan studi kecepatan yang akurat, berapakah peluang bahwa kecepatan yang dilaporkan tinggi?

Soal 2.10

Dilaksanakan atau tidaknya suatu proyek *multi-years* tergantung kepada hasil pemilihan 4 calon pimpinan DPRD, yaitu calon A, B, C, D. Peluang A, B, C, D terpilih sebagai pimpinan DPRD masing-masing adalah 0,1; 0,2; 0,3; 0,4. Bila calon yang terpilih A, B, C, D maka peluang dilaksanakannya proyek *multi-years* tersebut masing-masing adalah 0,5; 0,4; 0,3; 0,2. Berapakah peluang bahwa proyek *multi-years* tersebut **tidak** dilaksanakan?

Soal 2.11

Dalam sebuah pabrik perakitan, tiga mesin B_1, B_2, dan B_3 berturut-turut membuat 30%, 45%, dan 25% produk. Dari pengalaman sebelumnya diketahui bahwa berturut-turut 2%, 3%, dan 4% dari produk mesin B_1, B_2, dan B_3 cacat. Bila suatu produk yang dipilih secara acak ternyata cacat, berapakah peluang bahwa produk itu dibuat mesin B_3?

Soal 2.12

Dibeli atau tidaknya suatu alat pengujian material tergantung kepada hasil pemilihan 4 calon kepala laboratorium, yaitu calon A, B, C, D. Peluang A, B, C, D terpilih sebagai kepala laboratorium masing-masing adalah 0,1; 0,2; 0,4; 0,5. Bila calon yang terpilih A, B, C, D maka peluang dibelinya studi alat tersebut masing-masing adalah 0,3; 0,8; 0,4; 0,1. Jika alat tersebut **telah dibeli** siapakah di antara ke empat calon kepala laboratorium yang **peluang terpilihnya terkecil**?

BAB 3

PEUBAH ACAK (*RANDOM VARIABLE*)

TUJUAN INSTRUKSIONAL:

Bab ini mempelajari pengertian peubah acak dan beda karakteristik antara peubah acak diskret dengan peubah acak kontinu. Bab ini juga mempelajari distribusi dan distribusi kumulatif kedua peubah acak tersebut. Bab ini diakhiri dengan beberapa harapan matematika khusus seperti mean dan variansi

3.1 PENGERTIAN PEUBAH ACAK

Peubah acak (*random variable*) adalah fungsi bernilai real yang harganya ditentukan oleh tiap-tiap anggota dalam ruang sampel.

Contoh

Bila satu mata uang dilantunkan 3 kali dan peubah acak X menyatakan banyaknya muka yang muncul maka x yang menyatakan nilai dari X mungkin memiliki harga 0, 1, 2, atau 3.

3.1.1 Peubah Acak Diskret

Peubah acak diskret adalah peubah acak yang terdiri atas bilangan bulat dan merupakan hasil pencacahan. Sementara **ruang sampel** adalah kumpulan seluruh titik sampel. Jika sebuah ruang sampel mengandung titik yang berhingga banyaknya atau suatu deretan anggota yang banyaknya sama dengan banyaknya bilangan bulat, ruang sampel itu disebut ruang sampel diskret dan peubah acak yang didefinisikan pada ruang sampel tersebut adalah peubah acak diskret.

3.1.2 Peubah Acak Kontinu

Peubah acak kontinu adalah peubah acak yang terdiri atas bilangan di antara bilangan bulat dan merupakan hasil pengukuran.

Bila ruang sampel mengandung titik sampel yang tak berhingga banyaknya dan sama banyaknya dengan banyak titik pada sepotong garis, ruang sampel itu disebut ruang sampel kontinu dan peubah acak yang didefinisikan di atasnya disebut peubah acak kontinu.

3.1.3 Distribusi Peluang Diskret

Fungsi f(x) adalah fungsi peluang atau distribusi peluang peubah acak diskret X bila, untuk setiap hasil yang mungkin.

$$f(x) \geq 0 \qquad (3.1)$$

$$\sum_{x} f(x) = 1 \qquad (3.2)$$

$$P(X = x) = f(x) \qquad (3.3)$$

3.1.4 Distribusi Kumulatif Peluang Diskret

Distribusi kumulatif F(x) suatu peubah acak X dengan distribusi peluang f(x) dinyatakan oleh:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \qquad (3.4)$$

Contoh 3.1

a. Carilah rumus distribusi peluang untuk jumlah muka bila satu mata uang dilemparkan empat kali!

b. Hitunglah distribusi kumulatif peubah acak X.

Jawab

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}}{16}, x = 0, 1, 2, 3, 4$$

maka:

$$f(0) = \frac{1}{16}$$

$$f(1) = \frac{1}{4}$$

$$f(2) = \frac{3}{8}$$

$$f(3) = \frac{1}{4}$$

$$f(4) = \frac{1}{16}$$

sehingga:

$$F\left(0\right)=f\left(0\right)=\frac{1}{16}$$

$$F\left(1\right)=f\left(0\right)+f\left(1\right)=\frac{5}{16}$$

$$F\left(2\right)=f\left(0\right)+f\left(1\right)+f\left(2\right)=\frac{11}{16}$$

$$F\left(3\right)=f\left(0\right)+f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)=\frac{15}{16}$$

$$F\left(4\right)=f\left(0\right)+f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)=1$$

3.1.5 Distribusi Peluang Kontinu

Fungsi f(x) adalah fungsi padat peluang peubah acak kontinu *X*, yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real *R*, bila:

$$f\left(x\right)\ ³\ 0, x\ Î\ R \tag{3.5}$$

dengan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx=1 \tag{3.6}$$

maka:

$$P\left(a<X<b\right)=\int_{a}^{b} f\left(x\right)dx \tag{3.7}$$

3.1.6 Distribusi Kumulatif Peluang Kontinu

Distribusi kumulatif *F(x)* suatu peubah acak kontinu X dengan fungsi padat *f(x)* diberikan oleh:

$$F\left(x\right)=P\left(X\le x\right)=\int_{-\infty}^{x} f\left(t\right)dt \tag{3.8}$$

Contoh 3.2 (dikutip dari Walpole & Myers, 1988)

a. Misalkan peubah acak X mempunyai fungsi padat peluang $f(x)=\frac{x^2}{3}$

b. Tunjukkan bahwa $f(x)=\frac{x^2}{3},-1<x<2, selebihnya, f(x)=0$

c. Hitung $P(0<x\leq 1)$

d. Carilah F(x) dan hitung $P(0<x\leq 1)$

Jawab

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-1}^{2}\frac{x^2}{3}\,dx$$

$$=\frac{x^3}{9}\Big|_{-1}^{2}$$

$$=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}$$

$$=1$$

$$P(0<X\leq 1)=\int_{0}^{1}\frac{x^2}{3}\,dx$$

$$=\frac{x^3}{9}\Big|_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{9}$$

$$F(X)\;=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

$$=\int_{-1}^{x}\frac{t^2}{3}\,dt$$

$$= \frac{t^3}{9} \Big|_{-1}^{x}$$

$$= \frac{x^3+1}{9}$$

Sehingga:

$$P(0 < X \leq 1) = F(1) - F(0)$$

$$= \frac{2}{9} - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{9}$$

3.2 HARAPAN MATEMATIK

Misalkan *X* suatu peubah acak dengan distribusi peluang *f(x)*, nilai harapan *X* atau harapan matematik *X* adalah sebagai berikut.

Bila *X* diskret, $E(X) = \sum_x xf(x)$ (3.9)

Bila X kontinu, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ (3.10)

Contoh 3.3

a. Carilah nilai harapan banyaknya pria dalam panitia 3 orang yang dipilih secara acak dari 4 pria dan 3 wanita!

b. Misalkan *X* menyatakan banyaknya pria dalam panitia maka distribusi peluang X adalah:

Jawab

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}, x = 0, 1, 2, 3$$

maka:

$$f(0)=\frac{1}{35}$$

$$f(1)=\frac{12}{35}$$

$$f(2)=\frac{18}{35}$$

$$f(3)=\frac{4}{35}$$

sehingga:

$$E(X)=(0)\left(\frac{1}{35}\right)+(1)\left(\frac{12}{35}\right)+(2)\left(\frac{18}{35}\right)+(3)\left(\frac{4}{35}\right)$$

$$=\frac{12}{7}$$

$$=1,7$$

Contoh 3.4

a. Misalkan X peubah acak yang menyatakan umur dalam jam sejenis komponen. Fungsi pada peluangnya diberikan oleh $f(x)=\frac{20000}{x^3}, x>100$

b. Untuk x lainnya *f(x) = 0*

c. Hitunglah harapan umur komponen tadi!

Jawab

$$E(X)=\int_{100}^{\infty} x\frac{20000}{x^3}\,dx$$

$$= \int_{100}^{\infty} \frac{20000}{x^2} dx$$

$$= -\frac{20000}{x}\bigg|_{100}^{\infty}$$

$$= -\frac{20000}{\infty} - \left(-\frac{20000}{100}\right)$$

$$= 200$$

3.2.1 Harapan Matematik Khusus

Harapan matematik khusus adalah harapan matematik yang merupakan mean dan variansi.

$$E(X) = \mu \tag{3.11}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \tag{3.12}$$

BAB 4

DISTRIBUSI PELUANG DISKRET

TUJUAN INSTRUKSIONAL:

Bab ini mempelajari beberapa jenis distribusi peluang diskret, yaitu distribusi seragam, binomial, dan Poisson beserta aplikasinya.

4.1 DISTRIBUSI PELUANG DISKRET DAN DISTRIBUSI SERAGAM

Distribusi peluang diskret adalah distribusi peluang yang menyangkut peubah diskret, yaitu peubah yang merupakan hasil pencacahan sehingga ruang sampelnya adalah seluruh bilangan cacah. Sementara **distribusi seragam** adalah distribusi peluang yang peluang kejadian tiap peubah acaknya adalah sama

Bila peubah acak X mendapat harga x_1, x_2,…, x_k, dengan peluang yang sama, distribusi seragam diskret diberikan oleh persamaan berikut.

$$f(x,k)=\frac{1}{k}, x=x_1,x_2,\ldots x_k \qquad (4.1)$$

Rataan dan variansi distribusi seragam diskret *f(x;k)* adalah sebagai berikut.

$$\mu=\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} \qquad (4.2)$$

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\mu)^2}{k} \qquad (4.3)$$

Contoh 4.1

a. Bila sebuah dadu dilemparkan, tiap elemen ruang sampel S={1,2,3,4,5,6} muncul dengan peluang 1/6.

b. Jadi merupakan distribusi peluang dengan *f(x;6)*=$\frac{1}{6}$, x = 1,2,3,4,5,6

$$\mu=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}$$
$$=3,5$$

$$\sigma^2=\frac{(1-3,5)^2+(2-3,5)^2+(3-3,5)^2+(4-3,5)^2+(5-3,5)^2+(6-3,5)^2}{6}$$
$$=\frac{35}{12}$$

4.2 DISTRIBUSI BINOMIAL

Distribusi binomial adalah distribusi peluang yang memiliki dua kemungkinan hasil. Distribusi binomial memiliki ciri sebagai berikut.

a. Percobaan terdiri atas n usaha yang berulang.

b. Tiap usaha memberi hasil yang dapat ditentukan dengan sukses atau gagal.

c. Peluang sukses dinyatakan dengan p, tidak berubah dari usaha yang satu ke yang berikutnya.

d. Tiap usaha bebas dengan usaha lainnya.

Peubah acak binomial adalah banyaknya sukses X dalam n usaha suatu percobaan binomial. Bila suatu usaha binomial dapat menghasilkan sukses dengan peluang p dan gagal dengan peluang $q = 1\text{-}p$, distribusi peluang peubah acak binomial X, yaitu banyaknya sukses dalam n usaha bebas adalah sebagai berikut.

$$b(x,n,p)=\left(\frac{n}{x}\right)p^x q^{n-x}, x=0,1,2,\ldots,n \qquad (4.4)$$

Contoh 4.2

Sebuah komponen dapat menahan uji guncangan tertentu dengan peluang $\frac{3}{4}$. Hitunglah peluang bahwa tepat 2 dari 4 komponen yang diuji tidak akan rusak!

$$b\left(2;4,\frac{3}{4}\right)=\binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$=\frac{4!3^2}{2!2!4^4}$$

$$=\frac{27}{128}$$

Contoh 4.3

Sebuah kesalahan konstruksi mempunyai peluang terjadi 0,4. Bila diketahui terdapat 15 proyek, berapakah peluang terjadinya kesalahan konstruksi (1) paling sedikit pada 10 proyek; (2) antara 3 sampai 8 proyek; dan (3) tepat 5 proyek.

Jawab

$$P(X\geq 10)=1-P(X<10)$$

$$=1-\sum_{x=0}^{9}b(x;15;0,4)$$

$$=1-0,9662$$

$$=0,0338$$

$$P(3\leq X\leq 8)=\sum_{x=3}^{8}b(x;15;0,4)$$

$$=\sum_{x=3}^{8}b(x;15;0,4)-\sum_{x=3}^{2}b(x;15;0,4)$$

$$=0,9050-0,0271$$

$$=0,8779$$

$$
\begin{aligned}
P(X=5) &= b(x;15;0,4)\\
&= \sum_{x=0}^{5} b(x;15;0,4) - \sum_{x=0}^{4} b(x;15;0,4)\\
&= 0,4032 - 0,2173\\
&= 0,1859
\end{aligned}
$$

4.2.1 Rataan dan Variansi Distribusi Binomial

Rataan distribusi binomial dihitung dengan rumus 4.5 dan **Variansi distribusi binomial** dihitung dengan rumus 4.6.

$$u = np \tag{4.5}$$

$$\sigma^2 = npq \tag{4.6}$$

4.3 DISTRIBUSI POISSON

Distribusi Poisson adalah distribusi peluang yang memiliki dua peluang hasil, tetapi berbeda dengan distribusi binomial, karena memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

a. Banyaknya sukses terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu tidak terpengaruh oleh apa yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpilih.

b. Peluang terjadinya suatu sukses tunggal dalam selang waktu amat pendek dalam daerah yang kecil sebanding dengan panjang selang waktu atau besarnya daerah dan tidak tergantung pada banyaknya sukses yang terjadi di luar selang waktu atau daerah tersebut.

c. Peluang terjadinya lebih dari 1 sukses dalam selang waktu yang pendek atau daerah yang sempit tersebut dapat diabaikan.

4.3.1 Peubah Acak Poisson

Peubah acak poisson adalah banyaknya sukses *X* dalam suatu percobaan Poisson. Bila μ menyatakan rata-rata banyaknya sukses yang terjadi dalam selang waktu atau daerah tertentu dan e = 2,71828… maka distribusi peubah acak poison *X*, yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu tersebut, diberikan oleh persamaan berikut.

$$p(x;\mu)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!},x=0,1,2,... \qquad (4.7)$$

Contoh 4.4

a. Rata-rata banyaknya kendaraan yang melewati gerbang tol setiap menit adalah 4. Berapakah pelung 6 kendaraan melewati penghitung dalam suatu menit?

b. Jawab: $x = 6$ dan $\mu = 4$, bisa dihitung dengan rumus atau tabel

$$\begin{aligned}p(6;4)&=\frac{e^{-4}4^{6}}{6!}\\&=\frac{2,71828^{-4}4^{6}}{6.5.4.3.2.1}\\&=0,1042\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}p(6;4)&=\sum_{x=0}^{6}p(x;4)\\&=\sum_{x=0}^{5}p(x;4)\\&=0,8893-0,7851\\&=0,1042\end{aligned}$$

Contoh 4.5 (Dikutip dari Walpole dan Myers, 1988)

Rata-rata banyaknya tanker minyak yang tiba tiap hari di suatu pelabuhan adalah 10. Pelabuhan tersebut hanya mampu menerima paling banyak 15 tanker sehari. Berapakah peluang pada suatu hari tertentu tanker terpaksa disuruh pergi karena pelabuhan tak mampu melayaninya?

$$
\begin{aligned}
P(X>15) &= 1-P(X\le 15)\\
&= 1-\sum_{x=0}^{15} p(x;10)\\
&= 1-0,9513\\
&= 0,0487
\end{aligned}
$$

4.3.2 Rataan, Variansi, dan Hampiran Poisson terhadap Binomial

a. Rataan dan variansi distribusi Poisson $p(x;\mu)$ keduanya sama dengan μ.

b. Misalkan X peubah acak binomial dengan distribusi peluang $b(x;\ n,\ p)$. Bila n cukup besar dan p mendekati 0, dan $\mu = np$ tetap sama, persamaannya adalah sebagai berikut.

$$b(x,n,p)\rightarrow p(x,\mu)$$

Contoh 4.6

Dalam proses produksi yang menghasilkan suatu komponen. Diketahui rata-rata 1 dari 1000 komponen yang dihasilkan mempunyai 1 komponen cacat. Berapakah peluang bahwa dalam sampel acak sebesar 8000 barang akan berisi kurang dari 7 yang cacat.

Jawab

Pada dasarnya percobaan ini binomial dengan n = 8000 dan p = 0,001. Karena p sangat dekat dengan 0 dan n cukup besar maka akan dihampiri dengan Poisson dengan μ = (8000)(0,001) = 8

$$
\begin{aligned}
P(X<7) &= \sum_{x=0}^{6} b(x;8000;0,001) \\
&\cong \sum_{x=0}^{6} p(x,8) \\
&= 0,3134
\end{aligned}
$$

4.4 SOAL-SOAL

Soal 4.1

Bilangan 1 sampai dengan 10 dituliskan masing-masing di 10 kertas yang digulung lalu dimasukkan ke kotak. Bila X adalah peubah acak yang menyatakan bilangan yang tertulis dalam gulungan kertas yang diambil secara acak:

a. Carilah rumus distribusi peluang X!
b. Berapakah peluang mengambil bilangan lebih kecil dari 4?
c. Hitung rataan dan variansi X!

Soal 4.2

Bila X adalah peubah acak yang menyatakan banyaknya muka yang muncul bila suatu uang logam yang setangkup dilantunkan sekali, hitunglah distribusi peluang X. Sebutkanlah 2 distribusi terkenal yang dapat menyatakan X!

Soal 4.3

Dalam pengujian sejenis mengenai ban truk yang melalui jalan kasar, ditemukan bahwa 30% truk mengalami kegagalan karena ban pecah. Berapakah peluang 5 sampai 10 truk dari 15 yang diuji akan mengalami pecah ban?

Soal 4.4

Seorang insinyur pengawas lalu lintas melaporkan bahwa 60% kendaraan yang melintasi suatu daerah pemeriksaan berasal dari DKI. Berapakah peluang bahwa paling sedikit 3 dari 5 kendaraan mendatang yang melalui pemeriksaan tersebut berasal dari luar DKI?

Soal 4.5

Diketahui bahwa 75% dari tikus yang disuntik dengan sejenis serum terlindung dari serangan sejenis penyakit. Bila 3 tikus disuntik, berapakah peluang paling banyak 2 dari padanya terserang penyakit tersebut?

Soal 4.6 (dimodifikasi dari Walpole & Myers, 1988)

a. Misalkan mesin pesawat terbang bekerja bebas satu dari yang lain dalam penerbangan dan gagal dengan peluang $p=\frac{4}{5}$. Bila dimisalkan bahwa sebuah pesawat terbang melakukan penerbangan dengan selamat jika paling sedikit setengah mesinnya bekerja, pesawat bermesin 4 ataukah bermesin 2 yang paling tinggi keselamatan penerbangannya?

b. Pada nilai p, berapakah keselamatan penerbangan pesawat bermesin dua dan bermesin empat tepat sama?

Soal 4.7

Di suatu simpang jalan, rata-rata terjadi tiga kecelakaan dalam sepekan. Berapakah peluang dalam suatu pekan tertentu akan terjadi tepat lima kecelakaan di simpang tersebut? Berapakah peluang terjadi kurang dari satu kecelakaan per hari?

Soal 4.8

Suatu daerah rata-rata ditimpa 8 angin topan/tahun. Carilah peluang di suatu tahun tertentu:

a. Tidak sampai 5 angin topan yang akan menimpa daerah tersebut;

b. Antara 7 sampai 9 angin topan akan menimpa daerah tersebut.

Soal 4.9

Dalam penelitian inventori (persediaan barang) diketahui bahwa permintaan rata-rata dari gudang terhadap suatu bahan tertentu 5 kali sehari. Berapakah peluang pada suatu hari tertentu bahan tersebut:

a. Diminta lebih dari 4 kali?

b. Tidak diminta sama sekali?

Soal 4.10

Misalkan rata-rata 1 dari tiap 1000 orang melakukan salah isi formulir sensus. Jika 10.000 formulir diambil secara acak dan diperiksa, hitunglah peluang bahwa 6, 7, atau 8 isian tersebut akan salah isi!

Soal 4.11

Dalam sebuah proses produksi diketahui terdapat 2 produk cacat dari 1.000 produk. Berapakah peluang bahwa dalam sampel acak sebesar 2.000 terdapat tepat 4 produk cacat?

Soal 4.12

Sebuah studi mendapati bahwa rataan jumlah kecelakaan di sepanjang suatu jalan adalah 4 kecelakaan sehari. Cari peluang:

a. Paling tidak 6 kecelakaan terjadi di sepanjang jalan tersebut pada suatu hari Senin;

b. Di antara dan termasuk 4 dan 6 kecelakaan terjadi dari pukul 5.00 hingga 11.00 pagi;

c. Di antara 10 dan 15 kecelakaan terjadi pada 2 hari pertama bulan Juli.

Soal 4.13

Berdasarkan pengalaman sebelumnya, 2% pesanan tiket pesawat udara yang dibuat melalui telepon tidak ditindaklanjuti. Jika sebuah agen perjalanan menerima 150 pesanan, berapakah peluang bahwa 5 orang penumpang tidak mengambil tiket yang dipesannya?

Soal 4.14

Empat puluh persen dari penduduk di sebuah kota didapati memiliki paling sedikit satu kartu kredit. Jika seorang peneliti mewawancarai 100 orang penduduk di kota tersebut, berapakah peluang 30 orang dari mereka memiliki paling tidak satu kartu kredit?

Soal 4.15

Dalam sebuah kompleks perumahan eksklusif, diperkirakan terdapat 25% rumah yang terpasang sistem alarm yang tidak berfungsi dengan baik. Sampel sebanyak 10 rumah diperiksa sistem alarmnya.

a. Hitung peluang bahwa tidak satu rumah pun yang alarmnya berfungsi dengan baik!

b. Hitung peluang bahwa tepat 7 rumah yang sistem alarmnya berfungsi dengan baik!

c. Hitung peluang bahwa lebih dari 7 rumah yang sistem alarmnya berfungsi dengan baik!

d. Mengapa peluang jawaban nomor 2 relatif besar? Jelaskan dengan perhitungan sederhana!

Soal 4.16

Masih terkait dengan soal 4.15. Jika alarm tidak berfungsi dengan baik, alarm itu akan berbunyi (tanpa sebab yang tepat) rata-rata 7 kali sepekan (seminggu).

a. Hitung peluang bahwa tidak ada bunyi alarm yang tidak benar pada suatu hari tertentu! Hitung peluang bahwa terjadi tepat 3 kali bunyi alarm yang tidak benar pada suatu hari tertentu!

b. Hitung peluang bahwa terjadi kurang dari 2 kali bunyi alarm yang tidak benar pada suatu hari tertentu!

c. Mengapa peluang jawaban nomor 3 di soal 4.15 relatif besar? Jelaskan dengan perhitungan sederhana!

Soal 4.17

Sebuah perusahaan aditif beton mengetahui bahwa rata-rata 5% dari sejenis produknya mempunyai kemampuan di bawah standar minimum. Hitung peluang bahwa kurang dari 10 dalam sampel 200 kemasan aditif tidak memenuhi persyaratan dengan menggunakan hampiran normal!

Soal 4.18

Urinoir yang diproduksi suatu pabrik rusak 10%. Jika seseorang membeli 20 produk pabrik tersebut secara acak.

a. Hitunglah peluang bahwa tidak satu produk pun rusak!

b. Hitunglah peluang bahwa tepat 2 barang rusak!

c. Hitunglah peluang bahwa paling sedikit 6 barang rusak!

Soal 4.19

Rata-rata penumpang pesawat udara yang datang di sebuah bandar udara perintis adalah 6 orang per menit.

a. Hitung peluang tidak ada penumpang yang datang dalam 1 menit!

b. Hitung peluang datangnya paling banyak 5 penumpang dalam 1 menit!

c. Hitung peluang tidak ada penumpang yang datang dalam 10 detik!

d. Hitung peluang minimal 2 orang datang dalam 10 detik!

Soal 4.20

Barang yang diproduksi sebuah pabrik rusak 10%. Jika seseorang membeli 5 produk pabrik tersebut secara acak, hitunglah:

a. Peluang bahwa tidak satu barang pun rusak!

b. Peluang bahwa tepat 1 barang rusak!

c. Peluang bahwa paling sedikit 1 barang rusak!

d. Mengapa peluang jawaban 1 dan 2 relatif besar? Jelaskan dengan perhitungan sederhana!

Soal 4.21

Rata-rata penumpang bus yang datang di sebuah terminal adalah 18 orang per menit.

a. Hitung peluang tidak ada penumpang yang datang dalam 1 menit!

b. Hitung peluang datangnya paling banyak 10 penumpang dalam 1 menit!

c. Hitung peluang tidak ada penumpang yang datang dalam 20 detik!

d. Hitung peluang minimal 4 orang datang dalam 20 detik!

Soal 4.22

30% dari seluruh kerusakan pipa air kotor di sebuah gedung disebabkan oleh kesalahan operator. Bila saat dilakukan inspeksi terdapat 20 titik pada jaringan pipa air kotor di gedung tersebut yang mengalami kerusakan, berapakah peluang:

a. Paling tidak 10 titik kerusakan disebabkan kesalahan operator?

b. Tidak lebih dari 4 titik kerusakan disebabkan kesalahan operator.

Soal 4.23

Rata-rata kendaraan yang datang di sebuah gerbang tol adalah 3 kendaraan per menit.

a. Hitung peluang tidak ada kendaraan yang datang dalam 1 menit!

b. Hitung peluang datangnya paling banyak 4 kendaraan dalam 1 menit!

c. Hitung peluang tidak ada kendaraan yang datang dalam 20 detik!

d. Hitung peluang minimal 4 kendaraan datang dalam 20 detik!

BAB 5

DISTRIBUSI PELUANG KONTINU

TUJUAN INSTRUKSIONAL:

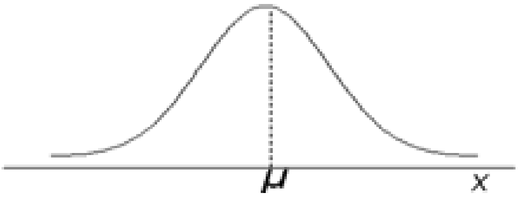
Bab ini mempelajari distribusi peluang kontinu yang sangat penting, sebagai prasyarat bagi keberlakuan analisis parametrik yaitu distribusi normal.

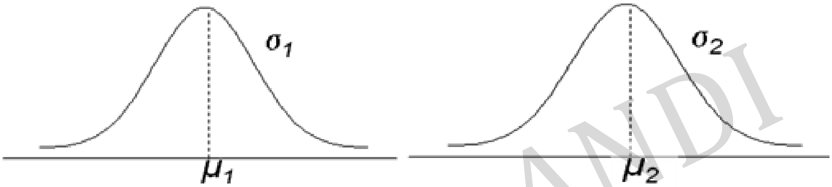
5.1 DISTRIBUSI PELUANG KONTINU DAN DISTRIBUSI NORMAL

Distribusi peluang kontinu adalah distribusi peluang yang menyangkut peubah kontinu, yaitu peubah yang merupakan hasil pengukuran sehingga ruang sampelnya adalah seluruh bilangan riil. **Distribusi normal** adalah distribusi peluang kontinu yang dijadikan kriteria penting dalam keberlakuan analisis statistika parametrik. **Kurva normal** adalah yang menggambarkan fungsi padat peubah acak normal. **Fungsi padat peubah acak normal** dihitung dengan rumus 5.1.

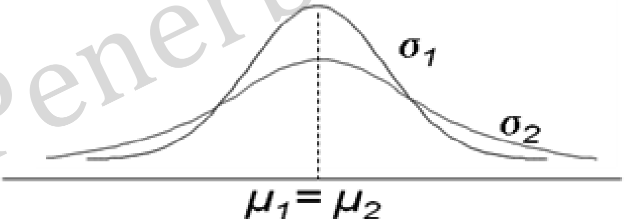
Fungsi padat peubah acak normal X, dengan rataan μ dan variansi σ^2

$$n(X;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (5.1)$$

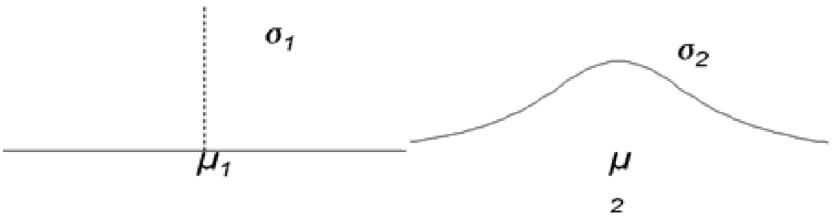




Gambar 5.1 Kurva Normal dengan μ1 < μ2 dan s1 = s2



Gambar 5.2 Kurva Normal dengan μ1 = μ2 dan σ1 < σ2



Gambar 5.3 Kurva Normal dengan μ1 < μ2 dan σ1 < σ2

5.1.1 Sifat Kurva Normal

Kurva normal memiliki sifat-sifat sebagai berikut.

a. Modus, titik pada sumbu datar yang memberikan maksimum kurva, terdapat pada x=μ.

b. Kurva setangkup terhadap garis tegak yang melalui rataan μ.

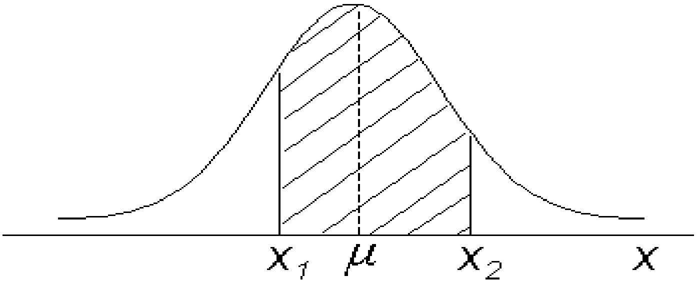
c. Kurva mempunyai titik belok pada $x = \mu \pm \sigma$, cekung dari bawah bila $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$, dan cekung dari atas untuk harga x lainnya.

d. Kedua ujung kurva normal mendekati asimtot sumbu datar bila harga x bergerak menjauhi μ baik ke kiri maupun ke kanan.

e. Seluruh luas di bawah kurva dan di atas sumbu datar sama dengan 1.

5.1.2 Luas Di Bawah Kurva Normal

Luas di bawah kurva normal dihitung dengan mengintegralkan rumus 5.1 dengan batas atas x_2 dan batas bawah x_1. Kita menggunakan luas di bawah kurva normal untuk menghitung peluang sebuah kejadian.



$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n\left(X;\mu,\sigma\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 dx} \qquad (5.2)$$

5.2 DISTRIBUSI NORMAL BAKU

Distribusi normal baku mencakup berbagai hal berikut.

a. Untuk mengatasi kesulitan menghitung integral fungsi padat normal, dibuat tabel luas kurva normal. **Tabel luas kurva normal** adalah tabel yang dibuat untuk menghitung dengan mudah dan cepat luas di bawah kurva normal setelah proses transformasi dari peubah acak normal X menjadi peubah acak normal Z.

b. Tidak mungkin membuat tabel yang berlainan untuk setiap harga μ dan σ.

c. Untuk itu setiap peubah acak normal X ditransformasikan menjadi peubah acak normal Z dengan μ=0 dan σ=1.

d. Hal ini dapat dikerjakan dengan transformasi berikut:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad (5.3)$$

e. Distribusi peubah acak normal dengan μ = 0 dan σ = 1 disebut distribusi normal baku.

Contoh 5.1

a. Diketahui distribusi normal dengan $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$. Carilah peluang bahwa X mendapat harga antara 45 dan 62.

b. Nilai z yang berpadanan dengan $x_1 = 45$ dan $x_2 = 62$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{45-50}{10} \\ &= -0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{62-50}{10} \\ &= -1,2 \end{aligned}$$

$$P(45 < X < 62 = P(-0,5 < Z < 1,2)$$

$$\begin{aligned} &= P\left(Z < 1,2\right) - P\left(Z < -0,5\right) \\ &= 0,8849 - 0,3085 \\ &= 0,5764 \end{aligned}$$

Contoh 5.2

Suatu jenis aki mobil rata-rata berumur 3,0 tahun dengan simpangan baku 0,5 tahun. Bila dianggap umur baterai berdistribusi normal, carilah peluang suatu baterai tertentu berumur kurang dari 2,3 tahun!

Jawab

$$\begin{aligned} z &= \frac{2,3-3}{0,5} \\ &= -1,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z < 2,3) &= P(Z < -1,4) \\ &= 0,0808 \end{aligned}$$

Contoh 5.3

Suatu pengukur dipakai untuk menolak semua komponen yang ukurannya tidak memenuhi ketentuan $1,50 \pm d$. Diketahui bahwa pengukuran tersebut berdistribusi normal dengan μ 1,5 dan s 0,2. Tentukanlah harga *d* sehingga ketentuan tersebut mencakup 95% dari seluruh pengukuran!

Jawab

Contoh 5.2 dikerjakan dengan menentukan nilai *z* yang bersepadan dengan nilai *x* kemudian mencari luas yang ditanyakan. Dalam soal ini prosesnya dibalik dan dimulai dengan luas atau peluang yang diketahui, tentukan harga *z*, kemudian tentukan *x* dari rumus $x = z\sigma + \mu$. Dari tabel 4 dapat dicari bahwa:

$$P(-1,96 < Z < 1,96 = 0,95)$$

jadi:

$$1,50 + d = (0,2)(1,96) + 1,50$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} d &= (0,2)(1,96) \\ &= 0,392 \end{aligned}$$

Contoh 5.4

Sebuah mesin membuat alat tahanan listrik dengan μ tahanan 40 ohm dan σ 2 ohm. Misalkan tahanan berdistribusi normal dan dapat diukur sampai derajat ketelitian yang diinginkan. Berapa persentase alat yang mempunyai tahanan melebihi 43 ohm?

Jawab

Persentase diperoleh bila frekuensi nisbi (relatif) dikalikan dengan 100%. Karena frekuensi nisbi untuk suatu selang sama dengan peluang jatuh dalam selang tersebut, maka harus dicari luas daerah di sebelah kanan $x = 43$

$$z = \frac{43-40}{2}$$
$$= 1,5$$

$$P(X > 43 = P(Z > 1,5)$$
$$= 1 - P \ < 1,5$$
$$= 1 - 0,9332$$
$$= 0,0668$$
$$= 6,68\%$$

Contoh 5.5

Hitunglah persentase tahanan yang melebihi 43 ohm pada contoh 4.5 bila tahan diukur dengan membulatkan ke bilangan bulat terdekat!

Jawab

Soal ini berbeda dengan contoh 5.4. Dalam kasus ini, semua alat yang bertahanan melebihi 42,5, tetapi kurang dari 43,5 ohm, akan ditulis 43 ohm. Sesungguhnya, dalam hal ini distribusi diskret dihampiri dengan distribusi normal kontinu. Luas yang dicari adalah daerah di sebelah kanan 43,5, sehingga:

$$z = \frac{43,5-40}{2}$$
$$= 1,75$$

$$
\begin{aligned}
P(X > 43,5 = P(Z > 1,75)& \\
&= 1 - P\left(< 1,75\right) \\
&= 1 - 0,9599 \\
&= 0,0401 \\
&= 4,01\%
\end{aligned}
$$

5.3 HAMPIRAN NORMAL TERHADAP BINOMIAL

Hampiran normal terhadap binomial adalah perhitungan kasus binomial dengan pendekatan distribusi normal untuk kasus-kasus yang terlalu rumit, terutama jika dihitung langsung dengan distribusi binomial.

Bila X peubah acak binomial dengan rataan $\mu = np$ dan variansi $\sigma^2 = npq$, bentuk distribusinya adalah sebagai berikut.

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \qquad (5.4)$$

bila n sangat besar berdistribusi normal baku n $(z, 0, 1)$

5.3.1 Hampiran Normal terhadap Binomial

Hampiran normal terhadap binominal adalah sebagai berikut.

a. Hampiran normal dipakai untuk menghitung peluang binomial bila p tidak dekat dengan 0 atau 1.

b. Hampiran tersebut baik sekali bila n besar dan cukup baik untuk nilai n yang kecil asal saja p cukup dekat dengan $\frac{1}{2}$.

c. Bila np maupun nq lebih besar dari 5 maka hampiran akan baik.

Contoh 5.6

Suatu proses menghasilkan sejumlah barang yang 10% cacat. Bila 100 barang diambil secara acak dari proses tersebut, berapakah peluang bahwa banyaknya yang cacat lebih dari 13?

Jawab

$$\mu \quad = np$$

$$= \ 100 \quad 0,1$$

$$= 10$$

$$\sigma^2 \ = npq$$

$$= (100)(0,1)(0,9)$$

$$= 9$$

maka:

$$\sigma \ = 3$$

sehingga:

$$z \ = \frac{13,5 - 10}{3}$$

$$= 1,167$$

dan:

$$P(Z > 1,167) = \sum_{x=14}^{100} b \ \ x;100;0,1$$

$$\cong P\left(Z > 1,167\right)$$

$$= 1 - P \ \ Z,1,167$$

$$= 1 - 0,8784$$

$$= 0,1216$$

5.4 SOAL-SOAL

Soal 5.1

Diameter suatu komponen berdistribusi normal dengan rataan 10 cm dan simpangan baku 0,03 cm. Berapakah proporsi komponen yang berdiameter melebihi 10,07 cm?

Soal 5.2

Kuat suatu logam berdistribusi normal dengan rataan 10000 kg/cm^2 dan simpangan baku 100 kg/cm^2. Bila pengukuran dibulatkan ke 100 kg/cm^2 terdekat, berapa bagian dari komponen yang mempunyai kekuatan melebihi 10200 kg/cm^2?

Soal 5.3

Kuat suatu komponen logam tertentu berdistribusi normal dengan rataan 10.000 kg/cm^2 dan simpangan baku 150 kg/cm^2. Pengukuran dibulatkan ke 50 kg/cm^2 terdekat. Berapa bagian dari komponen mempunyai kekuatan melebihi 10.150 kg/c?

Soal 5.4

Suatu proses menghasilkan 10% barang cacat. Bila 50 barang diambil secara acak, berapakah peluang bahwa banyaknya barang yang cacat tepat 5?

Soal 5.5

Suatu proses menghasilkan sejumlah produk yang 20% cacat. Bila dari sampel 200 produk yang diambil secara acak dari proses tersebut ditemukan lebih dari 40 produk yang cacat maka mesin harus diperiksa ulang. Berapakah peluang bahwa mesin harus diperiksa ulang?

Soal 5.6

Suatu proses menghasilkan sejumlah produk yang 1% cacat. Bila diperiksa sampel 100 produk yang diambil secara acak dari proses tersebut berapakah peluang bahwa tidak dijumpai produk yang cacat?

Soal 5.7

Suatu proses menghasilkan sejumlah produk yang 20% cacat. Berapakah peluang bahwa dari sampel 100 produk yang diambil secara acak dari proses tersebut ditemukan kurang dari 15 produk yang cacat?

Soal 5.8

Rata-rata curah hujan (dicatat ke 0,01 cm terdekat) di Bandung pada bulan Oktober adalah 9,22 cm. Bila dimisalkan distribusinya normal dengan simpangan baku 2,83 cm, hitunglah peluang bahwa bulan Oktober yang akan datang Bandung akan mendapatkan hujan!

Soal 5.9

Suatu perusahaan aditif beton mengetahui bahwa rata-rata 5% dari sejenis produknya mempunyai kemampuan di bawah standar minimum.

a. Hitung peluang bahwa kurang dari 10 dalam sampel 200 kemasan aditif tidak memenuhi persyaratan dengan menggunakan hampiran normal!

b. Ulangi perhitungan nomor 1 dengan menggunakan hampiran Poisson!

c. Mengapa diperlukan menggunakan hampiran pada perhitungan kasus ini?

d. Dalam kasus ini hampiran manakah yang seharusnya digunakan, normal atau Poisson? Jelaskan!

Soal 5.10

Rata-rata debit air pada pipa distribusi air minum (dicatat ke 0,1 m^3/detik terdekat) di suatu kota pada bulan November adalah 1,0 m^3/detik . Bila dimisalkan distribusinya normal dengan simpangan baku 0,3 m^3/detik. Hitunglah peluang bahwa bulan November yang akan datang kota tersebut tidak mendapat pasokan air minum!

Soal 5.11

Rata-rata tebal endapan lumpur di sebuah saluran (dicatat ke cm terdekat) 5 cm. Bila dimisalkan distribusinya normal dengan simpangan baku 0,2 cm. Hitunglah peluang di saluran tersebut tidak terdapat endapan lumpur!

BAB 6

DISTRIBUSI SAMPEL

TUJUAN INSTRUKSIONAL:

Bab ini mempelajari beberapa distribusi sampel yang akan digunakan dalam analisis statistika inferensial pada bab-bab selanjutnya, yaitu distribusi rataan, distribusi selisih rataan, distribusi khi kuadrat, distribusi t dan distriusi F.

6.1 DISTRIBUSI SAMPEL

Distribusi sampel adalah distribusi dari sejumlah sampel yang diambil dari populasi. Hal ini harus dibedakan dengan distribusi peubah acak X yang telah dipelajari sebelumnya.

Jika:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

berdistribusi normal dengan rataan:

$$\mu_{\overline{X}} = \frac{\mu + \mu + \ldots + \mu}{n} = \mu \qquad (6.1)$$

dan variansi:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \qquad (6.2)$$

bila *X* rataan sampel acak berukuran *n* yang diambil dari populasi dengan rataan μ dan variansi σ^2 yang berhingga, maka limit distribusi adalah sebagai berikut.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad (6.3)$$

Bila $n \to \infty$, ialah distribusi normal baku *n* (*z* ; 0,1):

a. hampiran normal untuk *X* umumnya cukup baik bila $n \geq 30$, terlepas dari bentuk populasi;

b. bila $n < 30$, hampirannya hanya akan baik bila populasinya tidak jauh berbeda dengan normal;

c. bila populasinya diketahui normal, maka distribusi sampel *X* akan tepat berdistribusi normal, dan ukuran sampelnya tidak menjadi soal.

Contoh 6.1

Sebuah perusahaan memproduksi komponen yang umurnya berdistribusi hampir normal dengan rataan 800 jam dan simpangan baku 40 jam. Hitunglah peluang bahwa suatu sampel acak dengan 16 komponen akan mempunyai umur rata-rata kurang dari 775 jam!

Jawab

$$z = \frac{775-800}{\frac{40}{\sqrt{16}}}$$

$$= -2,5$$

$$P\left(\bar{X} < 775\right) = P\left(Z < -2,5\right)$$

$$= 0,006$$

Contoh 6.2

a. Diketahui populasi yang berdistribusi seragam diskret:
   1) $f(x) = \frac{3}{4}$ untuk $x = 0,1,2,3$;
   2) $f\left(x\right) = 0$ untuk x lainnya.

b. Hitunglah peluang bahwa sampel acak berukuran 36, dipilih dengan pengembalian, akan menghasilkan rataan sampel lebih besar dari 1,4 tetapi lebih kecil dari 1,8 bila rataan diukur sampai persepuluhan terdekat!

Jawab

$$\mu = \frac{0+1+2+3}{4}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{\left(0-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2}{4}$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$z_1 = \frac{1,45-1,5}{\frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{36}}}$$

$$= -0,269$$

$$z_2 = \frac{1,75-1,5}{\frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{36}}}$$

$$= 1,344$$

$$P(1,4 < X < 1,8) = P(-0,269 < Z < 1,344)$$

$$= P(Z < 1,344) - P(Z < -0,269)$$

$$= 0,9105 - 0,3936$$

$$= 0,5169$$

6.2 SELISIH RATAAN

Selisih rataan adalah selisih rataan dari dua sampel yang independen. Bila sampel bebas ukuran n_1 dan n_2 diambil secara acak dari 2 populasi, diskret maupun kontinu, masing-masing dengan rataan μ_1 dan μ_2 dan variansi σ_1^2 yang σ_1^2, maka distribusi sampel dari selisih rataan, X_1-X_2, berdistribusi hampir normal dengan rataan dan variansi berikut.

$$\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \mu_1 - \mu_2 \qquad (6.4)$$

$$\sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \qquad (6.5)$$

Sehingga:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (6.6)$$

secara hampiran merupakan peubah normal baku.

Contoh 6.3

Komponen yang dibuat oleh pabrik A(1) mempunyai rataan umur 6,5 tahun dengan simpangan baku 0,9 tahun, sedangkan hasil pabrik B(2) mempunyai rataan umur 6,0 tahun dengan simpangan baku 0,8 tahun. Berapakah peluang bahwa sampel acak ukuran 36 komponen dari pabrik A(1) akan mempunyai rataan umur paling sedikit satu tahun lebih lama dari rataan umur sampel 49 komponen dari pabrik B(2)?

Jawab

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = 6,5 - 6,0$$

$$= 0,5$$

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{0,9^2}{36}+\frac{0,8^2}{49}}$$
$$= 0,189$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1,0$$

$$z_2 = \frac{1,0-0,5}{0,189}$$
$$= 2,646$$

$$P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 1,0\right) = P\left(Z > 2,646\right)$$
$$= 1 - P\left(Z < 2,646\right)$$
$$= 1 - 0,9959$$
$$= 0,0041$$

6.3 DISTRIBUSI KHI-KUADRAT

Distribusi Khi-Kuadrat adalah distribusi terkait sebuah variansi. Bila S^2 variansi sampel acak ukuran *n* diambil dari populasi normal dengan variansi σ^2 maka peubah acak adalah sebagai berikut.

$$\chi^2 = \frac{\left(n-1\right)S^2}{\sigma^2} \qquad (6.7)$$

Berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan $\upsilon = n - 1$

Contoh 6.3

Sebuah pabrik aki menjamin bahwa baterainya akan tahan rata-rata 3 tahun dengan simpangan baku 1 tahun. Bila lima baterainya tahan masing-masing 1,9; 2,4; 3,0; 3,5; dan 4,2 tahun, apakah pembuatnya masih yakin bahwa simpangan baku aki tersebut 1 tahun?

Jawab

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)} \\ &= \frac{(5)(48,26)-(15)^2}{(5)(5-1)} \\ &= 0,815 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{(5-1)(0,815)}{1} \\ &= 3,26 \end{aligned}$$

$$P(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}) \qquad = 1-\alpha$$

$$\begin{aligned} P\left(\chi^2_{0,975} < \chi^2 < \chi^2_{0,025}\right) &= 1-0,5 \\ &= 0,95 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= n-1 \\ &= 5-1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$P\left(0,484 <^2 < 11,143\right) = 0,95$$

6.4 DISTRIBUSI T

Distribusi t digunakan jika distribusi rataan sampel tidak memenuhi ketentuan yang ada di awal bab ini terkait ukuran sampel dan informasi mengenai variansi populasi. Hal ini mengingat bahwa:

a. jarang sekali variansi populasi yang ingin di sampel secara acak diketahui;

b. bila $n \geq 30$, S^2 dapat ditaksir dengan σ^2;

c. nilai $n < 30$, nilai S^2 berubah cukup besar dari sampel ke sampel dan distribusi peubah acak berikut:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

tidak lagi berdistribusi normal baku, tetapi berdistribusi *t:*

$$T = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \qquad (6.8)$$

$$T = \frac{\frac{(\overline{X}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}} \qquad (6.9)$$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} \qquad (6.10)$$

di mana:

$$Z \quad = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

dan

$$V \quad = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

Misalkan Z peubah acak normal baku dan V peubah acak khi-kuadrat dengan derajat kebebasan.

Bila Z dan V bebas maka distribusi peubah acak T jika:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\upsilon}}} \qquad (6.11)$$

diberikan oleh:

$$h(t) = \frac{\Gamma\left[\frac{(\upsilon+1)}{2}\right]}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)\sqrt{\pi\upsilon}}\left(1+\frac{t^2}{\upsilon}\right)^{\frac{-(\upsilon+1)}{2}}, -\infty < t < \infty \qquad (6.12)$$

Ini dikenal dengan nama distribusi t dengan derajat kebebasan $\upsilon = n - 1$

Contoh 6.4

Sebuah pabrik komponen yakin bahwa komponennya akan berfungsi selama 500 jam. Untuk mempertahankan nilai tersebut, tiap bulan diuji 25 komponen. Bila nilai t yang dihitung terletak antara $-t_{0,05}$ dan $t_{0,05}$ maka pengusaha pabrik tadi akan mempertahankan keyakinannya. Kesimpulan apa yang seharusnya diambil dari sampel dengan rataan 518 jam dan simpangan baku 40 jam? Anggap bahwa distribusi waktu berfungsinya komponen, secara hampiran, normal.

Jawab

$t_{0,05}$ = 1,711 untuk derajat kebebasan 24 (lihat lampiran tabel 5). Jadi, pengusaha akan puas dengan keyakinannya bila sampel memberikan t antara −1,711 dan 1,711. Bila memang $\mu = 500$ maka:

$$t = \frac{518 - 500}{\frac{40}{\sqrt{25}}}$$
$$= 2,25$$

Suatu nilai yang cukup jauh di atas 1,711, peluang mendapat $t \geq 2,25$ sekitar 0,02. Bila $\mu > 500$, nilai t sampel akan lebih wajar. Jadi, pengusaha tersebut dapat menyimpulkan bahwa produksinya lebih baik dari yang diduga semula.

6.5 DISTRIBUSI *F*

Distribusi F adalah distribusi terkait rasio dua buah variansi. Misalkan U dan V adalah dua peubah acak bebas masing-masing berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan. Distribusi peubah acak tersebut diberikan oleh persamaan berikut.

$$F = \frac{\frac{U}{\upsilon_1}}{\frac{V}{\upsilon_2}} = 0 \text{ untuk } f \text{ lainnya.} \qquad (6.13)$$

$$h(f)=\frac{\Gamma\left[\frac{(\upsilon_1+\upsilon_2)}{2}\right]\left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\frac{\upsilon}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\upsilon_2}{2}\right)}\frac{f^{\frac{\upsilon_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{\upsilon_1 f}{\upsilon_2}\right)^{\frac{(\upsilon_1+\upsilon_2)}{2}}},0<f<\infty \qquad (6.14)$$

ini dikenal dengan nama Distribusi *F* dengan DK $\upsilon_1 = n_1 - 1$

6.5.1 Nilai Tabel Distribusi F

Nilai Tabel Distribusi F meliputi berbagai hal berikut.

a. Tabel di lampiran hanya menyediakan nilai F untuk α = 0,01 dan α = 0,05.

b. Bila $f_\alpha(\upsilon_1, \upsilon_2)$ menyatakan f_α dengan derajat kebebasan υ_1 dan υ_2, maka:

$$f_{1-\alpha}(\upsilon_1,\upsilon_2)=\frac{1}{f_\alpha(\upsilon_2,\upsilon_1)}$$

c. Contoh:

$$f_{0,95}(6,10)=\frac{1}{f_{0,05}(10,6)}$$

$$=\frac{1}{4,06}$$

$$=0,246 \quad \upsilon_1=n_1-1$$

$$F=\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$$

$$=\frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}$$

Bila S_1^2 dan S_2^2 variansi sampel acak ukuran n_1 dan n_1 yang diambil dari dua populasi normal, masing-masing dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2, maka berdistribusi *F* dengan derajat kebebasan $\upsilon_1 = n_1 - 1$ dan $\upsilon_2 = n_2 - 1$.

BAB 7

TEORI PENAKSIRAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL:

Bab ini akan mempelajari teknik statistika inferensial pertama, yaitu penyusunan selang kepercayaan baik untuk sebuah rataan, selisih dua rataan, rataan selisih, sebuah variansi, rasio dua buah variansi, serta sebuah proporsi dan selisih dua buah proporsi.

Dalam statistika, **penaksiran** adalah upaya untuk memperkirakan nilai parameter populasi berdasarkan informasi dari sampel. **Teori penaksiran** adalah teori yang mendasari penyusunan selang kepercayaan.

7.1 METODE PENAKSIRAN KLASIK

Metode penaksiran klasik meliputi berbagai hal berikut.

a. Taksiran parameter populasi dapat diberikan berupa taksiran titik atau berupa taksiran selang.

b. Taksiran titik suatu parameter populasi adalah nilai tunggal dari statistik bersangkutan. Sebagai contoh, nilai statistik mean yang dihitung dari sampel ukuran n, merupakan taksiran titik parameter populasi μ.

7.1.1 Metode Penaksiran Klasik

a. **Penaksir** atau **fungsi keputusan** adalah statistik yang digunakan untuk mendapatkan taksiran titik.

b. **Ruang tindakan** atau **ruang keputusan** adalah himpunan semua tindakan yang mungkin yang dapat dilaksanakan dalam masalah penaksiran.

c. Tidak dapat diharapkan suatu penaksir akan menaksir parameter populasi tanpa kesalahan.

d. Sebagai contoh, untuk menaksir μ mungkin dapat digunakan mean atau median sampel.

e. Misalnya, sebuah sampel yang terdiri dari nilai 1, 5, 12 diambil dari sebuah populasi dengan μ=4. Sampel ini akan menghasilkan mean 6 dan median 5. Dalam hal ini median menaksir μ secara lebih tepat. Bila sampel lain menghasilkan nilai 1, 6, 8 maka mean (5) menaksir μ secara lebih tepat dibandingkan median (6).

7.1.2 Penaksir Tak Bias & Efisien

a. Suatu penaksir dikatakan tak bias bila distribusi sampelnya mempunyai rataan yang sama dengan parameter yang ditaksir.

b. Dari semua penaksir yang mungkin dibuat, penaksir yang memberikan variansi terkecil disebut **penaksir yang paling efisien**.

7.1.3 Ketepatan Taksiran

a. Bila ukuran sampel membesar, variansi dari mean sampel mengecil sehingga selang lebih pendek dan ketepatan taksiran titik meningkat.

b. Sebaliknya, bila panjang selang ditingkatkan kemungkinan bahwa selang tersebut mengandung μ makin besar.

c. Idealnya lebih disenangi selang yang pendek dengan derajat kepercayaan yang tinggi.

7.1.4 Menaksir Rataan

Peluang parameter Z terletak di antara batas bawah $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ dan $z_{\frac{\alpha}{2}}$ dapat dituliskan sebagai pertidaksamaan 7.1.

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \qquad (7.1)$$

sedangkan:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

maka:

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \qquad (7.2)$$

sehingga:

$$P(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + < z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \qquad (7.3)$$

7.2 SELANG KEPERCAYAAN

7.2.1 Selang Kepercayaan untuk μ Bila σ Diketahui

Selang kepercayaan adalah sebuah rentang yang memuat nilai sebuah parameter populasi di antara batas bawah dan batas atasnya. μ adalah mean populasi, sementara σ adalah simpangan baku populasi. Selang kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ untuk μ, yaitu:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + < z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (7.4)$$

dengan x menyatakan rataan sampel ukuran n dari populasi dengan variansi σ^2 yang diketahui dan $z_{\frac{\alpha}{2}}$ menyatakan nilai distribusi normal baku sehingga daerah di sebelah kanannya mempunyai luas $\frac{\alpha}{2}$. σ dapat diganti dengan s bila $n \geq 30$.

Contoh 7.1

Jika digunakan nilai rentang 0 sampai dengan 4 rataan dan simpangan baku nilai fisika sampel acak 36 mahasiswa, masing-masing 2,6 dan 0,3. Hitunglah selang kepercayaan 95% dan 99% untuk rataan nilai fisika semua!

Jawab

Selang kepercayaan 95%

$$2{,}6-(1{,}96)\left(\frac{0{,}3}{\sqrt{36}}\right)<\mu<2{,}6+(1{,}96)\left(\frac{0{,}3}{\sqrt{36}}\right)$$

$$2{,}50 < \mu < 2{,}70$$

Selang kepercayaan 99%

$$2{,}6-(2{,}575)\left(\frac{0{,}3}{\sqrt{36}}\right)<\mu<2{,}6+(2{,}575)\left(\frac{0{,}3}{\sqrt{36}}\right)$$

$$2{,}47 < \mu < 2{,}73$$

7.2.2 Galat Versus Jumlah Sampel (Toerema 7.1.)

Galat adalah selisih antara nilai paramater populasi yang ditaksir dengan batas atas dan batas bawah selang kepercayaan. Bila mean sampel digunakan untuk menaksir μ, dapat dipercaya (1-α)100% bahwa galatnya akan lebih kecil dari suatu bilangan *g* yang ditetapkan sebelumnya asal saja ukuran sampel.

$$n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{g}\right)^2 \qquad (7.5)$$

Bila variansi populasi tidak diketahui, dapat diambil sampel pendahuluan ukuran ≥30 dan dari sini variansi populasi ditaksir. Kemudian dengan menggunakan Teorema 7.1., ditentukan dengan cara hampiran besarnya sampel yang diperlukan agar memenuhi derajat ketepatan yang diinginkan.

Contoh 7.2

a. Berapa besar sampel yang diperlukan untuk Contoh 7.1, bila ingin percaya 95% bahwa galat taksiran untuk μ < 0,05?

b. s=0,3 yang diperoleh dari sampel pendahuluan ukuran 36 digunakan untuk menaksir σ.

Jawab

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{g} \right)^2 = \left(\frac{1,96.0,3}{0,05} \right)^2 = 138,3$$

Dengan demikian diperlukan sampel lebih besar dari 138,3 mahasiswa atau 139 mahasiswa.

7.2.3 Selang Kepercayaan untuk *μ* Bila σ Tidak Diketahui, *n* < 30

Selang kepercayaan (1 - α)100% untuk μ, yaitu:

$$\overline{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + < t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (7.6)$$

bila x dan s masing-masing menyatakan rataan dan simpangan baku sampel ukuran n < 30 diambil dari populasi yang hampir normal, dan $t_{\frac{\alpha}{2}}$ menyatakan nilai dari distribusi t, dengan derajat kebebasan $v = n$-1, sehingga daerah disebelah kanannya seluas $\frac{\alpha}{2}$.

Contoh 7.3

Tujuh botol yang mirip masing-masing berisi oli 9,8; 10,2; 10,4; 9,8; 10,0; 10,2; dan 9,6 liter. Carilah selang kepercayaan 95% untuk rataan isi botol semacam itu, bila distribusinya dianggap hampir normal!

Jawab

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = 10,0$$

$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$$

$$= 0{,}008$$

Sehingga:

$$s = \sqrt{0,08}$$

$$= 0{,}283$$

maka selang kepercayaan 95% dari isi botol oli dalam liter, yaitu:

$$10,0-(2,477)\left(\frac{0,283}{\sqrt{7}}\right) < \mu < 10,0+(2,477)\left(\frac{0,283}{\sqrt{7}}\right)$$

$$9,74 < \mu < 10,26$$

7.2.4 Selang Kepercayaan untuk μ_1 - μ_2 Bila σ_1^2 dan σ_2^2 Diketahui

Selang kepercayaan (1-α)100% untuk μ_1- μ_2 diberikan oleh persamaan berikut.

$$\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad (7.7)$$

x_1 dan x_2 menyatakan rataan sampel acak bebas ukuran n_1 dan n_2 dari populasi yang masing-masing variansinya σ_1^2 dan σ_2^2 dan $z_{\frac{\alpha}{2}}$ adalah nilai kurva normal baku, sehingga daerah di sebelah kanannya mempunyai luas $\frac{\alpha}{2}$.

a. Derajat kepercayaan tepat bila sampel berasal dari populasi normal.

b. Bila tidak normal, selang kepercayaan harus dihampiri dan hampiran ini akan cukup baik bila n_1 dan n_2 melebihi 30.

c. Bila σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui dan ukuran sampelnya cukup besar, σ_1^2 dapat diganti dengan s_1^2 dan σ_2^2 dengan s_2^2 tanpa pengaruh berarti pada selang kepercayaan.

Contoh 7.4

Ujian bahasa yang telah dibakukan diberikan pada 50 siswi dan 76 siswa. Nilai rata-rata siswi 76 dengan simpangan baku 6, sedangkan nilai rata-rata siswa 82 dengan simpangan baku 8. Carilah selang kepercayaan 96% untuk selisih μ_1- μ_2, bila μ_1 menyatakan rataan nilai semua siswa dan μ_2 rataan nilai semua siswi yang mungkin akan mengikuti ujian ini!

Jawab

Diketahui:

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 82 - 76 = 6 \qquad \sigma_1 \cong s_1 = 8 \qquad \sigma_2 \cong s_2 = 6$$

Nilai α adalah:

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 0,04$$

maka, $\dfrac{\alpha}{2} = 0,02$

sehingga nilai $z_{0,02} = 2,054$

selang kepercayaan:

$$\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$6 - 2,054\sqrt{\frac{8^2}{75} + \frac{6^2}{50}} < \mu_1 - \mu_2 < 6 + 2,054\sqrt{\frac{8^2}{75} + \frac{6^2}{50}}$$

$$3,42 < \mu_1 - \mu_2 < 8,58$$

7.2.5 Selang Kepercayaan Sampel Kecil untuk $\mu_1 - \mu_2$ bila $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, tetapi tidak diketahui atau $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, tetapi $\nu_1 = \nu_2$

Selang kepercayaan (1-α)100% untuk μ_1- μ_2 diberikan oleh persamaan berikut.

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \quad (7.8)$$

x_1 dan x_2 menyatakan rataan sampel ukuran kecil dan bebas satu dari yang lain. Masing-masing berukuran n_1 dan n_2 dan berasal dari populasi yang distribusinya hampir normal. s_p menyatakan simpangan baku gabungan dan $t_{\frac{\alpha}{2}}$ menyatakan nilai pada distribusi t dengan derajat kebebasan sebagai berikut.

$$v = n_1 + n_2 - 2 \quad (7.9)$$

sehingga luas di sebelah kanannya $\frac{\alpha}{2}$.

Contoh 7.5

Sekelompok proses laboratorium ingin membandingkan pengaruh 2 zat aditif pada hasil reaksi. Aditif 1 digunakan pada 12 sampel dan aditif 2 digunakan 10 sampel dengan 10 angkatan. Sampel ke-1 memberikan rata-rata hasil 85 dengan simpangan baku 4. Sampel ke-2 memberikan rata-rata 81 dengan simpangan baku 5. Carilah selang kepercayaan 90% untuk selisih kedua rataan populasi bila dianggap kedua populasi berdistribusi hampir normal dengan variansi yang sama!

Jawab

Hitung nilai $\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right)$

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 85 - 81 = 4$$

Selanjutnya nilai s_p didapatkan dari:

$$s_p^2 = \frac{\left(n_1 - 1\right)s_2^2 + \left(n_2 - 1\right)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \qquad (7.10)$$

$$= \frac{\left(12 - 1\right)4^2 + \left(10 - 1\right)5^2}{12 + 10 - 2}$$

$$= 20,05$$

maka $s_p = \sqrt{20,05} = 4,478$

selanjutnya nilai v didapatkan dari:

$$v = n_1 + n_2 - 2$$

$$= 20$$

nilai α adalah:

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1$$

maka, $\frac{\alpha}{2} = 0,05$

sehingga nilai $t_{0,05;20} = 1,725$

dengan demikian selang kepercayaan adalah:

$$\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) - t_{\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) - t_{\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$4-(1{,}725)(4{,}478\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}} < \mu_1-\mu_2 < 4+(1{,}725)(4{,}478\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}}$$

$$0{,}69 < \mu_1-\mu_2 < 7{,}31$$

7.2.6 Selang Kepercayaan Sampel Kecil untuk $\mu_1 - \mu_2$ bila $\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2$ dan tidak diketahui

Selang kepercayaan (1-α)100% untuk $\mu_1 - \mu_2$ diberikan oleh persamaan berikut.

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)-t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < \left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)+t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} \quad (7.11)$$

x_1 dan $s_1{}^2$, x_2 dan $s_2{}^2$ menyatakan rataan dan variansi sampel kecil bebas berukuran. n_1 dan n_2 diambil dari distribusi normal hampiran dan $t_{\frac{\alpha}{2}}$ nilai distribusi t dengan derajat kebebasan sebagai berikut.

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_1}\right)^2}{(n_2-1)}} \quad (7.12)$$

sehingga luas di sebelah kanannya $\frac{\alpha}{2}$.

Contoh 7.6

Catatan selama 15 tahun terakhir menunjukkan bahwa rata-rata curah hujan di suatu daerah selama bulan April sebesar 4,93 cm dengan simpangan baku 1,14 cm. Di daerah lain, rata-rata curah hujan selama bulan April sebesar 2,64 cm dengan simpangan baku 0,66 cm selama 10 tahun terakhir. Carilah selang kepercayaan 95% untuk selisih rataan sesungguhnya curah hujan bulan April di kedua daerah (anggap bahwa pengamatan berasal dari populasi normal dengan variansi berbeda)!

Jawab

Hitung nilai $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 4,93 - 2,64 = 2,29$$

kemudian nilai ***v*** adalah:

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1 - 1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_1}\right)^2}{(n_2 - 1)}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1,14^2}{15} + \frac{0,66^2}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{1,14^2}{15}\right)^2}{(15-1)} + \frac{\left(\frac{0,66^2}{10}\right)^2}{(10-1)}}$$

$$v = 2,27 \cong 23$$

selanjutnya hitung nilai α :

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05$$

maka, $\frac{\alpha}{2} = 0,025$

sehingga nilai $t_{0,02;23} = 2,069$

dengan demikian selang kepercayaan adalah:

$$2,29 - 2,069\sqrt{\frac{1,14^2}{15} + \frac{0,66^2}{10}} < \mu_1 - \mu_2 < 2,29 + 2,069\sqrt{\frac{1,14^2}{15} + \frac{0,66^2}{10}}$$

$$2,02 < \mu_1 - \mu_2 < 2,56$$

7.2.7 Selang Kepercayaan untuk $\mu_1 - \mu_2 = \mu_D$ untuk Pengamatan Pasangan

Selang kepercayaan (1-α)100% untuk μ_D diberikan oleh persamaan berikut.

$$\overline{d} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_D < \overline{d} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_d}{\sqrt{n}} \qquad (7.13)$$

d dan s_d menyatakan rataan dan simpangan baku selisih n pasangan pengukuran dan $t_{\frac{\alpha}{2}}$ nilai distribusi *t*, dengan derajat kebebasannya sebagai berikut.

$$\upsilon = n_1 + n_2 - 2 \qquad (7.14)$$

sehingga luas di sebelah kanannya $\frac{\alpha}{2}$.

Contoh 7.7

Dua puluh mahasiswa tahun pertama dibagi menjadi 10 pasangan. Tiap orang dalam pasangan mempunyai IQ yang hampir sama. Seorang dari tiap pasangan dipilih secara acak dan dimasukkan ke dalam kelompok yang diberi pelajaran matematika dengan modul, tanpa kuliah. Anggota lainnya masuk kelompok yang diwajibkan mengikuti kuliah seperti biasa. Pada akhir semester tiap kelompok diberi ujian yang sama dan nilai mereka seperti pada tabel. Cari selang kepercayaan 98% untuk selisih sesungguhnya rata-rata nilai kedua cara belajar!

Pasangan	**Pelajaran Bermodul**	**Kuliah**	**d**
1	76	81	-5
2	60	52	8
3	85	87	-2
4	58	70	-12
5	91	86	5
6	75	77	-2
7	82	90	-8
8	64	63	1
9	79	85	-6
10	88	83	5

Jawab

Hitung nilai *s*:

$$s_d^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} d_1^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2}{n\left(n-1\right)}$$

$$= \frac{(10)(392)-(-16)^2}{10\ \ 10-1} = 40,7$$

sehingga $s_d = \sqrt{40,7} = 6,38$

Hitung nilai υ:

$$\upsilon = n-1$$
$$= 10-1$$
$$= 9$$

Selanjutnya hitung nilai α:

$$1-\alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02$$

maka, $\frac{\alpha}{2} = 0{,}01$

sehingga nilai $t_{0{,}01;9} = 2{,}821$

dengan demikian selang kepercayaan adalah:

$$\bar{d} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

$$-1{,}6 - (2{,}821)\left(\frac{6{,}38}{\sqrt{10}}\right) < \mu_D < -1{,}6 + (2{,}821)\left(\frac{6{,}38}{\sqrt{10}}\right)$$

$-7{,}29 < \mu_D < 4{,}09$ (memuat 0: tidak dapat disimpulkan)

7.2.8 Selang Kepercayaan untuk *p*

Bila n ≥ 30, selang kepercayaan untuk parameter binomial *p*, secara hampiran, diberikan oleh persamaan berikut.

$$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \qquad (7.15)$$

$\hat{p}$ menyatakan proporsi sukses dalam sampel acak ukuran *n*, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, dan $z_{\frac{\alpha}{2}}$ menyatakan nilai kurva normal baku sehingga luas di sebelah kanannya $\frac{\alpha}{2}$

Contoh 7.8

Dalam suatu sampel acak $n = 500$ keluarga yang memiliki komputer di sebuah kota, ditemukan bahwa $x = 340$ memiliki komputer berwujud komputer jinjing. Carilah selang kepercayaan 95% untuk proporsi sesungguhnya dari keluarga yang memiliki komputer jinjing di kota tersebut!

Jawab

Hitung nilai $\hat{p}$:

$$\hat{p} = \frac{340}{500}$$

$$= 0,68$$

sehingga:

$$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$0,68 - 1,96\sqrt{\frac{(0,68)(0,32}{500}} < p < 0,68 + 1,96\sqrt{\frac{(0,68)(0,32}{500}}$$

$$0,64 < p < 0,72$$

7.2.9 Galat Vs. Jumlah Sampel (Teorema 7.2)

Bila $\hat{p}$ dipakai sebagai taksiran p, dengan kepercayaan (1 - α)100% galat akan lebih kecil dari besaran tertentu g bila ukuran sampel sebagai berikut.

$$n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{p}\hat{q}}{g} \qquad (7.16)$$

7.2.10 Galat Vs. Jumlah Sampel (Teorema 7.3)

Bila $\hat{p}$ dipakai sebagai taksiran p, dengan kepercayaan *paling sedikit* (1-α)100% galat akan lebih kecil dari besaran tertentu g bila ukuran sampel sebagai berikut.

$$n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{4g^2} \tag{7.17}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \hat{p}\hat{q} &= \hat{p}(1-\hat{p}) \\ &= -(\hat{p}^2 - \hat{p}) \\ &= \frac{1}{4} - (\hat{p}^2 - \hat{p} + \frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{4} - (\hat{p}^2 - \frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Contoh 7.9

Berapa besaran diperlukan sampel pada contoh 6.9 agar (1) taksiran p meleset kurang dari 0,02 dengan kepercayaan 95%, dan (2) paling sedikit dengan kepercayaan 95%?

Jawab

(1) $$n = \frac{(1,96)^2 (0,32)(0,68)}{(0,02)^2} = 2090$$

(2) $$n = \frac{(1,96)^2}{4(0,02)^2} = 2401$$

7.2.11 Selang Kepercayaan untuk $\boldsymbol{p}_1$- $\boldsymbol{p}_2$

Bila n_1 dan n_2 $\geq$30, selang kepercayaan (1-α)100% untuk selisih 2 parameter binomial, p_1- p_2 secara hampiran diberikan oleh persamaan berikut.

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}<p_1-p_2<(\hat{p}_1-\hat{p}_2)+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} \quad (7.18)$$

Bila $\hat{p}_1$ dan $\hat{p}_2$ masing-masing menyatakan proporsi sukses dalam sampel acak ukuran n_1 dan n_2, $\hat{q}_1=1-\hat{p}_1$ dan $\hat{q}_2=1-\hat{p}_2$, dan $z_{\frac{\alpha}{2}}$ nilai kurva normal baku sehingga luas di sebelah kanannya $\frac{\alpha}{2}$.

Contoh 7.10

Suatu perubahan dalam cara pembuatan komponen direncanakan. Sampel diambil dari cara lama maupun yang baru untuk melihat apakah cara baru tersebut memberikan perbaikan. Bila 75 dari 1.500 komponen yang berasal dari cara lama, ternyata cacat dan 80 dari 2.000 yang berasal dari cara baru ternyata cacat. Carilah selang kepercayaan 90% untuk selisih sesungguhnya proporsi yang cacat dalam kedua cara!

Jawab

Hitung $\hat{p}_1$ dan $\hat{p}_2$:

$$\hat{p}_1=\frac{75}{1500}=0,05$$

$$\hat{p}_2=\frac{80}{2000}=0,04$$

sehingga:

$$\begin{aligned}\hat{p}_1-\hat{p}_2&=0,05-0,04\\&=0,01\end{aligned}$$

kemudian hitung nilai $z_{\frac{\alpha}{2}}$:

$$1-\alpha=0,90$$

maka:

$$\rightarrow \alpha=0,1$$

$$\rightarrow \frac{\alpha}{2}=0,05$$

$$\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1,645$$

selang kepercayaan adalah:

$$\hat{p}_1-\hat{p}_2\ \ -z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}<p_1-p_2<\ \hat{p}_1-\hat{p}_2\ \ +z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

$$0,01-1,645\sqrt{\frac{(0,05)(0,95)}{1500}+\frac{(0,04)(0,96)}{2000}}$$

$$<p_1-p_2<0,01+1,645\sqrt{\frac{0,05\quad 0,95}{1500}+\frac{0,04\quad 0,96}{2000}}$$

$$-0,0017<p_1-p_2<0,0217$$

7.2.12 Selang Kepercayaan untuk σ^2

Selang kepercayaan (1 - α)100% untuk variansi σ^2 suatu populasi normal diberikan oleh persamaan berikut

$$\frac{n-1\ \ s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}<\sigma^2<\frac{n-1\ \ s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \qquad (7.19)$$

s^2 menyatakan variansi sampel ukuran n, dan $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ dan $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ menyatakan nilai distribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan $\upsilon=n-1$, sehingga luas di sebelah kanannya, masing-masing, sebesar $\frac{\alpha}{2}$ dan $1-\frac{\alpha}{2}$.

Contoh 7.11

Data berikut menyatakan berat, dalam gram, 10 bungkus obat yang dipasarkan oleh suatu perusahaan: 46,4; 46,1; 45,8; 47,0; 46,1; 45,9; 45,8; 46,9; 45,2 dan 46,0. Carilah selang kepercayaan 95% untuk variansi semua obat bungkusan bibit yang dipasarkan perusahaan tersebut!

Jawab

Hitung s^2:

$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{10 \quad 21273,12 \ - \ 461,2^{\ 2}}{10 \quad 10-1}$$

$$= 0,286$$

Hitung nilai $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ dan $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$:

$$1-\alpha = 0,95;$$
$$\upsilon = n-1$$
$$\upsilon = 10-1$$
$$\upsilon = 9$$

maka :

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2};9} = 19,023$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};9} = 2,7$$

selang kepercayaan adalah:

$$\frac{n-1 \ \ s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{n-1 \ \ s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\frac{(10-1)0,286}{19,023} < \sigma^2 < \frac{(10-1)0,286}{2,7}$$

$$0,135 < \sigma^2 < 0,953$$

7.2.13 Selang Kepercayaan untuk $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

Selang kepercayaan (1 - α)100% untuk nisbah $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ diberikan oleh persamaan berikut.

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(\upsilon_1,\upsilon_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\frac{\alpha}{2}}(\upsilon_2,\upsilon_1) \qquad (7.20)$$

$s_1{}^2$ dan $s_2{}^2$ menyatakan variansi sampel bebas masing-masing berukuran n_1 dan n_2, diambil dari 2 populasi normal, $f_{\frac{\alpha}{2}}$ υ_1, υ_2 menyatakan nilai distribusi F, dengan derajat kebebasan $\upsilon_1 = n_1 - 1$ dan $\upsilon_2 = n_2 - 1$, sehingga luas di sebelah kanannya $\frac{\alpha}{2}$ dan $f_{\frac{\alpha}{2}}$ υ_2, υ_1 menyatakan nilai *f* yang sama, dengan derajat kebebasan $\upsilon_1 = n_1 - 1$ dan $\upsilon_2 = n_2 - 1$.

Contoh 7.12 (Dikutip dari Walpole dan Myers, 1988)

Suatu ujian masuk yang telah dibakukan dalam matematika diberikan kepada 25 siswa dan 16 siswi. Siswa pria mendapat nilai rata-rata 82 dengan simpangan baku 8, sementara perempuan mendapat nilai rata-rata 78 dengan simpangan baku 7. Hitunglah selang kepercayaan 98% untuk $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ dan $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ bila $\sigma_1{}^2$ dan $\sigma_2{}^2$ masing-masing menyatakan variansi populasi nilai pria dan perempuan, yang telah atau yang akan mengambil ujian tersebut!

Jawab

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}\left(\upsilon_1,\upsilon_2\right)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\frac{\alpha}{2}}\left(\upsilon_1,\upsilon_2\right)$$

$$\frac{64}{49}\left(\frac{1}{3,29}\right) < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{64}{49}(2,89)$$

$$0,397 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3,775$$

$$0,630 < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1,943$$

7.3 SOAL-SOAL

Soal 7.1

Sebuah perusahaan bus ingin menentukan apakah membeli ban merek A atau merek B untuk armada busnya. Untuk menaksir perbedaan kedua merek, dilakukan suatu percobaan menggunakan 11 dari setiap merek. Ban dipakai sampai aus. Hasil merek $A : x_1 =$ 36.000 km, $s_1 = 5.000$ km; merek $B : x_2 = 38.000$ km, $s_2 = 6.000$ km.

a. Hitunglah selang kepercayaan 95% untuk $\mu_1 - \mu_2$, anggap kedua populasi berdistribusi hampir normal!

b. Buatlah selang kepercayaan 98% untuk $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$!

Soal 7.2

Suatu perusahaan angkutan umum ingin menentukan apakah membeli ban merek A atau merek B untuk armadanya. Untuk menaksir perbedaan kedua merek dilakukan percobaan menggunakan 14 ban dari tiap merek. Ban dipakai sampai aus. Mean dan simpangan baku sampel A masing-masing 36.000 km dan 5.000 km. Mean dan simpangan baku sampel B masing-masing 38.000 km dan 6.100 km.

a. Buatlah selang kepercayaan 95% untuk μ_A - μ_B!

b. Berdasarkan jawaban no. a, ban merek apakah yang sebaiknya dibeli? Jelaskan dengan singkat!

c. Buatlah selang kepercayaan 98% rasio varians keawetan ban A dan ban B! Apakah hasilnya menguatkan asumsi yang anda ambil saat mengerjakan soal no. a ? Jelaskan!

Soal 7.3

Pengambilan masing-masing 15 sampel waktu tempuh dari A ke B melalui Rute 1 dan Rute 2 menghasilkan nilai mean dan simpangan baku sebagai berikut.

a. Mean waktu tempuh Rute 1 = 50 menit.

b. Mean waktu tempuh Rute 2 = 45 menit.

c. Simpangan waktu tempuh Rute 1 = 10 menit.

d. Simpangan waktu tempuh Rute 2 = 5 menit.

Pertanyaan:

a. Buatlah selang kepercayaan 99% selisih waktu tempuh kedua rute.

b. Berdasarkan jawaban nomor a, apakah Anda dapat menyatakan bahwa waktu tempuh kedua rute berbeda secara berarti? Jelaskan secara singkat!

Soal 7.4

Terhadap empat sampel tanah dilakukan pengujian nilai CBR. Sebelum diuji, tiap sampel tanah dibagi menjadi dua bagian, yaitu satu bagian diberi bahan stabilisasi, sedangkan satu bagian lagi tidak diberi bahan stabilisasi. Berikut ini hasil pengujian CBR tersebut:

Perlakuan terhadap Sampel	Nilai CBR			
Dengan Bahan Stabilisasi	7	8	11	12
Tanpa Bahan Stabilisasi	4	6	11	11

a. Bila distribusi nilai CBR hampir normal, buatlah selang kepercayaan 95% untuk rataan selisih hasil kedua perlakuan! Lakukanlah analisis secara berpasangan!

b. Berdasarkan jawaban nomor a, dapatkah disimpulkan bahwa bahan stabilisasi dapat meningkatkan nilai CBR tanah? Jelaskan dengan singkat!

Soal 7.5

Sebuah perusahaan listrik yang membuat komponen berumur panjang, berdistribusi hampir normal dengan simpangan baku 30 jam. Bila sampel 30 komponen berumur rata-rata 790 jam, hitunglah selang kepercayaan 98% untuk rataan populasi bola lampu yang dihasilkan perusahaan tersebut.

Soal 7.6

Sebuah mesin minuman diatur sedemikian rupa sehingga banyaknya minuman yang dikeluarkannya berdistribusi hampir normal dengan simpangan baku 2 desiliter.

a. Hitunglah selang kepercayaan 96% untuk rataan semua minuman yang dikeluarkan mesin tersebut bila sampel acak 32 cangkir minuman berisi rata-rata 24 desiliter.

b. Berapa besarkah sampel diperlukan pada bila diinginkan kepercayaan 96% agar rataan sampel paling banyak meleset 9 jam dari rataan sesungguhnya?

Soal 7.7

Tinggi sampel acak 50 mahasiswa rata-rata 175 cm dengan simpangan baku 7 cm.

a. Buatlah selang kepercayaan 95% untuk rataan tinggi semua mahasiswa.

b. Apakah yang dapat dikatakan tentang kemungkinan besarnya galat dengan kepercayaan 95% bila ditaksir rataan tinggi semua mahasiswa 175 cm?

c. Berapa besarkah sampel diperlukan pada soal 3 bila diinginkan kepercayaan 94% agar rataan sampel paling banyak meleset 1 desiliter dari rataan sesungguhnya?

Soal 7.8

Sebuah mesin menghasilkan potongan logam berbentuk silinder. Sampel beberapa potongan diukur dan ternyata diameternya 1,02; 0,98; 1,04; 1,05; 0,98; 0,97; 0,98; 1,02; dan 1,02 cm.

a. Hitunglah selang kepercayaan 90% untuk rataan diameter potongan yang dihasilkan mesin tersebut bila dimisalkan distribusinya hampir normal!

b. Buatlah selang kepercayaan 98% untuk σ^2!

Soal 7.9

Sampel acak yang berukuran 21 dari suatu distribusi normal mempunyai rataan $x = 33$ dengan simpangan baku $s = 4$.

a. Buatlah selang kepercayaan 95% untuk μ!

b. Buatlah selang kepercayaan 99% untuk σ!

Soal 7.10

Sampel acak berukuran $n_1 = 24$ diambil dari populasi normal dengan simpangan baku $\sigma_1 = 4$, dan rataan $x_1 = 81$. Sampel kedua berukuran $n_2 = 35$, diambil dari populasi normal lain dengan simpangan baku $\sigma_2 = 3$ dan rattan $x_2 = 76$. Buatlah selang kepercayaan 94% untuk $\mu_1 - \mu_{2.}$

Soal 7.11

Kekuatan dua jenis benang dibandingkan. Lima puluh potong dari tiap jenis diuji di bawah keadaan yang sama. Jenis A mempunyai rataan daya tahan 78 kg dengan simpangan baku 6 kg, sedangkan jenis B mempunyai rataan daya tahan 87 kg dengan simpangan baku 5 kg. Buatlah selang kepercayaan 95% untuk selisih kedua rataan populasi!

Soal 7.12

Sebuah penelitian bertujuan menentukan apakah cairan A mempunyai pengaruh terhadap banyaknya logam yang tersingkirkan jika logam itu direndam dalam cairan tersebut. Sebuah sampel acak 100 potong logam direndam selama 24 jam dalam cairan lain menghasilkan rata-rata 12 mm logam yang tersingkir dengan simpangan baku 1 mm. Sampel kedua dengan 200 potong logam yang sama direndam 24 jam dalam cairan A menyingkirkan rata-rata 9 mm logam dengan simpangan baku 1,1 mm. Hitunglah selang kepercayaan 98% untuk selisih kedua rataan populasi. Apakah cairan A menurunkan banyaknya logam yang tersingkir?

Soal 7.13

Diberikan dua sampel acak berukuran $n_1 = 8$ dan $n_2 = 15$ yang berasal dari dua populasi normal, dengan $x_1 = 63$, $x_2 = 58$, $s_1 = 7$ dan $s_2 = 6$.

a. Hitunglah selang kepercayaan 98% untuk $\mu_1 - \mu_2$ bila dimisalkan bahwa $\sigma_1 = \sigma_2$.

b. Buatlah selang kepercayaan 90% untuk $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Apakah beralasan menganggap bahwa $\sigma_1 = \sigma_2$?

Soal 7.14

Data berikut menyatakan waktu putar film yang diproduksi dua perusahaan film.

	Waktu (menit)						
Perusahaan A	102	93	111	88	99		
Perusahaan B	97	83	123	92	175	88	118

Pertanyaan:

a. Buatlah selang kepercayaan 90% waktu putar film!

b. Buatlah selang kepercayaan 98% untuk $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$!

Soal 7.15

Pemerintah memberikan dana ke jurusan Pertanian sembilan universitas untuk menguji kemampuan menghasilkan dua varietas padi. Tiap varietas ditanam di petak sawah yang sama luasnya di tiap universitas dan hasilnya, dalam kilogram per petak adalah sebagai berikut.

	Universitas								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Varietas A	37	24	36	42	45	28	36	30	37
Varietas B	45	25	31	38	50	33	36	40	43

Hitunglah selang kepercayaan 99% untuk rataan selisih hasil kedua jenis, anggap bahwa distribusi hasil hampir normal. Jelaskan mengapa kedua varietas perlu dibuat berpasangan dalam soal ini!

BAB 8

PENGUJIAN HIPOTESIS

TUJUAN INSTRUKSIONAL:

Bab ini mempelajari lanjutan teknik statistika inferensial, yaitu pengujian hipotesis untuk sebuah rataan, selisih dua rataan, rataan selisih, sebuah variansi, rasio dua buah variansi, sebuah proporsi, dan selisih dua buah proporsi.

8.1 HIPOTESIS STATISTIK

Hipotesis statistik meliputi berbagai hal berikut.

a. **Hipotesis statistik** adalah anggapan atau pernyataan yang mungkin benar atau tidak, mengenai satu populasi atau lebih.

b. Kebenaran atau ketidakbenaran hipotesis statistik tidak pernah diketahui dengan pasti, kecuali bila seluruh populasi diamati.

c. Mengamati seluruh populasi tidak praktis, jadi diambil sampel acak. Informasi dari sampel digunakan untuk mengambil keputusan.

d. Petunjuk dari sampel yang tidak sesuai dengan hipotesis menjurus ke penolakan hipotesis.

e. Petunjuk yang mendukung hipotesis menjurus ke penerimaannya.

f. Penerimaan hipotesis diakibatkan tidak cukupnya petunjuk untuk menolaknya dan tidak menunjukkan bahwa hipotesis itu benar.

Contoh

Sebuah uang logam yang dilemparkan 100 kali ingin diuji hipotesis, bahwa uang setangkup ($p = 0{,}5$):

a. bila 48 X muncul muka, wajar untuk $p = 0{,}5$ atau 0,45;

b. bila 35 X muncul muka terdapat petunjuk mendukung penolakan hipotesis karena $P(X \leq 35) = 0{,}002$, sehingga ada dua kemungkinan:

   1) suatu kejadian yang amat jarang muncul telah terjadi;

   2) tepat bila disimpulkan $p \neq 0{,}5$;

Catatan

a. Penolakan suatu hipotesis berarti menyimpulkan bahwa hipotesis tersebut tidak benar.

b. Penerimaan suatu hipotesis hanyalah menunjukkan bahwa tidak cukup petunjuk untuk memercayai sebaliknya.

c. Hipotesis yang dirumuskan dengan harapan ditolak disebut hipotesis nol, H_0.

d. Penolakan H_0 menjurus pada penerimaan suatu hipotesis tandingan H_1.

Contoh

a. $H_0: p = 0{,}5$

b. Hipotesis tandingan mungkin salah satu dari:
   1) $H_1: p = 0{,}9$
   2) $H_1: p > 0{,}5$
   3) $H_1: p < 0{,}5$
   4) $H_1: p \neq 0{,}5$

8.1.1 Galat Jenis I dan Jenis II (Contoh untuk Ilustrasi)

Galat jenis I adalah kekeliruan dengan menolak H_0 dan memercayai H_1 padahal sesungguhnya H_0 yang benar.

Galat jenis II adalah kekeliruan dengan menerima H_0 dan menolak H_1 padahal sesungguhnya H_0 yang salah.

Sejenis aditif material konstruksi diketahui hanya meningkatkan kekuatan untuk 25% material. Untuk menentukan apakah aditif baru dan aditif yang lebih mahal, lebih unggul dalam meningkatkan kekuatan material, 20 benda uji dibuat dan ditambahkan aditif baru tersebut. Bila 9 atau lebih dari benda uji yang menggunakan aditif baru meningkat kekuatannya, aditif baru itu akan dianggap lebih unggul daripada yang selama ini digunakan.

Pilihan 9 benda uji mungkin sedikit sembarang, tetapi cukup beralasan bila dibandingkan dengan hanya 5 dari 20 benda uji yang meningkat kekuatannya ($\frac{5}{20}$ = 0,25%).

$$H_0: p = \frac{1}{4}$$

$$H_1: p > \frac{1}{4}$$

Keputusan tersebut berdasarkan statistik X, yaitu banyaknya benda uji dalam sampel yang meningkat kekuatannya. Nilai yang mungkin dari 0 sampai 20, dibagi atas 2 kelompok, yaitu bilangan < 9 dan ≥ 9. Semua nilai yang mungkin dari kelompok pertama membentuk daerah penerimaan, sedangkan semua nilai yang mungkin dari kelompok ke dua membentuk daerah kritis. Bilangan yang memisahkan kedua daerah tersebut disebut nilai kritis. Bila statistik X jatuh di daerah kritis maka H_0 ditolak dan dianggap bahwa hipotesis tandingan H_1 yang benar. Bila X jatuh di daerah penerimaan maka H_0 diterima.

Cara pengambilan keputusan seperti yang baru dijelaskan mungkin membawa kita pada dua kesimpulan yang keliru. Misalnya aditif yang baru mungkin saja tidak lebih baik dari yang lama, karena untuk kelompok benda uji dengan aditif baru itu mungkin saja 9 atau lebih meningkat kekuatannya. Kita akan melakukan kekeliruan dengan menolak H_0 dan memercayai H_1 padahal sesungguhnya H_0 yang benar. Galat seperti ini disebut galat jenis I.

Galat jenis II dilakukan bila kurang dari 9 benda uji meningkat kekuatannya dan disimpulkan bahwa aditif baru itu tidaklah lebih baik dari yang lama padahal sesungguhnya lebih baik. Dalam hal ini H_0 akan diterima padahal salah. Ini disebut galat jenis II

8.2 PELUANG MELAKUKAN GALAT JENIS I

Peluang melakukan galat jenis I disebut **taraf nyata** *(significance level)* uji tersebut dan dinyatakan dengan α. Dalam contoh, galat jenis I akan terjadi bila 9 benda uji atau lebih meningkat kekuatannya dengan menggunakan aditif baru, padahal sesungguhnya aditif baru itu sama saja dengan aditif yang lama.

Bila X menyatakan banyaknya benda uji meningkat kekuatannya setelah diberi aditif baru.

$$\alpha = P\left(galat\ .\ jenis\ .I\right)$$

$$= P(X \geq 9 \mid p = \frac{1}{4})$$

$$= \sum_{x=9}^{20} b\left(x; 20; \frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{8} b\left(x; 20; \frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 - 0{,}9591$$

$$= 0{,}0409$$

Dikatakan bahwa hipotesis nol, $p = {}^{1}/_{4}$, diuji pada taraf keberartian (ukuran daerah kritis), α = 0,0409 yang amat kecil (kecil kemungkinan galat jenis I dilakukan). Artinya, amat tidak biasa bila ≥ 9 benda uji meningkat kekuatannya dengan menggunakan aditif baru, padahal aditif tersebut pada dasarnya tidak berbeda dengan aditif yang selama ini digunakan.

8.3 PELUANG MELAKUKAN GALAT JENIS II

Untuk menghitung peluang melakukan galat jenis II, β, harus ditetapkan H_1 secara khusus. Bila H_0: $p = {}^{1}/_{4}$ diuji lawan H_1: $p = {}^{1}/_{2}$, maka dapat dihitung peluang menerima H_0 bila H_0 salah. Untuk itu cukup dihitung peluang mendapat kurang dari 9 dalam kelompok 20 benda uji yang meningkat kekuatannya bila $p = {}^{1}/_{2}$. Dalam hal ini:

$$\beta = P\left(galat \cdot jenis \cdot II\right)$$

$$= P\left(X \langle 9 \middle| p = \frac{1}{2} \right)$$

$$= \sum_{x=0}^{8} b\left(x; 20; \frac{1}{2} \right)$$

= 0,2517

Peluang tersebut ternyata agak besar, menunjukkan tanda prosedur pengujian yang sedikit kurang bagus (jelek). Kemungkinan menolak aditif baru tersebut cukup besar, padahal sesungguhnya aditif baru itu lebih unggul dari yang selama ini dipakai.

β yang besar mungkin masih dapat diterima bila aditif yang lebih mahal itu keunggulannya tidak cukup berarti.

8.3.1 Menurunkan β dengan Megubah H$_1$

Bila H_1: p = 0,7, maka:

$$\beta = P(galat \cdot jenis \cdot II)$$

$$= P(X \langle 9 | p = 0,7)$$

$$= \sum_{x=0}^{8} b(x; 20; 0,7)$$

= 0,0051

Dengan β yang begitu kecil, sedikit sekali kemungkinan aditif baru tersebut ditolak, terutama bila 70% benda uji menunjukkan peningkatan kekuatan. Jadi, bila hipotesis tandingan p menuju 1, maka nilai β menuju 0.

8.3.2 Menurunkan β dengan Memperbesar Daerah Kritis

Misalkan daerah kritis diubah menjadi $X \geq 8$, sehingga:

$$\alpha = P(X \geq 8 \mid p = \frac{1}{4})$$

$$= \sum_{x=8}^{20} b\left(x; 20; \frac{1}{4} \right)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{8} b\left(x; 20; \frac{1}{4} \right)$$

$$= 1 - 0{,}8982$$

$$= 0{,}1018$$

$$\beta = P\left(X \langle 8 \middle| p = \frac{1}{2} \right)$$

$$= \sum_{x=0}^{7} b\left(x; 20; \frac{1}{2} \right)$$

$$= 0{,}1316$$

Hal ini menunjukkan bahwa bila β dikecilkan maka α akan membesar. Demikian pula sebaliknya. α dan β dapat diturunkan bersama-sama dengan memperbesar ukuran sampel.

8.3.3 Menurunkan *α* dan *β* dengan Memperbesar *n*

Bila $n = 100$ dan daerah kritis menjadi $X \geq 37$, maka:

$$\mu = np = (100)\left(\frac{1}{4} \right) = 25$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(100)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = 4,33$$

$$z = \frac{36,5-25}{4,33} = 2,656$$

sehingga:

$$\alpha = P\left(galat\ .jenis\ .I\right)$$

$$= P(X > 36,5 \mid p = \frac{1}{4})$$

$$= P(Z > 2,656)$$

$$= 1 - P(Z > 2,656)$$

$$= 1 - 0,9961$$

$$= 0,0039$$

Bila n = 100 dan daerah kritis menjadi $X \geq 37$, maka:

$$\mu = np = (100)\left(\frac{1}{2}\right) = 50$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(100)\left(\frac{1}{2}\right)(\frac{3}{2})} = 5$$

$$z = \frac{36,5-50}{5} = -2,7$$

sehingga:

$$\beta = P\left(galat\ .jenis\ .II\right)$$

$$= P(X > 36,5 \mid p = \frac{1}{2})$$

$$= P(Z > -2,7)$$

$$= 0,0035$$

Jadi, bila $n = 100$ galat jenis I & II sangat jarang terjadi.

Contoh Perhitungan Galat untuk Populasi Kontinu

Rata-rata berat (kg) sebuah material akan diuji dengan hipotesis:

H_0: $\mu = 68$
H_1: $\mu \neq 68$

Misalkan $\sigma = 3,6$, $n = 36$. Suatu rataan sampel yang nilainya dekat dengan nilai yang dihipotesiskan (68), akan dipandang sebagai petunjuk mendukung H_0. Sebaliknya, rataan sampel yang jauh lebih kecil atau lebih besar dari 68 akan merupakan petunjuk yang tidak sejalan dengan H_0, jadi mendukung H_1.

Misalkan daerah penerimaan adalah:

$$67 < \bar{X} < 69$$

Sehingga daerah kritis adalah:

$\bar{X} < 67$ dan $\bar{X} > 69$

sementara:

$$\alpha = P\left(\bar{X} \langle 67 \middle| H_0 benar\right) + P(\bar{X} > 69 \mid H_0 benar)$$

dengan:

$$z_1 = \frac{67 - 68}{\frac{36}{\sqrt{36}}} = -1,67$$

$$z_2 = \frac{69 - 68}{\frac{36}{\sqrt{36}}} = 1,67$$

maka:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(Z < -1,67) + P(Z > 1,67)\\ &= 2P\left(Z < -1,67\right)\\ &= 0,0950\end{aligned}$$

Jadi, 9,5% sampel ukuran 36 akan menolak μ = 68 padahal benar μ = 68.

8.3.4 Menurunkan *α* dengan Memperbesar *n*

$$z_1 = \frac{67-68}{\frac{3,6}{\sqrt{64}}} = -2,22$$

$$z_2 = \frac{69-68}{\frac{3,6}{\sqrt{64}}} = 2,22$$

maka:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(Z < -2,22) + P(Z > 2,22)\\ &= 2P\left(Z < -2,22\right)\\ &= 0,0264\end{aligned}$$

8.3.5 Dampak penetapan *H*1 terhadap Nilai *β*

$$\beta = P(67 < \overline{X} \left\langle 69 \right| H_1 benar)$$

Jika:

H_0: $\boldsymbol{\mu} = 68$
H_1: $\boldsymbol{\mu} = 70$

maka:

$$z_1 = \frac{67-70}{\frac{3,6}{\sqrt{64}}} = -6,67$$

$$z_2 = \frac{69-70}{\frac{3,6}{\sqrt{64}}} = -2,22$$

sehingga:

$$\beta = P\left(-6,67 < Z < -2,22\right)$$
$$= P\left(Z < -2,22\right) - P\left(X < -6,67\right)$$
$$= 0,0132 - 0,0000$$
$$= 0,0132$$

Jika:

H_0: $\boldsymbol{\mu} = 68$
H_1: $\boldsymbol{\mu} = 68,5$

maka:

$$z_1 = \frac{67-68,5}{\frac{3,6}{\sqrt{64}}} = -3,33$$

$$z_2 = \frac{69-68,5}{\frac{3,6}{\sqrt{64}}} = -1,11$$

sehingga:

$$\beta = P\left(-3,33 < Z < -1,11\right)$$
$$= P\left(Z < -1,11\right) - P\left(X < -3,33\right)$$
$$= 0,8665 - 0,0004$$
$$= 0,8661$$

8.4 BEBERAPA SIFAT PENTING GALAT JENIS I DAN II

Beberapa sifat penting galat jenis I dan II adalah sebagai berikut.

a. α dan β berkaitan. Memperkecil peluang yang satu biasanya memperbesar peluang yang lainnya.

b. Ukuran daerah kritis (α), selalu dapat diperkecil dengan menyesuaikan nilai (nilai-nilai) kritis.

c. Menaikkan n akan memperkecil α dan β secara serentak.

d. Bila H_0 salah, β akan mencapai maksimum (minimum) bila nilai parameter sesungguhnya dekat (jauh) dengan nilai yang dihipotesiskan.

8.4.1 Uji Eka Arah (*One Tailed*) dan Uji Dwi Arah (*Two Tailed*)

Uji eka arah (*one tailed*) dan uji dwi arah (*two tailed*) meliputi hal berikut.

a. **Uji eka arah** adalah uji ke salah satu arah, ke bawah atau ke atas secara terpisah.

b. **Uji dwi arah** adalah uji ke dua arah secara simultan untuk menguji kesamaan atau ketidaksamaan tanpa memperhatikan arahnya.

   1) Uji Eka arah:
      $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$
      $H_1 : \theta > \theta_0$

atau

$H_0: \theta = \theta_0$
$H_1: \theta < \theta_0$

2) Uji Dwi arah:

$H_0: \theta = \theta_0$
$H_1: \theta \neq \theta_0$

8.4.2 Langkah-Langkah dalam Pengujian Hipotesis

Berikut adalah langkah-langkah dalam pengajuan hipotesis.

a. Tetapkan $H_0: \theta = \theta_0$
b. Pilih tandingan $H_1: \theta > \theta_0$
   $H_1: \theta < \theta_0$
   $H_1: \theta \neq \theta_0$
c. Pilih taraf keberartian *α*.
d. Pilih uji statistik yang sesuai dan cari daerah kritis.
e. Hitunglah nilai statistik dari sampel acak ukuran *n*.
f. Kesimpulan: Tolak H_0 bila statistik tersebut mempunyai nilai dalam daerah kritis; jika tidak terima H_0.

8.4.3 Uji Menyangkut Satu Rataan

H_0	Uji Statistik	H_1	Daerah Kritis
$\mu = \mu_0$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$Z < -z_\alpha$ $Z > z_\alpha$ $Z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z > z_{\frac{\alpha}{2}}$

$\mu = \mu_0$	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$T < -t_\alpha$ $T > t_\alpha$ $T < -t_{\frac{\alpha}{2}}$ $T > t_{\frac{\alpha}{2}}$

8.4.4 Uji Menyangkut Selisih Rataan

H_0	Uji Statistik	H_1	Daerah Kritis
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$Z = \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}\right) + \left(\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}}$ $\sigma_1 \;\&\; \sigma_2 \; diketahui$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T < -t_\alpha$ $T > t_\alpha$ $T < -t_{\frac{\alpha}{2}}$ $T > t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$T = \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - d_0}{S_p \sqrt{\left(\dfrac{1}{n_1}\right) + \left(\dfrac{1}{n_2}\right)}}$ $v = n_1 + n_2 - 2$ $\sigma_1 = \sigma_2 \;\; ,tapi\, tidak\, diketahui$ $S_p^2 = \dfrac{\left(n_1 - 1\right) S_1^2 + \left(n_2 - 1\right) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T < -t_\alpha$ $T > t_\alpha$ $T < -t_{\frac{\alpha}{2}}$ $T > t_{\frac{\alpha}{2}}$

$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$T = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \quad - d_0}{\sqrt{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right) + \left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)}}$ $v = \dfrac{\left[\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right) + \left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)\right]^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$ $\sigma_1 \neq \sigma_2 \ , dan\,tidak\,diketahui$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T < -t_\alpha$ $T > t_\alpha$ $T < -t_{\frac{\alpha}{2}}$ $T > t_{\frac{\alpha}{2}}$

8.4.5 Uji Menyangkut Rataan Selisih

H_0	Uji Statistik	H_1	Daerah Kritis
$\mu_D = d_0$	$T = \dfrac{\bar{D} - d_0}{\dfrac{S_d}{\sqrt{n}}}$ $v = n - 1$	$\mu_d < d_0$ $\mu_d > d_0$ $\mu_d \neq d_0$	$T < -t_\alpha$ $T > t_\alpha$ $T < -t_{\frac{\alpha}{2}}$ $T > t_{\frac{\alpha}{2}}$

8.4.6 Uji Menyangkut Variansi

H_0	Uji Statistik	H_1	Daerah Kritis
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ $v = n - 1$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$X^2 < x_{1-\alpha}^2$ $X^2 > x_\alpha^2$ $X^2 < x_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$ $X^2 > x_{\frac{\alpha}{2}}^2$

$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ $v_1 = n_1 - 1$ $v_2 = n_2 - 1$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$F < f_{1-\alpha(v_1,v_2)}$ $F > f_{\alpha\ v_1,v_2}$ $F < f_{1-\alpha/2(v_1,v_2)}$ $F > f_{\alpha/2\ v_1,v_2}$

Contoh 8.1

Sebuah perusahaan pembuat perlengkapan olah raga membuat produk baru, yang menurut pembuatnya rata-rata dapat menahan beban 8 kg dengan simpangan baku 0,5 kg. Ujilah hipotesis bahwa μ = 8 kg lawan tandingan bahwa $\mu \neq$ 8 kg bila sampel acak 50 alat diuji dan ternyata rata-rata daya tahannya 7,8 kg. Gunakan taraf keberartian 0,01.

Jawab

a. H_0: μ = 8 kg

b. H_1: $\mu \neq$ 8 kg

c. α = 0,01

d. Daerah kritis: Z < -2,575 dan Z > 2,575, dengan $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
Perhitungan:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{7{,}8 - 8}{\dfrac{0{,}5}{\sqrt{50}}}$$

$$= -2{,}828$$

e. Kesimpulan: tolak H_0 dan simpulkan bahwa rata-rata daya tahan bukan 8, tetapi malah kurang dari 8 kg.

Contoh 8.2

Rata-rata waktu yang diperlukan siswa untuk mendaftar kursus montir di awal tahun ajaran baru pada waktu yang lalu adalah 50 menit, dengan simpangan baku 14 menit. Pendaftaran baru menggunakan komputer modern sedang diujicobakan. Bila sampel acak 12 siswa membutuhkan rata-rata 42 menit untuk mendaftar dengan simpangan baku 11,9 menit menggunakan cara baru ini, ujilah hipotesis bahwa rataan populasi sekarang lebih kecil dari 50, dengan menggunakan taraf keberartian (1) 0,05 dan (2) 0,01. Anggap populasi waktu mendaftar berdistribusi normal.

Jawab

a. H_0: $\mu = 50$ menit

b. H_1: $\mu < 50$ menit

c. *(1)* $\alpha = 0{,}05$

   (2) $\alpha = 0{,}01$

d. Daerah kritis:

   1) $T<-1{,}796$

   2) $T<-2{,}718$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

e. Perhitungan:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{42-50}{\frac{11,95}{\sqrt{12}}}$$

$$= -2,33$$

f. Kesimpulan: tolak H_0 pada α = 0,05 tapi tidak pada α = 0,01 dan simpulkan bahwa rataan sesungguhnya kemungkinan besar kurang dari 50 menit, tetapi perbedaannya tidak begitu besar sehingga penggunaan komputer dengan biaya yang begitu besar tidaklah menguntungkan

Contoh 8.3

Sebuah percobaan dilakukan untuk membandingkan keausan 2 ban. 12 buah bahan 1 diuji dengan memasukkan tiap potong bahan ke dalam mesin pengukur aus. 10 buah ban 2 diuji dengan jalan yang sama. Dalam tiap hal, diamati dalamnya keausan. Sampel ban 1 memberikan rata-rata keausan sebanyak 85 satuan dengan simpangan baku 4, sementara ban 2 memberikan rata-rata 81 dengan simpangan baku 5. Ujilah hipotesis bahwa kedua jenis bahan memberikan keausan yang sama pada α = 0,10. Anggaplah kedua populasi hampir normal dengan variansi yang sama.

Jawab

a. H_0: $\mu_1 = \mu_2$ atau $\mu_1 - \mu_2 = 0$

b. H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ atau $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

c. $\alpha = 0{,}10$

d. Daerah kritis: $T < -1{,}725$ dan $Z > 1{,}725$

e. Perhitungan:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

sehingga:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(12-1)4^2 + (10-1)5^2}{12+10-2}}$$

$$= 4,478$$

dan

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{S_p\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}\right) + \left(\frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{(85-8)-0}{4,478\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)}}$$

$$= 2,07$$

f. Kesimpulan: tolak H_0 dan simpulkan bahwa kedua jenis bahan tidak menunjukkan keausan yang sama.

Contoh 8.4

Lima sampel roti yang mengandung bakteri diuji untuk menentukan apakah ada perbedaan kandungan bakteri antara analisis tipe 1 dengan analisis tipe 2. Tiap sampel dibagi menjadi dua anak sampel dan kedua jenis analisis digunakan. Bila populasinya dianggap normal, ujilah pada taraf keberartian 0,05, apakah kedua cara analisis memberikan, rata-rata, hasil yang sama, bila data yang telah disandi menunjukkan analisis kandungan bakteri adalah sebagai berikut.

Analisis	Sampel				
	1	2	3	4	5
Tipe 1	2,0	2,0	2,3	2,1	2,4
Tipe 2	2,2	1,9	2,5	2,3	2,4

Jawab

a. $H_0 : \mu D = 0$

b. $H_1 : \mu D \neq 0$

c. $\alpha = 0{,}05$

d. Daerah kritis: $T <$ -2,776 dan $Z >$ 2,776

e. Perhitungan (lihat tabel):

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$= \frac{-0{,}5}{5}$$

$$= -0{,}1$$

dan:

$$S_d^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(5)(0{,}13)-(-0{,}5)^2}{(5)(5-1)}$$

$$= 0{,}02 \rightarrow S_d = \sqrt{0{,}02} = 0{,}14142$$

dan:

$$T = \frac{\bar{D} - d_0}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{-0{,}1 - 0}{\frac{0{,}14142}{\sqrt{5}}} = -1{,}6$$

f. Kesimpulan: Terima H_0 dan simpulkan bahwa kedua metode analisis tidak memberikan hasil yang berbeda secara berarti.

Tipe 1	***Tipe 2***	d_i	d_i^2
2,0	2,2	-0,2	0,04
2,0	1,9	0,1	0,01
2,3	2,5	-0,2	0,04
2,1	2,3	-0,2	0,04
2,4	2,4	0,0	0,00
Jumlah		**-0,5**	**0,13**

Contoh 8.5

Seorang pengusaha pembuat aki mobil menyatakan akinya berdistribusi hampir normal dengan simpangan baku sama dengan 0,9 tahun. Bila sampel acak sebesar 10 aki mempunyai simpangan baku 1,2 tahun, apakah σ > 0,9 tahun? Gunakan taraf keberartian 0,05.

Jawab

a. $H_0 : \sigma^2 = 0{,}81$

b. $H_1 : \sigma^2 > 0{,}81$

c. $\alpha = 0{,}05$

d. Daerah kritis: $X^2 > 16{,}919$

e. Perhitungan:

$$x^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

$$= \frac{(10-1)(1,44)}{0,81}$$

$$= 16,0$$

f. Kesimpulan: terima H_0 dan simpulkan bahwa tidak ada alasan meragukan untuk meragukan bahwa simpangan baku 0,9 tahun.

8.4.7 Uji Menyangkut 1 Proporsi (*n* kecil)

H_0	H_1	Kriteria Penolakan H_0
$p = p_0$	$P < p_0$	$P(X \le x \mid H_0 benar) < \alpha$
$p = p_0$	$P > p_0$	$P(X \ge x \mid H_0 benar) < \alpha$
$p = p_0$	$p \ne p_0 (x < n\,p_0)$	$P(X \le x \mid H_0 benar) < \frac{\alpha}{2}$
$p = p_0$	$p \ne p_0 (x > n\,p_0)$	$P(X \ge x \mid H_0 benar) < \frac{\alpha}{2}$

Contoh 8.6

Seorang penembak amatir menyatakan bahwa tembakannya mengenai 80% dari target tembakan. Apakah Anda memercayai pernyataannya bila pada suatu hari tertentu dia menembak 9 dari 15 target? Gunakan taraf keberartian 0,06.

Jawab

a. $H_0 : p = 0{,}8$

b. $H_1 : p \neq 0{,}8$

c. $\alpha = 0{,}06 \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}03$

d. Daerah kritis: semua nilai *x* yang memenuhi *P(X ≤ x| H_0 benar)< 0,03*

e. Perhitungan:

$$P\left(X \leq 9 | p = 0{,}8\right) = \sum_{x=0}^{9} b\left(x;15;0{,}8\right)$$

$$= 0{,}0611 > 0{,}025$$

f. Kesimpulan: terima H_0 dan simpulkan bahwa tak ada alasan menyangsikan pernyataan tersebut.

Contoh 8.7

Sebuah bengkel mengeluarkan pernyataan bahwa 90% dari mobil yang menjalani perawatan rutin di bengkel tersebut tetap dalam kondisi laik jalan hingga jadwal perawatan rutin berikutnya. Suatu peningkatan proses sedang diujicobakan dan menurut mereka akan menurunkan proporsi yang tak lain jalan di bawah yang sekarang (10%). Dalam suatu percobaan dengan 100 mobil yang dirawat rutin dengan proses baru tersebut, ternyata ada 5 yang tidak lain jalan sebelum jadwal perawatan rutin berikutnya. Apakah kenyataan ini cukup untuk menyimpulkan bahwa telah terjadi peningkatan proses? Gunakan taraf keberartian 0,05.

Jawab

a. $H_0 : p = 0{,}9$

b. $H_1 : p > 0{,}9$

c. $\alpha = 0{,}05$

d. Daerah kritis: $Z > 1{,}645$

e. Perhitungan:

$$z = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0q_0}}$$

$$= \frac{95 - (100)(0,90)}{\sqrt{(100)(0,90)(0,10)}}$$

$$= 0,56$$

f. Kesimpulan: terima H_0 dan simpulkan bahwa perbaikan proses belum menurunkan proporsi yang tidak laik jalan.

8.4.8 Pengujian Selisih 2 Proporsi

H_0	**Uji Statistik**	**H_1**	**Daerah Kritis**
$p_1 = p_2$	$z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left[\left(\dfrac{1}{n_1}\right) + \left(\dfrac{1}{n_2}\right)\right]}}$	$p_1 < p_2$	$Z < -z_\alpha$
$p_1 = p_2$		$p_1 > p_2$	$Z > z_\alpha$
$p_1 = p_2$	$\hat{p}_1 = \dfrac{x_1}{n_1}$ $\hat{p}_2 = \dfrac{x_2}{n_2}$ $\hat{p} = \dfrac{(x_1 + x_2)}{(n_1 + n_2)}$	$p_1 \ ? \ p_2$	$Z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ *dan* $Z > z_{\frac{\alpha}{2}}$

Contoh 8.8

Pemungutan suara diambil dari suatu kota dan kabupaten untuk menentukan apakah rencana pembangunan tempat hiburan boleh diteruskan. Tempat hiburan tersebut masih berada dalam batas kota, karena itu banyak penduduk kabupaten merasa bahwa rencana itu akan disetujui karena proporsi terbesar penduduk kota menyetujui pembangunan tersebut. Untuk menentukan apakah terdapat perbedaan yang berarti antara proporsi penduduk kota dan kabupaten yang mendukung rencana tersebut, diadakan polling. Bila 120 dari 200 penduduk kota menyetujui rencana tersebut dan 240 dari 500 penduduk kabupaten menyetujuinya, apakah Anda sependapat bahwa proporsi penduduk kota yang setuju lebih besar dari proporsi penduduk kabupaten yang setuju? Gunakan taraf keberartian 0,05.

Jawab

a. $H_0 : p_1 = p_2$

b. $H_1 : p_1 > p_2$

c. $\alpha = 0{,}05$

d. Daerah kritis: $Z > 1{,}645$

e. Perhitungan:

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 &= \frac{x_1}{n_1} \\ &= \frac{120}{200} \\ &= 0{,}60\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{p}_2 &= \frac{x_2}{n_2} \\ &= \frac{240}{500} \\ &= 0,48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{(x_1 + x_2)}{(n_1 + n_2)} \\ &= \frac{(120 + 240)}{(200 + 500)} \\ &= 0,51\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left[\left(\frac{1}{n_1}\right) + \left(\frac{1}{n_2}\right)\right]}} \\ &= \frac{0,60 - 0,48}{\sqrt{(0,51)(0,49)\left[\left(\frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{500}\right)\right]}} \\ &= 2,9\end{aligned}$$

f. Kesimpulan: tolak H_0 dan setujui bahwa proporsi penduduk kota yang menyetujui rencana tersebut lebih besar daripada proporsi penduduk kabupaten yang menyetujui.

8.4.9 Uji Kebaikan-Suai (***Goodness of Fit***)

Uji kebaikan-suai adalah uji untuk mengetahui kesesuaian distribusi sebuah kelompok data dengan distribusi tertentu atau distribusi kelompok data lain. Suatu uji kebaikan-suai antara frekuensi amatan dan harapan didasarkan pada besaran berikut.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \qquad (8.1)$$

Bila merupakan nilai peubah acak X^2 yang distribusi sampelnya dihampiri sangat dekat dengan distribusi khi-kuadrat, dengan o_i dan e_i masing-masing menyatakan frekuensi amatan dan harapan (≥ 5) dalam sel ke-*i*.

8.4.9.1 Derajat Kebebasan dalam Uji Kebaikan-Suai

Besarnya derajat kebebasan dalam uji kebaikan-suai khi-kuadrat sama dengan banyaknya sel dikurangi banyaknya besaran yang diperoleh dari amatan yang diperlukan dalam perhitungan frekuensi harapan.

8.4.9.2 Frekuensi Amatan dan Harapan dari Lantunan Dadu 120 Kali

	Muka					
	1	2	3	4	5	6
Amatan	20	22	17	18	19	24
Harapan	20	20	20	20	20	20

Contoh 8.9 (Dikutip dari Walpole dan Myers, 1988)

Dalam uji kebaikan-suai terhadap lantunan dadu, diketahui banyaknya sel = 6.

Besaran satu-satunya yang diberikan data amatan dalam penghitungan frekuensi harapan hasil bila sebuah dadu dilantunkan, ialah frekuensi total.

Oleh sebab itu derajat kebebasan = 6 – 1 = 5.

$$x^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(o_i - e_i\right)^2}{e_i}$$

$$= \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(22-20)^2}{20} + \frac{(17-20)^2}{20} + \frac{(18-20)^2}{20} + \frac{(19-20)^2}{20} + \frac{(24-20)^2}{20}$$

$$= 1,7$$

$$x^2_{0,05;5} = 11,070 > 1,7 \rightarrow seragam$$

8.4.9.3 Frekuensi Amatan dan Harapan Umur Baterai Bila Berdistribusi Normal

Batas Kelas	o_i		e_i	
1,45 – 1,95	2	7	0,8	10,3
1,95 – 2,45	1		2,7	
2,45 – 2,95	4		6,8	
2,95 – 3,45	15	15	10,6	10,6
3,45 – 3,95	10	10	10,3	10,3
3,95 – 4,45	5	8	6,1	8,4
4,45 – 4,95	3		2,3	

Contoh 8.10 Ujian Kebaikan Suai Umur aki

$$\overline{x} = 3,4125 \quad \text{dan} \qquad s = 0,703$$

$$z_1 = \frac{2,95 - 3,4125}{0,703}$$

$$= -0,658$$

$$z_2 = \frac{3,45 - 3,4125}{0,703}$$
$$= -0,053$$

$$e_4 = (0,2659)(40)$$
$$= 10,6$$

Karena diperlukan 3 besaran dari data amatan, yaitu jumlah frekuensi, rataan, dan simpangan baku maka derajat kebebasan = 4 – 3 = 1.

$$\chi^2_{0,05;1} = 3,841$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$
$$= \frac{(7-10,3)^2}{10,3} + \frac{(15-10,6)^2}{10,6} + \frac{(10-10,3)^2}{10,3} + \frac{(8-8,4)^2}{8,4}$$
$$= 2,911 < 3,841$$

Kesimpulan: Distribusi normal sesuai untuk distribusi umur aki.

8.4.10 Uji Kebebasan

Uji kebebasan meliputi berbagai hal berikut.

a. Uji *khi* kuadrat selain dapat dipergunakan untuk uji kebaikan-suai juga dapat dipakai untuk uji kebebasan.

b. ***Uji kebebasan*** adalah uji hipotesis untuk mengetahui apakah dua peubah saling bebas.

Contoh 8.11 (Dikutip dari Walpole and Myers, 1988)

Hubungan antara Agama dan Daerah

	Protestan		Katolik		Yahudi		Jumlah
Pantai Timur	182	(202)	215	(211)	203	(187)	600
Pantai Barat	154	(134)	136	(140)	110	(126)	400
Jumlah	336		351		313		1000

$$P(P) = {}^{336}\!/_{1000}$$

$$P(K) = {}^{352}\!/_{1000}$$

$$P(Y) = {}^{313}\!/_{1000}$$

$$P(T) = {}^{600}\!/_{1000}$$

$$P(B) = {}^{400}\!/_{1000}$$

$$\begin{aligned} P(P \cap T) &= P(P) \times P(T) \\ &= \left({}^{336}\!/_{1000}\right) \times \left({}^{600}\!/_{1000}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(P \cap B) &= P(P) \times P(B) \\ &= \left({}^{336}\!/_{1000}\right) \times \left({}^{400}\!/_{1000}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(K \cap T) &= P(K) \times P(T) \\ &= \left({}^{351}\!/_{1000}\right) \times \left({}^{600}\!/_{1000}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(K \cap B) &= P(K) \times P(B) \\ &= \left({}^{336}\!/_{1000}\right) \times \left({}^{400}\!/_{1000}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(P \cap T) &= P(P) \times P(T) \\ &= \left({}^{336}\!/_{1000}\right) \times \left({}^{600}\!/_{1000}\right) \end{aligned}$$

$$P(Y \cap B) = P(Y) \times P(B)$$
$$= \left(\frac{313}{1000}\right) \times \left(\frac{400}{1000}\right)$$

$$P(Y \cap T) = P(Y) \times P(T)$$
$$= \left(\frac{313}{1000}\right) \times \left(\frac{600}{1000}\right)$$

$$e = \frac{BL}{T}$$

Contoh 8.12

Banyaknya penganut Protestan yang diharapkan tinggal di pantai Timur dalam sampel, yaitu:

$$\left(\frac{336}{1000}\right) \times \left(\frac{600}{1000}\right) \times 1000 = \left(\frac{336 \times 600}{1000}\right)$$
$$= 202$$

Perhitungan Derajat Kebebasan

Perhitungan derajat kebebasan meliputi beberapa hal berikut.

a. Hanya perlu dihitung 2 frekuensi harapan pada tabel dan yang lainnya dapat dihitung dengan pengurangan.

b. Dengan menggunakan 3 jumlah marginal dan jumlah keseluruhan untuk mencari frekuensi harapan, maka 4 derajat kebebasan telah hilang sehingga sisanya tinggal 6 – 4 = 2.

c. Rumus umum untuk mencari derajat kebebasan $v = (b - 1)(l - 1)$.

Jadi untuk contoh $v = (2 - 1)(3 - 1) = 2$

$$\chi^2_{0,05;2} = 5,991$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

$$= \frac{(182-202)^2}{202} + \frac{(215-211)^2}{211} + \frac{(203-187)^2}{187} + \frac{(154-134)^2}{134} + \frac{(136-140)^2}{140} + \frac{(110-126)^2}{126}$$

$$= 8,5661 > 5,991$$

Kesimpulan: Agama yang dianut dan tempat tinggal penganutnya tidak bebas satu sama lain.

8.5 SOAL-SOAL

Soal 8.1

Sebuah perusahaan angkutan umum ingin menentukan apakah membeli ban merek A atau merek B untuk armadanya. Untuk menaksir perbedaan kedua merek dilakukan percobaan menggunakan 12 ban dari tiap merek. Ban dipakai sampai aus. Mean dan simpangan baku sampel A masing-masing 36.300 km dan 5.000 km. Mean dan simpangan baku sampel B masing-masing 38.100 km dan 6.100 km.

a. Ujilah hipotesis apakah $\mu_A - \mu_B = 0$, bila populasi berdistribusi hampir normal.

b. Berdasarkan jawaban no. ‘a’, ban merek apakah yang sebaiknya dibeli? Jelaskan dengan singkat!

c. Apakah hipotesis bahwa varians keawetan ban A lebih kecil dari ban B dapat diterima pada taraf keberartian 0,01? Jelaskan dengan prosedur uji hipotesis yang tepat!

Soal 8.2

Produsen alat uji tekan beton menyatakan bahwa lebih dari 80% alat yang diproduksinya mampu berfungsi dengan baik selama 10 tahun. Bila dari 15 alat yang diproduksinya, 14 buah mampu berfungsi dengan baik selama 10 tahun. Apakah Anda memercayai pernyataan produsen alat tersebut? Gunakan taraf keberartian 0,05!

Soal 8.3

Sebuah mesin menghasilkan potongan material berbentuk silinder. Sampel beberapa potongan diukur dan ternyata jari-jarinya (dalam cm) adalah sebagai berikut:

1,01 0,97 1,03 1,04 0,99 0,98 1,01 dan 1,03 cm.

Ujilah hipotesis pada taraf nyata 0,01 bahwa $\mu=1$ lawan tandingan $\mu\neq1$ pada taraf keberartian 0,01!

Soal 8.4

Dari dua populasi normal diambil masing satu sampel acak ukuran $n_1 = 9$ dan $n_2 = 17$ dengan mean sampel 1 sebesar 63 dan mean sampel 2 sebesar 58 serta simpangan baku sampel 1 sebesar 6 dan simpangan baku sampel 2 sebesar 4.

a. Ujilah hipotesis pada taraf keberartian 0,02. Apakah simpangan baku populasi 1 sama dengan simpangan baku populasi 2?

b. Ujilah hipotesis pada taraf keberartian 0,05. Apakah mean populasi 1 lebih besar dan mean populasi 2? Gunakanlah jawaban 'a'. untuk memilih teknik analisis yang tepat!

Soal 8.5

Sebuah survei pada suatu periode pengamatan menunjukkan bahwa modal dari 11 perusahaan pemasok material kelas B yang terpilih sebagai sample acak adalah 10, 9, 8, 7, 4, 6, 5, 1, 2, 11 dan 7 miliar rupiah. Sementara itu modal dari 7 perusahaan pemasok material kelas A yang terpilih sebagai sample acak adalah 9, 7, 15, 8, 10, 13 dan 14 miliar rupiah.

a. Dengan $\alpha = 0,02$ ujilah hipotesis bahwa variansi modal perusahaan pemasok material kelas A dan B adalah sama, melawan alternatif bahwa variansi modal perusahaan pemasok material kelas A dan B adalah tidak sama!

b. Dengan memperhatikan jawaban soal nomor a dan dengan $\alpha = 0,05$, ujilah hipotesis bahwa rataan modal perusahaan pemasok material kelas A dan B adalah sama, melawan alternatif bahwa rataan modal perusahaan pemasok material kelas A lebih tinggi 4 miliar rupiah dari modal perusahaan pemasok material kelas B!

Soal 8.6

Sebuah peralatan pengolah limbah yang baru, sedang dipertimbangkan untuk dipakai pada suatu daerah industri. Peralatan ini diuji kemampuannya dengan cara mengukur kadar BOD sampel air sungai di tempat pembuangan limbah yang sudah diolah. Sebanyak 10 sampel air sungai diambil dan ternyata seluruhnya memiliki kadar BOD yang memenuhi syarat. Dengan menggunakan taraf keberartian 0,03, benarkah pernyataan bahwa kadar BOD dari lebih dari 70% air limbah yang diolah dengan peralatan baru tersebut akan memenuhi syarat? Jelaskan dengan prosedur uji hipotesis yang tepat!

Soal 8.7

Selama 20 tahun terakhir, mean debit air sungai di daerah A pada musim kemarau sebesar 15 m^3/detik dengan simpangan baku

2 m^3/detik, sedangkan mean debit air sungai di daerah B pada musim kemarau adalah 10 m^3/detik dengan simpangan baku 1 m^3/detik. Ujilah hipotesis pada taraf nyata 0,05, apakah mean debit air sungai di daerah A pada musim kemarau lebih tinggi daripada mean debit air sungai di daerah B pada musim kemarau?

Soal 8.8

Sebuah pabrik A mengeklaim/menyatakan bahwa kekuatan tarik besi yang ia produksi 12 kg lebih kuat daripada produk yang sama yang diproduksi pabrik B. Untuk melakukan tes akan kebenaran klaim tersebut, secara acak diambil 50 sampel dari masing-masing produk. Hasil tes menunjukkan kekuatan rata-rata produk pabrik A adalah 86,7 kg dengan standar deviasi 6,28 kg, sedangkan produk pabrik B mempunyai kekuatan rata-rata 77,8 kg dengan standar deviasi 5,61 kg. Ujilah klaim dari pabrik A dengan α=0,05.

Soal 8.9

Dosen Statistik A khawatir telah terjadi penurunan nilai antara persentase mahasiswa yang memperoleh nilai 80 ke atas tahun ini, dengan persentase nilai mahasiswa 5 tahun yang lalu. Dari 100 mahasiswa yang mengambil statistika tahun ini (diambil secara acak), didapatkan 75 di antaranya memperoleh nilai di atas 80. Sementara dari 120 sampel yang diambil secara acak terhadap mahasiswa yang mengambil statistika 5 tahun lalu, didapatkan 66 di antaranya mendapatkan nilai 80 ke atas. Dengan tingkat keyakinan 90%, ujilah kekhawatiran dosen tersebut!

Soal 8.10

Sebuah eksperimen dilakukan untuk menyelidiki apakah ada keterkaitan antara hipertensi dan kegemaran merokok dari 180 responden yang diperlihatkan tabel berikut.

	Bukan Perokok	Perokok Ringan	Perokok Berat
Hipertensi	21	36	30
Nonhipertensi	48	26	19

Ujilah hipotesis pada taraf 0,05. Apakah ada keterkaitan antara hipertensi dengan kegemaran merokok. [Petunjuk: Gunakan Uji Chi Square (χ^2)]

Soal 8.11

Empat sampel tanah dilakukan pengujian nilai CBR. Sebelum diuji, tiap sampel tanah dibagi menjadi dua bagian, yaitu satu bagian diberi bahan stabilisasi, sedangkan satu bagian lagi tidak diberi bahan stabilisasi. Berikut ini hasil pengujian CBR tersebut:

Perlakuan terhadap Sampel	**Nilai CBR**			
Dengan Bahan Stabilisasi	7	8	11	12
Tanpa Bahan Stabilisasi	4	6	11	11

a. Bila distribusi nilai CBR hampir normal, buatlah selang kepercayaan 95% untuk rataan selisih hasil kedua perlakuan! Lakukanlah analisis secara berpasangan!

b. Berdasarkan jawaban nomor a, dapatkah disimpulkan bahwa bahan stabilisasi dapat meningkatkan nilai CBR tanah? Jelaskan dengan singkat!

c. Apakah hipotesis bahwa varians nilai CBR dengan dan tanpa stabilisasi adalah sama dapat diterima pada taraf keberartian 0,02? Jelaskan dengan prosedur uji hipotesis yang tepat!

Soal 8.12

Sebuah survei pada suatu periode pengamatan menunjukkan bahwa modal dari 11 perusahaan pemasok material kelas B yang terpilih sebagai sample acak adalah 10, 9, 8, 7, 4, 6, 5, 1, 2, 11, dan 7 miliar rupiah. Sementara itu, modal dari 7 perusahaan pemasok material kelas A yang terpilih sebagai sample acak adalah 9, 7, 15, 8, 10, 13, dan 14 miliar rupiah.

a. Dengan $\alpha = 0,02$, ujilah hipotesis bahwa variansi modal perusahaan pemasok material kelas A dan B adalah sama, melawan alternatif bahwa variansi modal perusahaan pemasok material kelas A dan B adalah tidak sama!

b. Dengan memperhatikan jawaban soal nomor a dan dengan , $\alpha = 0,05$ ujilah hipotesis bahwa rataan modal perusahaan pemasok material kelas A dan B adalah sama, melawan alternatif bahwa rataan modal perusahaan pemasok material kelas A lebih tinggi 4 miliar rupiah dari modal perusahaan pemasok material kelas B!

STATISTIKA DAN PROBABILITAS

BAB 9

REGRESI LINEAR DAN KORELASI

TUJUAN INSTRUKSIONAL:

Bab ini mempelajari teknik analisis regresi linear sederhana dengan satu peubah terikat dan satu peubah bebas.

9.1 REGRESI LINEAR

Regresi linear adalah teknik analisis untuk memprediksi nilai sebuah peubah terikat dari hubungan linearnya dengan sebuah peubah bebas.

a. Berguna untuk memecahkan persoalan yang menyangkut sekelompok peubah bila diketahui bahwa di antara peubah tersebut terdapat hubungan dasar yang tidak terpisahkan.

b. Misalnya bila kadar zat hasil proses kimia berkaitan dengan suhu masukan, maka perlu dikembangkan metode untuk mendapatkan taksiran terbaik kadar zat untuk berbagai suhu.

9.1.1 Peubah Terikat (Dependent Variable) dan Peubah Bebas (Independent Variable)

Peubah terikat adalah peubah yang nilainya dipengaruhi oleh peubah bebas. Sementara itu, **Peubah bebas** adalah peubah yang nilainya dapat dikendalikan oleh peneliti.

a. Peubah terikat (respons Y) tidak dikontrol.

b. Respons bergantung pada 1 atau lebih peubah bebas, misalnya $x1$, $x2$, …, xk, yang galat pengukurannya dapat diabaikan dan sering dikendalikan dalam percobaan (bukan peubah acak, tetapi merupakan k besaran yang ditentukan oleh peneliti dan tidak mempunyai sifat-sifat distribusi).

9.1.2 Persamaan Regresi

Persamaan regresi adalah hubungan antara peubah bebas dan respons, yang dicocokkan pada data percobaan, ditandai dengan persamaan prediksi. Persamaan regresi dapat berupa hubungan Y dengan satu x *a*tau beberapa x.

9.1.3 Istilah Regresi Linear

Regresi linear meliputi berbagai hal berikut.

a. Istilah *regresi linear* berarti, bahwa rataan $Y | x$ berkaitan linear dengan x dalam bentuk persamaan linear biasa: $\mu_{Y|x} = \alpha + \beta x$.

b. α dan β merupakan *parameter* yang akan ditaksir dari data sampel.

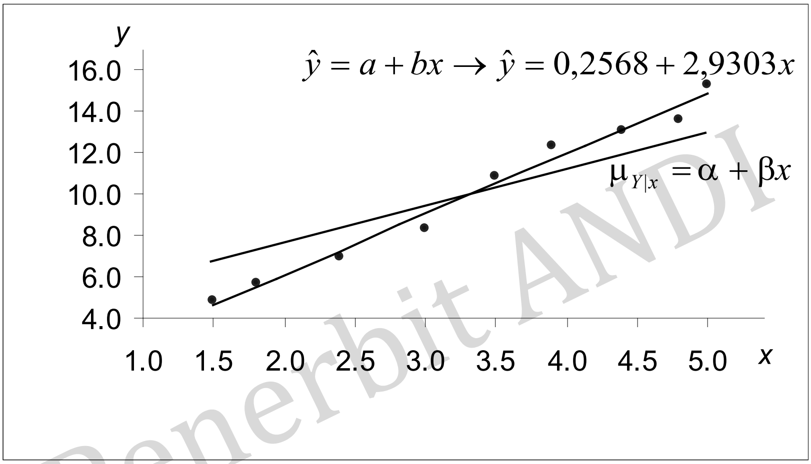
c. Bila taksiran untuk kedua parameter itu masing-masing dinyatakan dengan a dan b maka taksiran untuk respon yang dapat diperoleh dari bentuk garis regresi berdasarkan sampel:

Contoh 9.1

Buatlah regresi linear sederhana dari data berikut ini.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1,5	1,8	2,4	3,0	3,5	3,9	4,4	4,8	5,0
y_i	4,8	5,7	7,0	8,3	10,9	12,4	13,1	13,6	15,3

Diagram Pencar (*Scatter Diagram*) dengan Garis Regresi



Regresi Linear Sederhana

$$Y_i = Y \mid x_i$$

$$= \mu_{Y|x_i} + E_i$$

$$= \alpha + \beta x_i + E_i$$

$$y_i = \alpha + \beta x + \in_i$$

$$\hat{y} = a + bx$$

$$y_i = a + bx_i + e_i$$

sementara:

$$JKG = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

$$= \sum_{i=i}^{n} \left(y_i - a - bx_i \right)^2$$

sehingga:

$$\frac{\partial(JKG)}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - bx_i\right) = 0 \rightarrow na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\frac{\partial(JKG)}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a - bx_i\right)x_i = 0 \rightarrow a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

maka:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} \qquad (9.1)$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x} \qquad (9.2)$$

Jawab

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 30,3 \qquad \sum_{i=1}^{9} y_i = 91,1$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 345,09$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 115,11 \qquad \overline{x} = 3,3667$$

$$\overline{y} = 10,1222$$

$$b = \frac{(9)(345,09)-(30,3)(91,1)}{(9)(115,11)-(30,3)^2}$$
$$= 2,9303$$

$$a = 10,1222-(2,9303)(3,3667)$$
$$= 0,2568$$

$$\hat{y} = 0,2568 + 2,9303x$$

$$x_1 = 1,5 \rightarrow \hat{y}_1 = 4,7$$

$$x_2 = 5,0 \rightarrow \hat{y}_2 = 14,9$$

$$\mu_B = \beta$$

$$\mu_A = \alpha$$

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} \qquad (9.3)$$

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} \qquad (9.4)$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n} \qquad (9.5)$$

$$b = \frac{J_{xy}}{J_{xx}} \tag{9.6}$$

$$S^2 = \frac{J_{yy} - bJxy}{n-2} \tag{9.7}$$

9.1.4 Selang Kepercayaan untuk *β*

Contoh 9.2

Buatlah taksiran niai β pada Contoh 9.1!

Selang kepercayaan (1- α)100% untuk parameter β dalam persamaan regresi

$\mu_{Y|x} = \alpha + \beta x$ adalah sebagai berikut.

$$b - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}} S}{\sqrt{J_{xx}}} < \beta < b + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}} S}{\sqrt{J_{xx}}} \tag{9.8}$$

Dalam rumus ini $t_{\frac{\alpha}{2}}$ menyatakan nilai distribusi *t* dengan derajat kebebasan *n* - 2.

Jawab

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 30,3 \qquad \sum_{i=1}^{9} y_i = 91,1$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 345,09$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 115,11 \qquad \sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 1036,65$$

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}$$

$$= 115{,}11 - \frac{(30{,}3)^2}{9}$$

$$= 13{,}10$$

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}$$

$$= 1036{,}55 - \frac{(91{,}1)^2}{9}$$

$$= 114{,}52$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ - } \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}$$

$$= 345{,}09 - \frac{(30{,}3)(9{,}11)}{9}$$

$$= 38{,}39$$

$$S^2 = \frac{J_{yy} - bJ_{xy}}{n-2}$$

$$= \frac{114{,}52 - (2{,}9303)(38{,}39)}{7}$$

$$= 02{,}894 \rightarrow S = 0{,}5380$$

$$b - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}} S}{\sqrt{J_{xx}}} < \beta < b + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}} S}{\sqrt{J_{xx}}}$$

$$2{,}9305 - \frac{2{,}365 \quad 0{,}5380}{\sqrt{13{,}10}} < \beta < 2{,}9305 + \frac{2{,}365 \quad 0{,}5380}{\sqrt{13{,}10}}$$

$$2{,}579 < \beta < 3{,}282$$

9.1.5 Uji Hipotesis untuk *β*

Untuk menguji hipotesis H_0 bahwa $\beta = \beta_0$ lawan suatu alternatif yang sesuai dengan persoalan, kembali digunakan distribusi *t* dengan derajat kebebasan n - 2 untuk mendapatkan suatu daerah kritis dan kemudian mendasarkan keputusan atas nilai persamaan berikut.

$$t = \frac{b - \beta o}{\frac{s}{\sqrt{J_{xx}}}} \qquad (9.9)$$

Contoh 9.3

Dengan menggunakan harga taksiran b = 2,9303 pada Contoh 9.1, ujilah hipotesis pada α = 0,01 bahwa β = 2,5 lawan β > 2,5.

Jawab

a. $H_0 : \beta = 2{,}5$

b. $H_1 : \beta > 2{,}5$

c. $\alpha = 0{,}01$

d. Daerah kritis: $T > 2{,}998$

e. Perhitungan

$$t = \frac{b - \beta_0}{\frac{s}{\sqrt{J_{xx}}}}$$

$$= \frac{2,9303 - 2,5}{\frac{0,5380}{3,6194}}$$

$$= 2,8948$$

f. Kesimpulan: terima H_0 dan simpulkan bahwa β tidak berbeda secara berarti dengan 2,5.

9.1.6 Selang Kepercayaan untuk *α*

Selang kepercayaan (1- α)100% untuk parameter α dalam persamaan regresi

$\mu_{Y|x} = \alpha + \beta x$ adalah sebagai berikut.

$$a - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}} S \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sqrt{nJ_{xx}}} < \alpha < a + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}} S \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sqrt{nJ_{xx}}} \qquad (9.10)$$

Dalam rumus ini $t_{\frac{\alpha}{2}}$ menyatakan nilai distribusi t dengan derajat kebebasan n - 2.

9.1.7 Uji Hipotesis untuk *α*

Untuk menguji hipotesis H_0 bahwa $\alpha = \alpha_0$ lawan suatu alternatif yang sesuai dan dapat digunakan distribusi t dengan derajat kebebasan n-2 untuk mendapatkan daerah kritis, kemudian mendasarkan keputusan atas nilai:

$$t = \frac{a - \alpha_0}{S\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{nJ_{xx}}}} \tag{9.11}$$

9.1.8 Pemilihan Model Regresi

Pemilihan model regresi meliputi berbagai hal berikut.

a. Ramalan respons akan buruk bila ada beberapa peubah bebas yang berpengaruh yang tidak diikutkan dalam model atau hubungan sesungguhnya jauh dari linear.

b. Bila bentuk hubungan sesungguhnya tidak diketahui, dan pendekatan linear masih cukup baik bila rentangan *x* sempit (model yang dipakai merupakan hampiran pada daerah yang dipandang).

9.1.9 Uji Hipotesis untuk **β** dengan Pendekatan Analisis Variansi

Untuk menguji hipotesis H_0 bahwa $\beta = \beta_0$ lawan H_1 yaitu $\beta \neq \beta_0$, kita hitung :

$$f = \frac{bJ_{xy}}{S^2} = \frac{(n-2)bJ_{xy}}{J_{yy} - bJ_{xy}} \tag{9.12}$$

dan menolak H_0 pada taraf keberartian α bila $f > f\alpha(1, n\text{-}2)$. H_0 pada dasarnya mengatakan bahwa variasi dalam Y tidak diterangkan (disebabkan) oleh garis lurus (peubah *x*) tapi akibat fluktuasi acak.

9.2 KOEFISIEN KORELASI/DETERMINASI

Koefisien korelasi adalah ukuran hubungan linear antara sepasang peubah bebas dan peubah terikat. Sementara itu, **koefisien determinasi** adalah persentase nilai peubah terikat yang dapat dijelaskan oleh hubungan linearnya dengan peubah bebas.

Ukuran hubungan linear ρ antara dua peubah *X* dan *Y* ditaksir dengan koefisien korelasi sampel *r* dengan persamaan berikut.

$$r = b\sqrt{\frac{J_{xy}}{J_{yy}}} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}J_{yy}}} \qquad (9.13)$$

-1 ≤ r ≤ 1. r^2 disebut koefisien determinasi. Nilai 100 r^2% dari variasi dalam nilai *Y* diakibatkan oleh hubungan linear dengan peubah acak *X*.

9.2.1 Uji Hipotesis untuk ρ

Untuk pengujian hipotesis:

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

Digunakan persamaan:

$$z = \frac{\sqrt{n-3}}{2} \ln\left[\frac{(1+r)(1-\rho_0)}{(1-r)(1+\rho_0)}\right] \qquad (9.14)$$

9.2.2 Makna Koefisien Korelasi

Koefisien korelasi antara dua peubah ialah suatu ukuran hubungan linear antara keduanya, sehingga r=0 menunjukkan tidak adanya hubungan linear dan bukan tidak adanya ikatan atau hubungan antara keduanya. Mungkin terdapat hubungan antara keduanya, tetapi tidak linear (kuadratis, logaritmis, dan lain-lain).

9.3 SOAL-SOAL

Soal 9.1

Tekanan gas (P) dapat dinyatakan sebagai fungsi volumenya (V) dengan persamaan:

$P = C.V^{-\gamma}$

Bila diketahui pasangan data P dan V:

V (cm^3)	50	60	70	80	90
P (kg/cm^2)	65	50	40	35	30

a. Hitunglah nilai konstanta C dan γ pada persamaan di atas dengan menggunakan regresi linear!

b. Hitunglah nilai koefisien korelasi antara P dan V! Berdasarkan hasilnya, apakah beralasan untuk mengatakan bahwa terdapat hubungan linear yang kuat antara P dan V? Bila terdapat hubungan linear yang kuat antara P dan V, apakah beralasan untuk mengubah persamaan di atas menjadi bentuk linear murni, seperti P = a + b.V?

c. Apabila kepada Anda diberikan pasangan data P dan V yang berkorelasi positif, apa yang akan Anda lakukan terhadap pasangan data seperti itu?

Soal 9.2

Berikut hasil observasi kecepatan, $\overline{\mu}_s$ dan kepadatan, k pada suatu ruas jalan.

Kecepatan (km/jam)	Kepadatan (satuan mobil penumpang/km)
10	150
20	120
30	95
40	75
50	60
60	50
70	45
80	40

Anda diminta mencocokkan pasangan data hasil observasi tersebut dengan persamaan:

$$\overline{\mu}_s = c.\ln\frac{k_j}{k}$$

dengan c dan k_j adalah konstanta.

Supaya dapat menggunakan regresi linear, gunakanlah petunjuk berikut.

$$\overline{\mu}_s = c.\ln\frac{k_j}{k} = c.\ln k_j - c.\ln k$$

$$\hat{y} = a + bx$$

$$\hat{y} \rightarrow \overline{\mu}_s$$

$$a \rightarrow c.\ln k_j$$

$$b \rightarrow -c$$

$$x \rightarrow \ln k_j$$

Soal 9.3

Tabel berikut merupakan hasil pengukuran kecepatan udara (x) dan koefisien evaporasi (y) dari pembakaran bahan bakar dalam sebuah mesin pendorong.

Kecepatan udara (cm/s)	20	60	100	140	180	220	260	300	340	380
Koefisien Evaporasi (mm/s)	0,18	0,37	0.35	0,78	0,56	0,75	1,18	1,36	1,17	1,65

a. Buatlah model regresi y = a + bx.

b. Hitunglah koefisien evaporasi untuk kecepatan angin 190 cm/s.

c. Hitunglah nilai koefisien korelasi antara x dan y! Berdasarkan hasilnya, apakah beralasan untuk mengatakan bahwa terdapat hubungan linear yang kuat antara x dan y?

Soal 9.4

Tabel berikut menunjukkan data banyaknya perjalanan kendaraan per hari (y) yang keluar dari tiap zona serta data jumlah penduduk (x) pada tiap zona pada tahun 2006.

Zona	*x*	*y*
1	6000	3000
2	7000	3400
3	8000	4100
4	9000	4450
5	9500	4800

a. Buatlah persamaan regresi $y=a+bx$!

b. Hitunglah besarnya koefisien determinasi! Jelaskan makna dari hasilnya!

c. Jika pada tahun 2016 jumlah penduduk di zona1 menjadi 5000 jiwa, berapakah banyaknya perjalanan kendaraan per hari yang keluar dari zona tersebut!

Soal 9.5

Tabel berikut menunjukkan persentase pengguna angkutan pribadi yang beralih ke angkutan umum (y) jika terjadi pengurangan waktu tempuh yang dinyatakan dalam persentas pengurangan waktu tempuh (x).

x	y
5	10
15	20
30	30
40	50
50	60

a. Buatlah persamaan regresi $y=a+bx$!

b. Hitunglah besarnya koefisien determinasi! Jelaskan makna dari hasilnya.

c. Ada batasan nilai x dan y yang masuk akal untuk kasus di atas. Jelaskan!

Soal 9.6

Seorang pengusaha tanaman sangat berminat pada penawaran warga pupuk yang dikeluarkan oleh 7 pabrik industri kimia di kota Temanggung. Tabel berikut menggambarkan jumlah pupuk yang diproduksi dalam ribuan ton yang disimbolkan dengan x dan y menyatakan harga produksi pupuk per ton dalam dollar.

x (Jumlah Pupuk dalam ribuan ton)	3,0	4,0	2,4	5,0	2,6	4,0	5,5
y (Harga produksi per ton dalam dollar)	40,0	40,0	50,0	35,0	55,0	35,0	30,0

Berdasarkan tabel tersebut buatlah:

a. diagram pencarnya;

b. tentukan persamaan regresinya $y = a + bx$;

c. hitung y bila $x = 4,5$;

d. tentukan koefisien korelasi r dan koefisien determinasinya (r^2).

BAB 10

REGRESI LINEAR DARAB *(MULTIPLE LINEAR REGRESSION)*

TUJUAN INSTRUKSIONAL:

Bab ini mempelajari analisis regresi linear berganda antara sebuah peubah terikat dan lebih dari satu peubah bebas. Regresi linear berganda adalah teknik analisis untuk memprediksi nilai sebuah peubah terikat berdasarkan hubungan linearnya dengan lebih dari satu peubah bebas.

10.1 MODEL REGRESI

Model regresi linier adalah model hubungan antara rataan $Y \mid x$ berkaitan linear dengan x dalam bentuk persamaan linear biasa: $\mu_{Y|x} = \alpha + \beta x$ (seperti dijelaskan bab sebelumnya).

10.1.1 Model Regresi Linear

Model regresi linear meliputi berbagai hal berikut.

a. Pada umumnya persoalan penelitian yang menggunakan regresi memerlukan lebih dari 1 peubah bebas.

b. Model yang linear dalam koefisiennya disebut model regresi linear darab (*multiple linear regression model*):

$$\mu_{Y|\,x_1,x_2,\dots x_k} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots \beta_k x_k$$

c. Taksir dengan persamaan regresi sampel:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \dots b_k x_k$$

10.1.2 Model Regresi Polinom

Model regresi Polinom adalah model regresi dengan parameter β linear, variable bebas x^n, n = 0, 1, 2, ..., k

a. Bila $k = 1$, tetapi diyakini tidak membentuk garis lurus, mungkin lebih sesuai bila dinyatakan dengan model regresi polinom:

$$\mu_{Y|\,x} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 \dots + \beta_k x^k$$

b. Taksiran respons diperoleh dari persamaan regresi polinom:

$$\overline{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \dots + b_k x^k$$

10.1.3 Polinom = Linear?

Model yang parameternya berbentuk linear biasanya disebut sebagai model linear, terlepas bagaimana bentuk peubah bebas dalam model. Jadi, bisa dikatakan polinom adalah linear (polinom = linear).

Contoh model tidak linear adalah hubungan eksponensial yang ditaksir dengan persamaan

10.2 MENAKSIR KOEFISIEN

Misalkan kita ingin mencobakan bidang:

$$\mu_{Y|\,x_1,x_2} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

$$\{(x_{1i}, x_{2i}, y_i); i = 1, 2, ..., n\,;\, n > 2\}$$

sehingga:

$$\begin{aligned} y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i \\ &= b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + e \end{aligned}$$

maka:

$$JKG = \sum_{i=1}^{n} e_1^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i})^2$$

Turunkan JKG terhadap b_0, b_1 , b_2 lalu samakan dengan 0:

$$nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i$$

Jadi, akan diperoleh 3 persamaan linear dengan 3 anu. Bila b_1 & b_2 telah diperoleh, maka b_0 dapat diperoleh dari:

$$b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x} - b_2 \overline{x}_2$$

Contoh 10.1

Sebuah percobaan dilakukan untuk menentukan apakah berat hewan dapat diprediksi sesudah beberapa jangka waktu berdasarkan berat awal hewan tersebut dan banyaknya makanan yang dimakan (lihat tabel). Cobakan persamaan linear darab berbentuk:

$$\mu_{Y|\,x_1,x_2} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

kemudian prediksikan berat akhir seekor hewan yang berat awalnya 35 kg dan diberi makanan 250 kg.

Berat Akhir/Awal dan Makanan

Berat Akhir, y	Berat Awal, x_1	Makanan, x_2
95	42	272
77	33	226
80	33	259
100	45	292
97	39	311
70	36	183
50	32	173
80	41	236
92	40	230
84	38	235

Jawab

$$\sum_{i=1}^{10} x_{1i} = 379 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_{2i} = 2417 \qquad \sum_{i=1}^{10} y_i = 825$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_{1i}^2 = 14533 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_{2i}^2 = 601365 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_{1i}x_{2i} = 92628$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_{1i}y_i = 31726 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_{2i}y_i = 204569 \qquad n = 10$$

sehingga:

$$10b_0 + 379b_1 + 2417b_2 = 825$$

$$379b_0 + 14533b_1 + 92628b_2 = 31726$$

$$2417b_0 + 92628b_1 + 601356b_2 = 204569$$

Berdasarkan persamaan di atas maka:

$$b_0 = -22{,}9915 \qquad b_1 = 1{,}3957 \qquad b_2 = 0{,}2176$$

sehingga:

$$\hat{y} = -22{,}9915 + 1{,}357x_1 + 0{,}2176x_2$$

Jika $x_1 = 35$ dan $x_2 = 250$ maka:

$$\hat{y} = -22{,}9915 + (1{,}357)(35) + (0{,}2176)(250) = 103kg$$

10.3 MENAKSIR KOEFISIEN POLINOM

$$\mu_{Y|x} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x^2$$

$$\{(x_{1i}, y_i); i = 1, 2, \ldots, n\,;\, n > 2\}$$

Misalkan: $x_1 = x$ dan $x_2 = x^2$

$$nb_0 + b_1\sum_{i=1}^{n} x_i + b_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$b_0\sum_{i=1}^{n} x_i + b_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$b_0\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b_1\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b_2\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$$

Contoh 10.2 untuk $\mu_{Y|x} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x$

(Dikutip dari Walpole and Myers, 1988)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
y	9,1	7,3	3,2	4,6	4,8	2,9	5,7	7,1	8,8	10,2	

Jawab

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 45 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 297 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^3 = 2025$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^4 = 15322 \qquad \sum_{i=1}^{10} y_i = 53,7 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 307,3$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 y_i = 2153,3 \qquad n = 10$$

sehingga:

$$10b_0 + 45b_1 + 297b_2 = 53,7$$

$$45b_0 + 297b_1 + 205b_2 = 307,3$$

$$297b_0 + 2025b_1 + 15332b_2 = 2153,3$$

Berdasarkan persamaan di atas maka:

$$b_0 = -8,697 \qquad b_1 = -2,341 \qquad b_2 = 0,288$$

sehingga:

$$\hat{y} = -8,697 - 2,341x + 0,288x^2$$

Jika $x = 2$ maka:

$$\hat{y} = -8,697 - (2,341)(2) + (0,288)(2)^2 = 5,2$$

10.4 MENAKSIR KOEFISIEN DENGAN MENGGUNAKAN MATRIKS

$$JKG = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i} - \ldots - b_k x_{ki})^2$$

$$nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + \ldots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + \ldots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 + \ldots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i$$

$$Ab = g \rightarrow b = A^{-1} g$$

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} g_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ g_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\ \vdots \\ g_k = \sum_{i=1}^{n} x_{k1i} y_i \end{bmatrix}$$

Contoh 10.3 (Dikutip dari Walpole and Myers, 1988)

Persentase hidup sperma sejenis hewan setelah disimpan, kemudian diukur pada berbagai gabungan tiga zat yang dipakai untuk menaikkan peluang hidupnya (datanya seperti tercantum pada tabel). Taksirlah model regresi linear darab untuk data tersebut dengan menggunakan matriks!

Peluang Hidup Sperma

Y(hidup%)	x1(berat%)	x2(berat%)	x3(berat%)
25,5	1,74	5,30	10,80
31,2	6,32	5,42	9,40
25,9	6,22	8,41	7,20
38,4	10,52	4,63	8,50
18,4	1,19	11,60	9,40
26,7	1,22	5,85	9,90
26,4	4,10	6,62	8,00
25,9	6,32	8,72	9,10
32,0	4,08	4,42	8,70
25,2	4,15	7,60	9,20
39,7	10,15	4,83	9,40
35,7	1,72	3,12	7,60
26,5	1,70	5,30	8,20

Jawab

$$\sum_{i=1}^{13} y_i = 377,5 \qquad \sum_{i=1}^{13} y_i^2 = 11400,15 \qquad \sum_{i=1}^{13} x_{1i} = 59,43$$

$$\sum_{i=1}^{13} x_{2i} = 81,82 \qquad \sum_{i=1}^{13} x_{3i} = 115,40 \qquad \sum_{i=1}^{13} x_{1i}^2 = 394,7255$$

$$\sum_{i=1}^{13} x_{2i}^2 = 576,7264 \qquad \sum_{i=1}^{13} x_{3i}^2 = 1035,9600 \qquad \sum_{i=1}^{13} x_{1i} y_i = 1877,567$$

$$\sum_{i=1}^{13} x_{2i} y_i = 2246,661 \qquad \sum_{i=1}^{13} x_{3i} y_i = 3337,780 \qquad \sum_{i=1}^{13} x_{1i} x_{2i} = 360,6621$$

$$\sum_{i=1}^{13} x_{1i} x_{2i} = 360,6621 \qquad \sum_{i=1}^{13} x_{2i} x_{3i} = 728,3100 \qquad n = 13$$

sehingga:

$$Ab = g \rightarrow \begin{bmatrix} 13,00 & 59,4300 & 81,8200 & 115,400 \\ 59,43 & 394,7255 & 360,6621 & 522,078 \\ 81,82 & 360,6621 & 576,7264 & 728,310 \\ 115,40 & 522,0780 & 728,3100 & 1035,960 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 377,500 \\ 1877,567 \\ 2246,661 \\ 3337,780 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 8,0648 & -0,0826 & -0,0942 & 0,7905 \\ -0,0826 & 0,0085 & 0,0017 & 0,0037 \\ -0,0942 & 0,0017 & 0,0166 & 0,0021 \\ 0,7905 & 0,0037 & 0,0021 & 0,0886 \end{bmatrix}$$

karena $b = A^{-1}g$, berdasarkan matriks di atas maka:

$$b_0 = 39,1574 \quad b_1 = 1,0161 \quad b_2 = 1,8616 \quad b_3 = -0,3433$$

sehingga:

$$\hat{y} = 39,1574 + 1,0161x_1 - 1,8616x_2 + 0,3433x_3$$

10.5 SOAL-SOAL

Soal 10.1

Berikut adalah keluaran dari analisis regresi linear dengan dua peubah bebas yang dikerjakan dengan SPSS.

Variables Entered/Removed[a]

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp.	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter <= .050, Probability-of-F-to-remove >= .100).
2	Population Density per Sq.Km Area	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter <= .050, Probability-of-F-to-remove >= .100).

a. Dependent Variable: Number of Car

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.923[a]	.852	.836	2281.525
2	.962[b]	.925	.907	1721.202

a. Predictors: (Constant), Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp.

b. Predictors: (Constant), Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp., Population Density per Sq.Km Area

ANOVA[c]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2.70E+08	1	270472750.9	51.960	.000[a]
	Residual	46848198	9	5205355.335		
	Total	3.17E+08	10			
2	Regression	2.94E+08	2	146810331.4	49.556	.000[b]
	Residual	23700286	8	2962535.770		
	Total	3.17E+08	10			

a. Predictors: (Constant), Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp.

b. Predictors: (Constant), Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp., Population Density per Sq.Km Area

c. Dependent Variable: Number of Car

Coefficients[a]

		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
Model		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	-16630.6	4598.096		-3.617	.006
	Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp.	9.051E-03	.001	.923	7.208	.000
2	(Constant)	-57428.2	15001.766		-3.828	.005
	Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp.	5.052E-03	.002	.515	2.945	.019
	Population Density per Sq.Km Area	16.895	6.044	.489	2.795	.023

a. Dependent Variable: Number of Car

a. Manakah yang Anda pilih, model 1 atau model 2? Jelaskan alasannya!

b. Peubah bebas mana yang lebih besar kontribusinya dalam memengaruhi peubah terikat? Jelaskan alasannya!

Soal 10.2

Berikut adalah keluaran dari analisis regresi linear dengan dua peubah bebas yang dikerjakan dengan SPSS.

Variables Entered/Removed[a]

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	Vehicle Weight (lbs.)	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter <= .050, Probability-of-F-to-remove >= .100).
2	Horsepower	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter <= .050, Probability-of-F-to-remove >= .100).

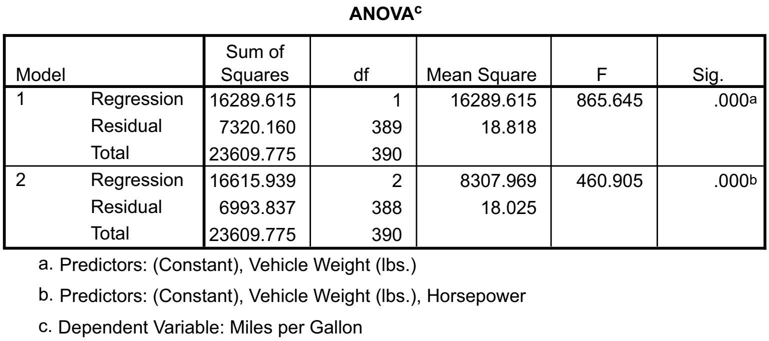
a. Dependent Variable: Miles per Gallon

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.831[a]	.690	.689	4.338
2	.839[b]	.704	.702	4.246

a. Predictors: (Constant), Vehicle Weight (lbs.)

b. Predictors: (Constant), Vehicle Weight (lbs.), Horsepower



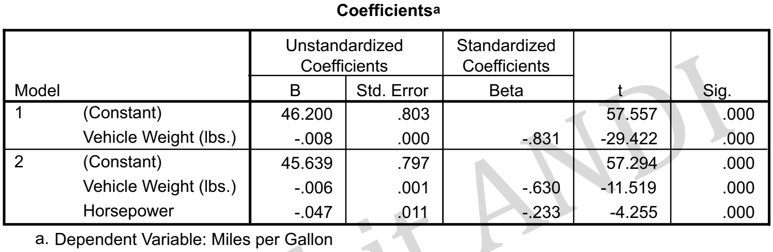
ANOVA[c]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	16289.615	1	16289.615	865.645	.000[a]
	Residual	7320.160	389	18.818		
	Total	23609.775	390			
2	Regression	16615.939	2	8307.969	460.905	.000[b]
	Residual	6993.837	388	18.025		
	Total	23609.775	390			

a. Predictors: (Constant), Vehicle Weight (lbs.)

b. Predictors: (Constant), Vehicle Weight (lbs.), Horsepower

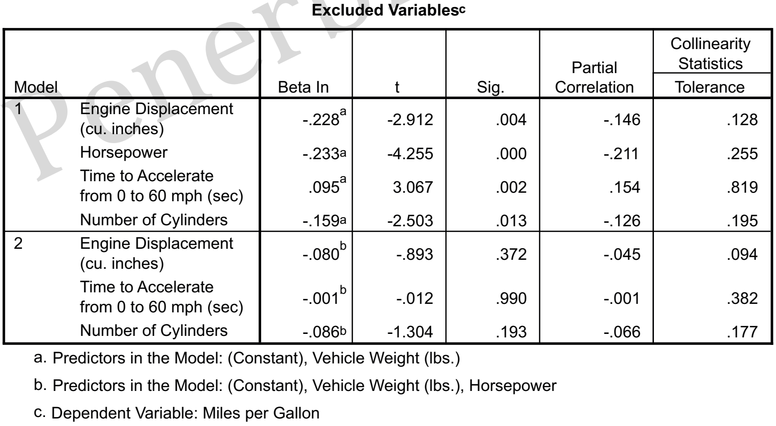
c. Dependent Variable: Miles per Gallon



Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	46.200	.803		57.557	.000
	Vehicle Weight (lbs.)	-.008	.000	-.831	-29.422	.000
2	(Constant)	45.639	.797		57.294	.000
	Vehicle Weight (lbs.)	-.006	.001	-.630	-11.519	.000
	Horsepower	-.047	.011	-.233	-4.255	.000

a. Dependent Variable: Miles per Gallon



Excluded Variables[c]

Model		Beta In	t	Sig.	Partial Correlation	Collinearity Statistics
						Tolerance
1	Engine Displacement (cu. inches)	-.228[a]	-2.912	.004	-.146	.128
	Horsepower	-.233[a]	-4.255	.000	-.211	.255
	Time to Accelerate from 0 to 60 mph (sec)	.095[a]	3.067	.002	.154	.819
	Number of Cylinders	-.159[a]	-2.503	.013	-.126	.195
2	Engine Displacement (cu. inches)	-.080[b]	-.893	.372	-.045	.094
	Time to Accelerate from 0 to 60 mph (sec)	-.001[b]	-.012	.990	-.001	.382
	Number of Cylinders	-.086[b]	-1.304	.193	-.066	.177

a. Predictors in the Model: (Constant), Vehicle Weight (lbs.)

b. Predictors in the Model: (Constant), Vehicle Weight (lbs.), Horsepower

c. Dependent Variable: Miles per Gallon

a. Manakah yang Anda pilih, model 1 atau model 2? Jelaskan alasannya!

b. Peubah bebas mana yang lebih besar kontribusinya dalam memengaruhi peubah terikat? Jelaskan alasannya!

Soal 10.3

Berikut adalah keluaran dari analisis regresi linear dengan empat peubah bebas yang dikerjakan dengan SPSS.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,507[a]	,257	,253	31,5822
2	,613[b]	,376	,369	29,0239
3	,644[c]	,415	,406	28,1690
4	,662[d]	,439	,426	27,6771

a. Predictors: (Constant), Population Density per Sq.Km Area

b. Predictors: (Constant), Population Density per Sq.Km Area, Number of Public Bus Seats per 1000 Population

c. Predictors: (Constant), Population Density per Sq.Km Area, Number of Public Bus Seats per 1000 Population, Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp.

d. Predictors: (Constant), Population Density per Sq.Km Area, Number of Public Bus Seats per 1000 Population, Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp., Yearly Rainfall (mm)

ANOVA[e]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	64139,170	1	64139,170	64,304	,000[a]
	Residual	185522,6	186	997,433		
	Total	249661,8	187			
2	Regression	93820,168	2	46910,084	55,687	,000[b]
	Residual	155841,6	185	842,387		
	Total	249661,8	187			
3	Regression	103658,7	3	34552,901	43,545	,000[c]
	Residual	146003,1	184	793,495		
	Total	249661,8	187			
4	Regression	109480,0	4	27369,995	35,730	,000[d]
	Residual	140181,8	183	766,021		
	Total	249661,8	187			

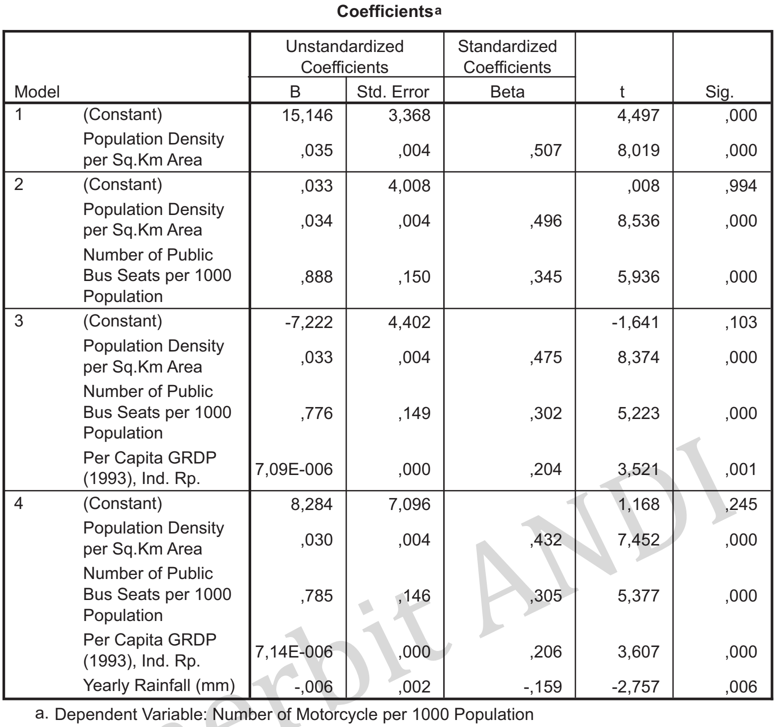
a. Predictors: (Constant), Population Density per Sq.Km Area

b. Predictors: (Constant), Population Density per Sq.Km Area, Number of Public Bus Seats per 1000 Population

c. Predictors: (Constant), Population Density per Sq.Km Area, Number of Public Bus Seats per 1000 Population, Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp.

d. Predictors: (Constant), Population Density per Sq.Km Area, Number of Public Bus Seats per 1000 Population, Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp., Yearly Rainfall (mm)

e. Dependent Variable: Number of Motorcycle per 1000 Population



Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	15,146	3,368		4,497	,000
	Population Density per Sq.Km Area	,035	,004	,507	8,019	,000
2	(Constant)	,033	4,008		,008	,994
	Population Density per Sq.Km Area	,034	,004	,496	8,536	,000
	Number of Public Bus Seats per 1000 Population	,888	,150	,345	5,936	,000
3	(Constant)	-7,222	4,402		-1,641	,103
	Population Density per Sq.Km Area	,033	,004	,475	8,374	,000
	Number of Public Bus Seats per 1000 Population	,776	,149	,302	5,223	,000
	Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp.	7,09E-006	,000	,204	3,521	,001
4	(Constant)	8,284	7,096		1,168	,245
	Population Density per Sq.Km Area	,030	,004	,432	7,452	,000
	Number of Public Bus Seats per 1000 Population	,785	,146	,305	5,377	,000
	Per Capita GRDP (1993), Ind. Rp.	7,14E-006	,000	,206	3,607	,000
	Yearly Rainfall (mm)	-,006	,002	-,159	-2,757	,006

a. Dependent Variable: Number of Motorcycle per 1000 Population

a. Model manakah yang Anda pilih? Jelaskan alasannya!

b. Peubah bebas mana yang lebih besar kontribusinya dalam memengaruhi peubah terikat? Jelaskan alasannya!

Soal 10.4

Sebuah percobaan dilakukan untuk menentukan apakah persentase pencemaran $\hat{y}$ berhubungan linear dengan suhu, x_1 dan waktu sterilisasi (x_2). Setelah dilakukan analisis regresi linear berganda terhadap pasangan data terkait, diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\hat{y} = 56 - 0,36x_1 - 2,75x_2$$

Jelaskan makna persamaan regresi di atas!

Soal 10.5

Sebuah percobaan dilakukan untuk menentukan apakah kuat tekan beton (y), berhubungan linear dengan persentase aditif 1 (x_1) dan persentase aditif 2 (x_2). Setelah dilakukan analisis regresi linear berganda terhadap pasangan data terkait, diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$y = 250 + 1,5x_1 - 0,2x_2$$

a. Jelaskan makna persamaan regresi di atas!
b. Aditif mana yang sebaiknya tetap digunakan? Jelaskan!

Soal 10.6

Suhu dalam ˚C dari suatu ruang kelas berukuran 20 m^2 (y), berhubungan linear dengan suhu lingkungan (x_1) dan jumlah orang di dalam ruangan (x_2). Setelah dilakukan analisis regresi linear berganda terhadap pasangan data terkait, diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$y = 20 + 0,1x_1 - 0,3x_2$$

a. Jelaskan makna persamaan regresi di atas!
b. Untuk kenyamanan kelas, suhu ruangan diupayakan agar maksimal 25 ˚C. Berapakah jumlah orang maksimum yang boleh ada di dalam kelas tersebut bila penggunaan pendingin ruangan tidak diinginkan?

Soal 10.7

Sebuah percobaan dilakukan untuk menentukan apakah tegangan yang mampu diterima suatu jenis bahan bangunan sesudah kebakaran (y), berhubungan linear dengan tegangan izin bahan bangunan tersebut sebelum terbakar (x_1) dan lamanya kebakaran terjadi (x_2). Setelah dilakukan analisis regresi linear berganda terhadap pasangan data terkait, diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$y = -23 + 1,4x_1 - 0,2x_2$$

a. Jelaskan makna persamaan regresi di atas!

b. Mengingat definisi variabel y, adakah masalah yang mungkin timbul akibat nilai konstanta yang negatif?

c. Bila ditambahkan satu variabel bebas lagi yaitu suhu maksimum bahan bangunan saat terbakar (x_3), problem apa yang mungkin timbul?

DAFTAR PUSTAKA

Field, A. 2011. *Discovering statistics using SPSS.* London: Sage Publication Ltd.

Hisyam, A. 2013. *Research design.* Jakarta: CV Riset Indonesia.

Lapin, L.L. 1983. *Probability and Statistics for Modern Engineering.* Boston: PWS Publishers.

Miles.J. and Shevlin.M. 2001. *Applying Regression and Correlation: A Guide for Students and Researchers.* London: Sage Publication Ltd.

Supranto, J. 2000. *Statistika: Teori dan Aplikasi Jilid 1.* Edisi Keenam. Cetakan 1. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Supranto, J. 2000. *Statistika: Teori dan Aplikasi Jilid 2.* Edisi Keenam. Cetakan 1. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Walpole, R.E., Myers, R.H. 1988. *Ilmu peluang dan statistika untuk insinyur* (R.K. Sembiring, Suroso, Trans.) Bandung: Penerbit ITB.

Wright, D.B. 1997. *Understanding Statistics: An Introduction for the Social Sciences.* London: Sage Publication Ltd.

STATISTIKA DAN
PROBABILITAS

GLOSARIUM

Statistika deskriptif : perhitungan rangkuman dan tampilan grafis.

Statistika inferensial : pembuatan kesimpulan umum mengenai keseluruhan (populasi) dengan melakukan pengamatan atas suatu bagian (sampel).

Populasi : kumpulan seluruh pengamatan yang mungkin dari karakteristik tertentu yang diteliti.

Sampel : kumpulan pengamatan yang berasal dari suatu bagian dari populasi tertentu.

Distribusi frekuensi : cara penyajian data ke dalam kelas-kelas.

Central tendency : ukuran pemusatan, dapat berupa mean (rataan), median (nilai tengah) atau modus (nilai yang sering muncul).

Kemencengan	:	ukuran kesimetrisan distribusi frekuensi sebuah kumpulan data.
Keruncingan	:	ukuran keruncingan distribusi frekuensi.
Dispersi	:	ukuran sebaran, dapat berupa jangkauan, simpangan baku atau variansi.
Ruang sampel	:	kumpulan seluruh titik sampel.
Kejadian	:	himpunan bagian dari ruang sampel.
Peluang kejadian	:	jumlah titik sampel kejadian dibagi jumlah anggota ruang sampel.
Permutasi	:	susunan yang dapat dibentuk dari kumpulan benda yang diambil sebagian atau seluruhnya.
Kombinasi	:	permutasi yang tidak membedakan urutan benda.
Peubah acak diskret	:	peubah acak yang terdiri atas bilangan bulat dan merupakan hasil pencacahan.
Peubah acak kontinu	:	peubah acak yang terdiri atas bilangan di antara bilangan bulat dan merupakan hasil pengukuran.
Distribusi peluang diskret	:	distribusi peluang yang menyangkut peubah diskret yaitu peubah yang merupakan hasil pencacahan sehingga ruang sampelnya adalah seluruh bilangan cacah.

Distribusi seragam	distribusi peluang yang peluang kejadian tiap peubah acaknya adalah sama.
Distribusi binomial	distribusi peluang yang memiliki dua kemungkinan hasil dengan parameter pengaruh *n* usaha berulang, *x* banyaknya sukses dan *p* peluang sukses.
Distribusi poisoon	distribusi peluang yang memiliki dua kemungkinan hasil, dengan parameter pengaruh *x* banyaknya sukses dan μ rataan banyaknya sukses pada selang waktu atau daerah tertentu.
Distribusi peluang kontinu	distribusi peluang yang menyangkut peubah kontinu, yaitu peubah yang merupakan hasil pengukuran sehingga ruang sampelnya adalah seluruh bilangan riil.
Distribusi normal	distribusi peluang kontinu dengan parameter pengaruh peubah acak normal X, dengan rataan μ dan variansi σ^2.
Distribusi khi-kuadrat	distribusi terkait sebuah variansi sampel.
Distribusi F	distribusi terkait rasio dua buah variansi sampel.
Distribusi t	distribusi terkait rataan sampel jika jumlah sampel kecil dan/ atau variansi populasi tidak diketahui.

Selang kepercayaan	:	sebuah rentang yang memuat nilai sebuah parameter populasi di antara batas bawah dan batas atasnya.
Galat	:	selisih antara nilai parameter populasi yang ditaksir dengan batas atas dan batas bawah selang kepercayaan.
Galat jenis I	:	kekeliruan dengan menolak h_0 dan mempercayai h_1 padahal sesungguhnya h_0 yang benar.
Galat jenis II	:	kekeliruan dengan menerima h_0 dan menolak h_1 padahal sesungguhnya h_0 yang salah.
Daerah kritis	:	daerah penolakan hipotesis nol.
Uji eka arah	:	uji ke salah satu arah, ke bawah atau ke atas secara terpisah.
Uji dwi arah	:	uji ke dua arah secara simultan untuk menguji kesamaan atau ketidaksamaan tanpa memperhatikan arahnya.
Regresi linear	:	teknik analisis untuk memprediksi nilai sebuah peubah terikat dari hubungan linearnya dengan sebuah peubah bebas.
Peubah terikat	:	peubah yang nilainya dipengaruhi oleh peubah bebas.

Peubah bebas	: peubah yang nilainya dapat dikendalikan oleh peneliti.
Koefisien korelasi	: ukuran hubungan linear antara sepasang peubah bebas dan peubah terikat.
Koefisien determinasi	: persentase nilai peubah terikat yang dapat dijelaskan oleh hubungan linearnya dengan peubah bebas.

STATISTIKA DAN PROBABILITAS

LAMPIRAN

TABEL 1

JUMLAH PELUANG BINOMIAL

Jumlah Peluang Binomial $\sum_{x=0}^{r} b(x; n, p)$

		p									
n	**r**	**0,10**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,40**	**0,50**	**0,60**	**0,70**	**0,80**	**0,90**
5	0	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,0778	0,0313	0,0102	0,0024	0,0003	0,0000
	1	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,3370	0,1875	0,0870	0,0308	0,0067	0,0005
	2	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,6826	0,5000	0,3174	0,1631	0,0579	0,0086
	3	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9130	0,8125	0,6630	0,4718	0,2627	0,0815
	4	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9898	0,9688	0,9222	0,8319	0,6723	0,4095
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Jumlah Peluang Binomial $\sum_{x=0}^{r} b(x;n,p)$

n	r	p									
		0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
10	0	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0060	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0464	0,0107	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000
	2	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,1673	0,0547	0,0123	0,0016	0,0001	0,0000
	3	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,3823	0,1719	0,0548	0,0106	0,0009	0,0000
	4	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,6331	0,3770	0,1662	0,0473	0,0064	0,0001
	5	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,8338	0,6230	0,3669	0,1503	0,0328	0,0016
	6	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9452	0,8281	0,6177	0,3504	0,1209	0,0128
	7	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9877	0,9453	0,8327	0,6172	0,3222	0,0702
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9893	0,9536	0,8507	0,6242	0,2639
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	0,9940	0,9718	0,8926	0,6513
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
15	0	0,2059	0,0352	0,0134	0,0047	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,5490	0,1671	0,0802	0,0353	0,0052	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,8159	0,3980	0,2361	0,1268	0,0271	0,0037	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9444	0,6482	0,4613	0,2969	0,0905	0,0176	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000
	4	0,9873	0,8358	0,6865	0,5155	0,2173	0,0592	0,0093	0,0007	0,0000	0,0000
	5	0,9978	0,9389	0,8516	0,7216	0,4032	0,1509	0,0338	0,0037	0,0001	0,0000
	6	0,9997	0,9819	0,9434	0,8689	0,6098	0,3036	0,0950	0,0152	0,0008	0,0000
	7	1,0000	0,9958	0,9827	0,9500	0,7869	0,5000	0,2131	0,0500	0,0042	0,0000
	8	1,0000	0,9992	0,9958	0,9848	0,9050	0,6964	0,3902	0,1311	0,0181	0,0003
	9	1,0000	0,9999	0,9992	0,9963	0,9662	0,8491	0,5968	0,2784	0,0611	0,0022
	10	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9907	0,9408	0,7827	0,4845	0,1642	0,0127
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9824	0,9095	0,7031	0,3518	0,0556
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9963	0,9729	0,8732	0,6020	0,1841
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9948	0,9647	0,8329	0,4510
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9953	0,9648	0,7941
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Jumlah Peluang Binomial $\sum_{x=0}^{r} b(x;n,p)$ (lanjutan)

		p									
n	**r**	**0,10**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,40**	**0,50**	**0,60**	**0,70**	**0,80**	**0,90**
20	0	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0036	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0160	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,2500	0,0577	0,0065	0,0003	0,0000	0,0000
	7	0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,4159	0,1316	0,0210	0,0013	0,0000	0,0000
	8	0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,5956	0,2517	0,0565	0,0051	0,0001	0,0000
	9	1,0000	0,9974	0,9861	0,9520	0,7553	0,4119	0,1275	0,0171	0,0006	0,0000
	10	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,8725	0,5881	0,2447	0,0480	0,0026	0,0000
	11	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9435	0,7483	0,4044	0,1133	0,0100	0,0001
	12	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9790	0,8684	0,5841	0,2277	0,0321	0,0004
	13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423	0,7500	0,3920	0,0867	0,0024
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9984	0,9793	0,8744	0,5836	0,1958	0,0113
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9941	0,9490	0,7625	0,3704	0,0432
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987	0,9840	0,8929	0,5886	0,1330
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9964	0,9645	0,7939	0,3231
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9924	0,9308	0,6083
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9885	0,8784
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

TABEL 2

JUMLAH PELUANG POISSON

Jumlah Peluang Poisson $\sum_{x=0}^{r} \mathrm{p}(x;\mu)$ untuk µ 0,1 s/d 0,9

	μ								
r	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6730	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865
4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977
5				1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997
6							1,0000	1,0000	1,0000

Jumlah Peluang Poisson $\sum_{x=0}^{r} \mathrm{p}(x;\mu)$ untuk µ 1,0 s/d 5,0

	m								
r	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,7358	0,5578	0,4060	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,0611	0,0404
2	0,9197	0,8088	0,6767	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,1736	0,1247
3	0,9810	0,9344	0,8571	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,3423	0,2650
4	0,9963	0,9814	0,9473	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,5321	0,4405
5	0,9994	0,9955	0,9834	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	0,7029	0,6160
6	0,9999	0,9991	0,9955	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,8311	0,7622
7	1,0000	0,9998	0,9989	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9134	0,8666
8		1,0000	0,9998	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9597	0,9319

Jumlah Peluang Poisson $\sum_{x=0}^{r} \mathrm{p}(x;\mu)$ untuk μ 1,0 s/d 5,0

	m								
r	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
9			1,0000	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9829	0,9682
10				0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9933	0,9863
11				1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	0,9976	0,9945
12					1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
13						1,0000	0,9999	0,9997	0,9993
14							1,0000	0,9999	0,9998
15								1,0000	0,9999
16									1,0000

Jumlah Peluang Poisson $\sum_{x=0}^{r} \mathrm{p}(x;\mu)$ untuk μ 5,5 s/d 9,5

	μ								
r	**5,5**	**6,0**	**6,5**	**7,0**	**7,5**	**8,0**	**8,5**	**9,0**	**9,5**
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0266	0,0174	0,0113	0,0073	0,0047	0,0030	0,0019	0,0012	0,0008
2	0,0884	0,0620	0,0430	0,0296	0,0203	0,0138	0,0093	0,0062	0,0042
3	0,2017	0,1512	0,1180	0,0818	0,0591	0,0424	0,0301	0,0212	0,0149
4	0,3575	0,2851	0,2237	0,1730	0,1321	0,0996	0,0744	0,0550	0,0403
5	0,5289	0,4457	0,3690	0,3007	0,2414	0,1912	0,1496	0,1157	0,0885
6	0,6860	0,6063	0,5265	0,4497	0,3782	0,3134	0,2562	0,2068	0,0165
7	0,8095	0,7440	0,6728	0,5987	0,5246	0,4530	0,3856	0,3239	0,0269
8	0,9844	0,8472	0,7916	0,7291	0,6620	0,5925	0,5231	0,4557	0,3918
9	0,9462	0,9161	0,8774	0,8305	0,7764	0,7166	0,6530	0,5874	0,5218
10	0,9747	0,9574	0,9332	0,9015	0,8622	0,8159	0,7634	0,7060	0,6453

Jumlah Peluang Poisson $\sum_{x=0}^{r} \mathrm{p}(x;\mu)$ untuk μ 5,5 s/d 9,5

	μ								
r	**5,5**	**6,0**	**6,5**	**7,0**	**7,5**	**8,0**	**8,5**	**9,0**	**9,5**
11	0,9890	0,9799	0,9661	0,9466	0,9208	0,8881	0,8487	0,8030	0,7520
12	0,9955	0,9912	0,9840	0,9730	0,9573	0,9362	0,9091	0,8758	0,8364
13	0,9983	0,9964	0,9929	0,9872	0,9784	0,9658	0,9486	0,9261	0,8981
14	0,9994	0,9986	0,9970	0,9943	0,9897	0,9827	0,9726	0,9585	0,9400
15	0,9998	0,9995	0,9988	0,9976	0,9897	0,9918	0,9862	0,9780	0,9665
16	0,9999	0,9998	0,9996	0,9990	0,9954	0,9963	0,9934	0,9889	0,9823
17	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9980	0,9984	0,9970	0,9947	0,9911
18		1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9994	0,9987	0,9976	0,9957
19			1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9996	0,9989	0,9980
20					1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9991
21						1,0000	0,9999	0,9998	0,9996
22							1,0000	0,9999	0,9999
23								1,0000	0,9999
24									1,0000

Jumlah Peluang Poisson $\sum_{x=0}^{r} \mathrm{p}(x;\mu)$ untuk μ 10,0 s/d 18,0

	μ								
r	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0	18,0
0	0,0000	0,0000	0,0000						
1	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000				
2	0,0028	0,0012	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000		
3	0,0103	0,0049	0,0023	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000

Jumlah Peluang Poisson $\sum_{x=0}^{r} \mathrm{p}(x;\mu)$ untuk μ 10,0 s/d 18,0

r	μ								
	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0	18,0
4	0,0293	0,0151	0,0076	0,0037	0,0018	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001
5	0,0671	0,0375	0,0203	0,0107	0,0055	0,0028	0,0014	0,0007	0,0003
6	0,1301	0,0786	0,0458	0,0259	0,0142	0,0076	0,0040	0,0021	0,0010
7	0,2202	0,1432	0,0895	0,0540	0,0316	0,0180	0,0100	0,0054	0,0029
8	0,3328	0,2320	0,1550	0,0998	0,0621	0,0374	0,0220	0,0126	0,0071
9	0,4579	0,3405	0,2424	0,1658	0,1094	0,0699	0,0433	0,0261	0,0154
10	0,5830	0,4599	0,3472	0,2517	0,1757	0,1185	0,0774	0,0491	0,0304
11	0,6968	0,5793	0,4616	0,3532	0,2600	0,1848	0,1270	0,0847	0,0549
12	0,7916	0,6887	0,5760	0,4631	0,3585	0,2676	0,1931	0,1350	0,0917
13	0,8645	0,7813	0,6815	0,5730	0,4644	0,3632	0,2745	0,2009	0,1426
14	0,9165	0,8540	0,7720	0,6751	0,5704	0,4657	0,3675	0,2808	0,2081
15	0,9513	0,9074	0,8444	0,7636	0,6694	0,5681	0,4667	0,3715	0,2867
16	0,9730	0,9441	0,8987	0,8355	0,7559	0,6641	0,5660	0,4677	0,3750
17	0,9857	0,9678	0,9370	0,8905	0,8272	0,7489	0,6593	0,5640	0,4686
18	0,9928	0,9823	0,9626	0,9302	0,8826	0,8195	0,7423	0,6550	0,5622
19	0,9965	0,9907	0,9787	0,9573	0,9235	0,8752	0,8122	0,7363	0,6509
20	0,9984	0,9953	0,9884	0,9750	0,9521	0,9170	0,8682	0,8055	0,7307
21	0,9993	0,9977	0,9939	0,9859	0,9712	0,9469	0,9108	0,8615	0,7991
22	0,9997	0,9990	0,9970	0,9924	0,9833	0,9673	0,9418	0,9047	0,8551
23	0,9999	0,9995	0,9985	0,9960	0,9907	0,9805	0,9633	0,9367	0,8989
24	1,0000	0,9998	0,9993	0,9980	0,9950	0,9888	0,9777	0,9594	0,9317

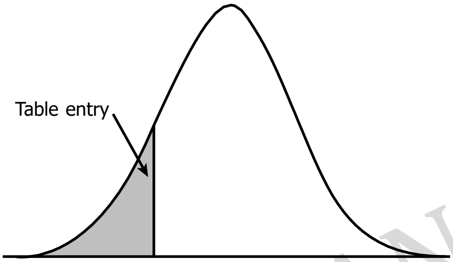
Jumlah Peluang Poisson $\sum_{x=0}^{r} \mathrm{p}(x;\mu)$ untuk μ 10,0 s/d 18,0

r	μ								
	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0	18,0
25		0,9999	0,9997	0,9990	0,9974	0,9938	0,9869	0,9748	0,9554
26		1,0000	0,9999	0,9995	0,9987	0,9967	0,9925	0,9848	0,9718
27			0,9999	0,9998	0,9994	0,9983	0,9959	0,9912	0,9827
28			1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	0,9978	0,9950	0,9897
29				1,0000	0,9999	0,9996	0,9989	0,9973	0,9941
30					0,9999	0,9998	0,9994	0,9986	0,9967
31					1,0000	0,9999	0,9997	0,9993	0,9982
32						1,0000	0,9999	0,9996	0,9990
33							0,9999	0,9998	0,9995
34							1,0000	0,9999	0,9998
35								1,0000	0,9999
36									0,9999
37									1,0000

TABEL 3

LUAS DI BAWAH KURVA NORMAL

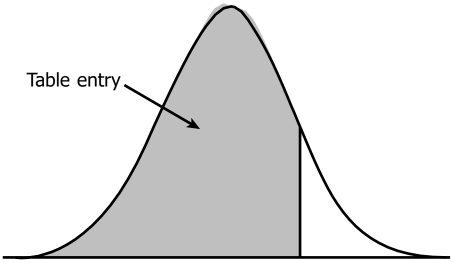
Luas Kurva di Bawah Kurva Normal, untuk *z* -3,4 s/d -0,0



z	**0**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0014	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0076	0,0073	0,0071	0,0070	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1094	0,1075	0,1057	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1563	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266	0,2236	0,2207	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

Luas Kurva di Bawah Kurva Normal 0,0 s/d 3,4



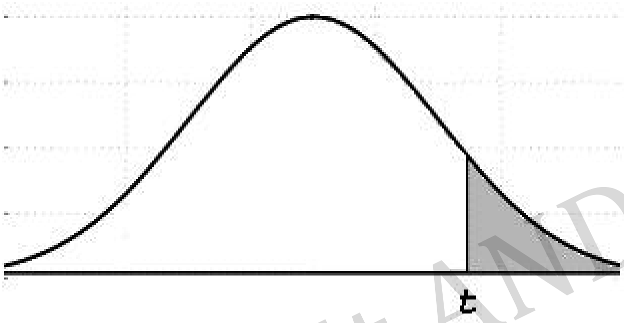
z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

TABEL 4

NILAI KRITIS DISTRIBUSI *t*

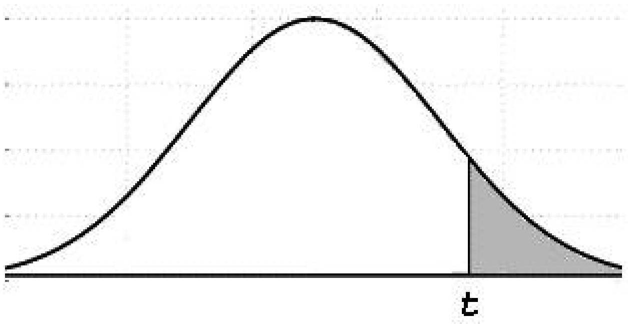
Nilai Kritis Distribusi *t* untuk υ 1 s/d 30



	α						
υ	**0,25**	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309
2	0,817	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144

υ	α						
	0,25	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385

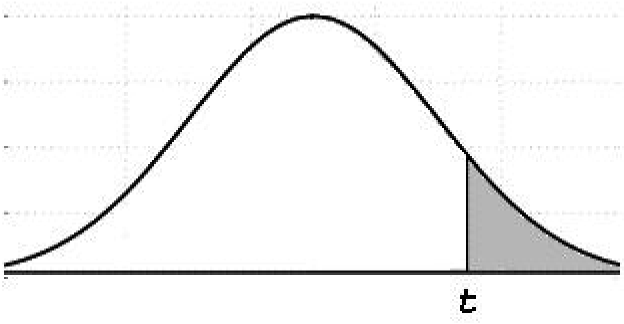
Nilai Kritis Distribusi *t* untuk υ 31 s/d 60



υ	α						
	0,25	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
31	0,682	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744	3,375
32	0,682	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365
33	0,682	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733	3,356
34	0,682	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340
36	0,681	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333
37	0,681	1,305	1,687	2,026	2,431	2,715	3,326
38	0,681	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319
39	0,681	1,304	1,685	2,023	2,426	2,708	3,313
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
41	0,681	1,303	1,683	2,020	2,421	2,701	3,301
42	0,680	1,302	1,682	2,018	2,418	2,698	3,296

υ	α						
	0,25	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
43	0,680	1,302	1,681	2,017	2,416	2,695	3,291
44	0,680	1,301	1,680	2,015	2,414	2,692	3,286
45	0,680	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	3,281
46	0,680	1,300	1,679	2,013	2,410	2,687	3,277
47	0,680	1,300	1,678	2,012	2,408	2,685	3,273
48	0,680	1,299	1,677	2,011	2,407	2,682	3,269
49	0,680	1,299	1,677	2,010	2,405	2,680	3,265
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261
51	0,679	1,298	1,675	2,008	2,402	2,676	3,258
52	0,679	1,298	1,675	2,007	2,400	2,674	3,255
53	0,679	1,298	1,674	2,006	2,399	2,672	3,251
54	0,679	1,297	1,674	2,005	2,397	2,670	3,248
55	0,679	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668	3,245
56	0,679	1,297	1,673	2,003	2,395	2,667	3,242
57	0,679	1,297	1,672	2,002	2,394	2,665	3,239
58	0,679	1,296	1,672	2,002	2,392	2,663	3,237
59	0,679	1,296	1,671	2,001	2,391	2,662	3,234
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232

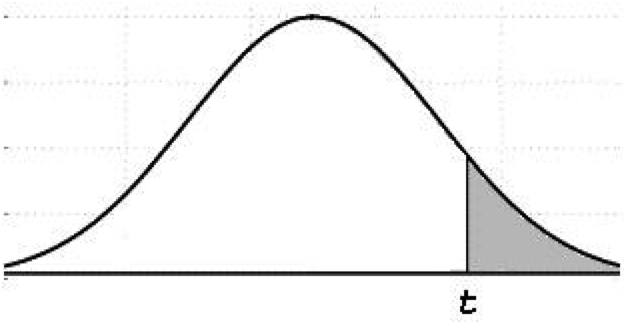
Nilai Kritis Distribusi *t* untuk υ 61 s/d 90



	α						
υ	**0,25**	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
61	0,679	1,296	1,670	2,000	2,389	2,659	3,229
62	0,678	1,295	1,670	1,999	2,388	2,657	3,227
63	0,678	1,295	1,669	1,998	2,387	2,656	3,225
64	0,678	1,295	1,669	1,998	2,386	2,655	3,223
65	0,678	1,295	1,669	1,997	2,385	2,654	3,220
66	0,678	1,295	1,668	1,997	2,384	2,652	3,218
67	0,678	1,294	1,668	1,996	2,383	2,651	3,216
68	0,678	1,294	1,668	1,995	2,382	2,650	3,214
69	0,678	1,294	1,667	1,995	2,382	2,649	3,213
70	0,678	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211
71	0,678	1,294	1,667	1,994	2,380	2,647	3,209
72	0,678	1,293	1,666	1,993	2,379	2,646	3,207
73	0,678	1,293	1,666	1,993	2,379	2,645	3,206
74	0,678	1,293	1,666	1,993	2,378	2,644	3,204
75	0,678	1,293	1,665	1,992	2,377	2,643	3,202

	α						
υ	**0,25**	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
76	0,678	1,293	1,665	1,992	2,376	2,642	3,201
77	0,678	1,293	1,665	1,991	2,376	2,641	3,199
78	0,678	1,293	1,665	1,991	2,375	2,640	3,198
79	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,640	3,197
80	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195
81	0,678	1,292	1,664	1,990	2,373	2,638	3,194
82	0,677	1,292	1,664	1,989	2,373	2,637	3,193
83	0,677	1,292	1,663	1,989	2,372	2,636	3,191
84	0,677	1,292	1,663	1,989	2,372	2,636	3,190
85	0,677	1,292	1,663	1,988	2,371	2,635	3,189
86	0,677	1,291	1,663	1,988	2,370	2,634	3,188
87	0,677	1,291	1,663	1,988	2,370	2,634	3,187
88	0,677	1,291	1,662	1,987	2,369	2,633	3,185
89	0,677	1,291	1,662	1,987	2,369	2,632	3,184
90	0,677	1,291	1,662	1,987	2,369	2,632	3,183

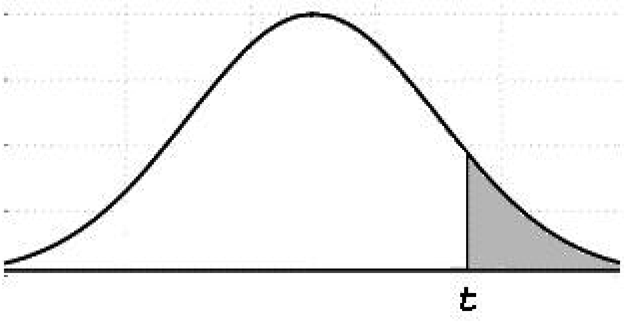
Nilai Kritis Distribusi *t* untuk υ 91 s/d 120



υ	α						
	0,25	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
91	0,677	1,291	1,662	1,986	2,368	2,631	3,182
92	0,677	1,291	1,662	1,986	2,368	2,630	3,181
93	0,677	1,291	1,661	1,986	2,367	2,630	3,180
94	0,677	1,291	1,661	1,986	2,367	2,629	3,179
95	0,677	1,291	1,661	1,985	2,366	2,629	3,178
96	0,677	1,290	1,661	1,985	2,366	2,628	3,177
97	0,677	1,290	1,661	1,985	2,365	2,627	3,176
98	0,677	1,290	1,661	1,984	2,365	2,627	3,175
99	0,677	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,175
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174
101	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,625	3,173
102	0,677	1,290	1,660	1,984	2,363	2,625	3,172
103	0,677	1,290	1,660	1,983	2,363	2,624	3,171
104	0,677	1,290	1,660	1,983	2,363	2,624	3,170

υ	α						
	0,25	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
105	0,677	1,290	1,660	1,983	2,362	2,623	3,170
106	0,677	1,290	1,659	1,983	2,362	2,623	3,169
107	0,677	1,290	1,659	1,982	2,362	2,623	3,168
108	0,677	1,289	1,659	1,982	2,361	2,622	3,167
109	0,677	1,289	1,659	1,982	2,361	2,622	3,167
110	0,677	1,289	1,659	1,982	2,361	2,621	3,166
111	0,677	1,289	1,659	1,982	2,360	2,621	3,165
112	0,677	1,289	1,659	1,981	2,360	2,620	3,165
113	0,677	1,289	1,658	1,981	2,360	2,620	3,164
114	0,677	1,289	1,658	1,981	2,360	2,620	3,163
115	0,677	1,289	1,658	1,981	2,359	2,619	3,163
116	0,677	1,289	1,658	1,981	2,359	2,619	3,162
117	0,677	1,289	1,658	1,980	2,359	2,619	3,161
118	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,618	3,161
119	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,618	3,160
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160

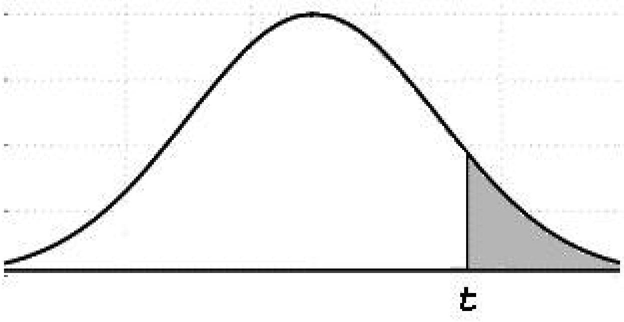
Nilai Kritis Distribusi *t* untuk υ 121 s/d 150



υ	α						
	0,25	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
121	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,159
122	0,677	1,289	1,657	1,980	2,357	2,617	3,158
123	0,676	1,288	1,657	1,979	2,357	2,616	3,158
124	0,676	1,288	1,657	1,979	2,357	2,616	3,157
125	0,676	1,288	1,657	1,979	2,357	2,616	3,157
126	0,676	1,288	1,657	1,979	2,356	2,615	3,156
127	0,676	1,288	1,657	1,979	2,356	2,615	3,156
128	0,676	1,288	1,657	1,979	2,356	2,615	3,155
129	0,676	1,288	1,657	1,979	2,356	2,614	3,155
130	0,676	1,288	1,657	1,978	2,355	2,614	3,154
131	0,676	1,288	1,657	1,978	2,355	2,614	3,154
132	0,676	1,288	1,656	1,978	2,355	2,614	3,153
133	0,676	1,288	1,656	1,978	2,355	2,613	3,153
134	0,676	1,288	1,656	1,978	2,355	2,613	3,152
135	0,676	1,288	1,656	1,978	2,354	2,613	3,152

υ	α						
	0,25	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
136	0,676	1,288	1,656	1,978	2,354	2,612	3,151
137	0,676	1,288	1,656	1,977	2,354	2,612	3,151
138	0,676	1,288	1,656	1,977	2,354	2,612	3,150
139	0,676	1,288	1,656	1,977	2,353	2,612	3,150
140	0,676	1,288	1,656	1,977	2,353	2,611	3,149
141	0,676	1,288	1,656	1,977	2,353	2,611	3,149
142	0,676	1,288	1,656	1,977	2,353	2,611	3,149
143	0,676	1,288	1,656	1,977	2,353	2,611	3,148
144	0,676	1,287	1,656	1,977	2,353	2,610	3,148
145	0,676	1,287	1,655	1,976	2,352	2,610	3,147
146	0,676	1,287	1,655	1,976	2,352	2,610	3,147
147	0,676	1,287	1,655	1,976	2,352	2,610	3,147
148	0,676	1,287	1,655	1,976	2,352	2,609	3,146
149	0,676	1,287	1,655	1,976	2,352	2,609	3,146
150	0,676	1,287	1,655	1,976	2,351	2,609	3,145

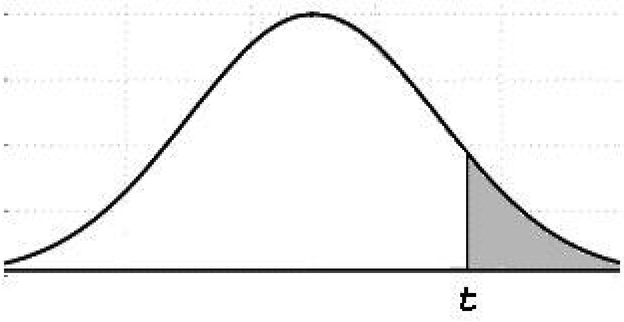
Nilai Kritis Distribusi *t* untuk υ 151 s/d 180



	α						
υ	**0,25**	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
151	0,676	1,287	1,655	1,976	2,351	2,609	3,145
152	0,676	1,287	1,655	1,976	2,351	2,609	3,145
153	0,676	1,287	1,655	1,976	2,351	2,608	3,144
154	0,676	1,287	1,655	1,975	2,351	2,608	3,144
155	0,676	1,287	1,655	1,975	2,351	2,608	3,144
156	0,676	1,287	1,655	1,975	2,350	2,608	3,143
157	0,676	1,287	1,655	1,975	2,350	2,608	3,143
158	0,676	1,287	1,655	1,975	2,350	2,607	3,143
159	0,676	1,287	1,654	1,975	2,350	2,607	3,142
160	0,676	1,287	1,654	1,975	2,350	2,607	3,142
161	0,676	1,287	1,654	1,975	2,350	2,607	3,142
162	0,676	1,287	1,654	1,975	2,350	2,607	3,141
163	0,676	1,287	1,654	1,975	2,349	2,606	3,141
164	0,676	1,287	1,654	1,975	2,349	2,606	3,141
165	0,676	1,287	1,654	1,974	2,349	2,606	3,140

	α						
υ	**0,25**	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
166	0,676	1,287	1,654	1,974	2,349	2,606	3,140
167	0,676	1,287	1,654	1,974	2,349	2,606	3,140
168	0,676	1,287	1,654	1,974	2,349	2,605	3,139
169	0,676	1,287	1,654	1,974	2,349	2,605	3,139
170	0,676	1,287	1,654	1,974	2,348	2,605	3,139
171	0,676	1,287	1,654	1,974	2,348	2,605	3,139
172	0,676	1,286	1,654	1,974	2,348	2,605	3,138
173	0,676	1,286	1,654	1,974	2,348	2,605	3,138
174	0,676	1,286	1,654	1,974	2,348	2,604	3,138
175	0,676	1,286	1,654	1,974	2,348	2,604	3,137
176	0,676	1,286	1,654	1,974	2,348	2,604	3,137
177	0,676	1,286	1,654	1,973	2,348	2,604	3,137
178	0,676	1,286	1,653	1,973	2,347	2,604	3,137
179	0,676	1,286	1,653	1,973	2,347	2,604	3,136
180	0,676	1,286	1,653	1,973	2,347	2,603	3,136

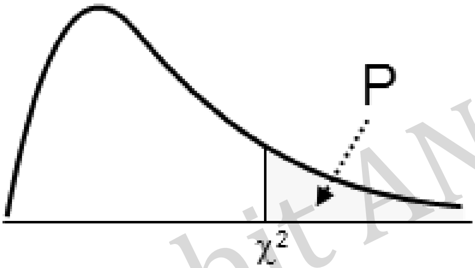
Nilai Kritis Distribusi *t* untuk υ 181 s/d 200



υ	α						
	0,25	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
181	0,676	1,286	1,653	1,973	2,347	2,603	3,136
182	0,676	1,286	1,653	1,973	2,347	2,603	3,136
183	0,676	1,286	1,653	1,973	2,347	2,603	3,135
184	0,676	1,286	1,653	1,973	2,347	2,603	3,135
185	0,676	1,286	1,653	1,973	2,347	2,603	3,135
186	0,676	1,286	1,653	1,973	2,347	2,603	3,135
187	0,676	1,286	1,653	1,973	2,346	2,602	3,134
188	0,676	1,286	1,653	1,973	2,346	2,602	3,134
189	0,676	1,286	1,653	1,973	2,346	2,602	3,134
190	0,676	1,286	1,653	1,973	2,346	2,602	3,134
191	0,676	1,286	1,653	1,972	2,346	2,602	3,133
192	0,676	1,286	1,653	1,972	2,346	2,602	3,133
193	0,676	1,286	1,653	1,972	2,346	2,602	3,133
194	0,676	1,286	1,653	1,972	2,346	2,601	3,133
195	0,676	1,286	1,653	1,972	2,346	2,601	3,133
196	0,676	1,286	1,653	1,972	2,346	2,601	3,132
197	0,676	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,132
198	0,676	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,132
199	0,676	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,132
200	0,676	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131

TABEL 5
NILAI KRITIS
DISTRIBUSI *KHI*-KUADRAT

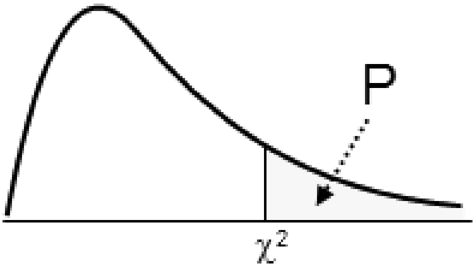
Nilai Kritis Distribusi *khi*-kuadrat untuk υ 1 s/d 30



	a										
υ	**0,995**	**0,975**	**0,200**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,020**	**0,010**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
1	3,93E-05	0,000982	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	9,550	10,828
2	0,010	0,051	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	12,429	13,816
3	0,072	0,216	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	14,796	16,266
4	0,207	0,484	5,989	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	16,924	18,467
5	0,412	0,831	7,289	9,236	11,070	12,833	13,388	15,086	16,750	18,907	20,515
6	0,676	1,237	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	20,791	22,458
7	0,989	1,690	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	22,601	24,322
8	1,344	2,180	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	24,352	26,124
9	1,735	2,700	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	26,056	27,877

	a										
υ	**0,995**	**0,975**	**0,200**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,020**	**0,010**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
10	2,156	3,247	13,442	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	27,722	29,588
11	2,603	3,816	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	29,354	31,264
12	3,074	4,404	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	30,957	32,909
13	3,565	5,009	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	32,535	34,528
14	4,075	5,629	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	34,091	36,123
15	4,601	6,262	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	35,628	37,697
16	5,142	6,908	20,465	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267	37,146	39,252
17	5,697	7,564	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	38,648	40,790
18	6,265	8,231	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	40,136	42,312
19	6,844	8,907	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582	41,610	43,820
20	7,434	9,591	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	43,072	45,315
21	8,034	10,283	26,171	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401	44,522	46,797
22	8,643	10,982	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	45,962	48,268
23	9,260	11,689	28,429	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	47,391	49,728
24	9,886	12,401	29,553	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,559	48,812	51,179
25	10,520	13,120	30,675	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928	50,223	52,620
26	11,160	13,844	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	51,627	54,052
27	11,808	14,573	32,912	36,741	40,113	43,195	44,140	46,963	49,645	53,023	55,476
28	12,461	15,308	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993	54,411	56,892
29	13,121	16,047	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	55,792	58,301
30	13,787	16,791	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672	57,167	59,703

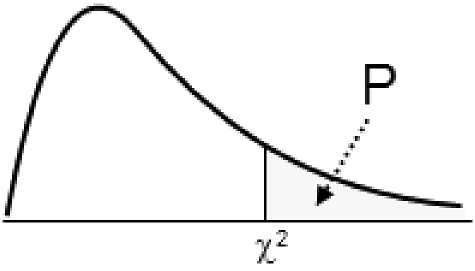
Nilai Kritis Distribusi *khi*-kuadrat untuk υ 31 s/d 60



υ	α										
	0,995	**0,975**	**0,200**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,020**	**0,010**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
31	14,458	17,539	37,359	41,422	44,985	48,232	49,226	52,191	55,003	58,536	61,098
32	15,134	18,291	38,466	42,585	46,194	49,480	50,487	53,486	56,328	59,899	62,487
33	15,815	19,047	39,572	43,745	47,400	50,725	51,743	54,776	57,648	61,256	63,870
34	16,501	19,806	40,676	44,903	48,602	51,966	52,995	56,061	58,964	62,608	65,247
35	17,192	20,569	41,778	46,059	49,802	53,203	54,244	57,342	60,275	63,955	66,619
36	17,887	21,336	42,879	47,212	50,998	54,437	55,489	58,619	61,581	65,296	67,985
37	18,586	22,106	43,978	48,363	52,192	55,668	56,730	59,893	62,883	66,633	69,346
38	19,289	22,878	45,076	49,513	53,384	56,896	57,969	61,162	64,181	67,966	70,703
39	19,996	23,654	46,173	50,660	54,572	58,120	59,204	62,428	65,476	69,294	72,055
40	20,707	24,433	47,269	51,805	55,758	59,342	60,436	63,691	66,766	70,618	73,402
41	21,421	25,215	48,363	52,949	56,942	60,561	61,665	64,950	68,053	71,938	74,745
42	22,138	25,999	49,456	54,090	58,124	61,777	62,892	66,206	69,336	73,254	76,084
43	22,859	26,785	50,548	55,230	59,304	62,990	64,116	67,459	70,616	74,566	77,419
44	23,584	27,575	51,639	56,369	60,481	64,201	65,337	68,710	71,893	75,874	78,750
45	24,311	28,366	52,729	57,505	61,656	65,410	66,555	69,957	73,166	77,179	80,077

	α										
υ	**0,995**	**0,975**	**0,200**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,020**	**0,010**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
46	25,041	29,160	53,818	58,641	62,830	66,617	67,771	71,201	74,437	78,481	81,400
47	25,775	29,956	54,906	59,774	64,001	67,821	68,985	72,443	75,704	79,780	82,720
48	26,511	30,755	55,993	60,907	65,171	69,023	70,197	73,683	76,969	81,075	84,037
49	27,249	31,555	57,079	62,038	66,339	70,222	71,406	74,919	78,231	82,367	85,351
50	27,991	32,357	58,164	63,167	67,505	71,420	72,613	76,154	79,490	83,657	86,661
51	28,735	33,162	59,248	64,295	68,669	72,616	73,818	77,386	80,747	84,943	87,968
52	29,481	33,968	60,332	65,422	69,832	73,810	75,021	78,616	82,001	86,227	89,272
53	30,230	34,776	61,414	66,548	70,993	75,002	76,223	79,843	83,253	87,507	90,573
54	30,981	35,586	62,496	67,673	72,153	76,192	77,422	81,069	84,502	88,786	91,872
55	31,735	36,398	63,577	68,796	73,311	77,380	78,619	82,292	85,749	90,061	93,168
56	32,490	37,212	64,658	69,919	74,468	78,567	79,815	83,513	86,994	91,335	94,461
57	33,248	38,027	65,737	71,040	75,624	79,752	81,009	84,733	88,236	92,605	95,751
58	34,008	38,844	66,816	72,160	76,778	80,936	82,201	85,950	89,477	93,874	97,039
59	34,770	39,662	67,894	73,279	77,931	82,117	83,391	87,166	90,715	95,140	98,324
60	35,534	40,482	68,972	74,397	79,082	83,298	84,580	88,379	91,952	96,404	99,607

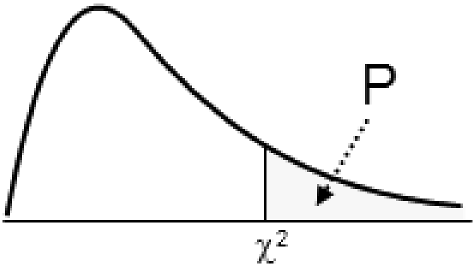
Nilai Kritis Distribusi *khi*-kuadrat untuk υ 61 s/d 100



	α										
υ	**0,995**	**0,975**	**0,200**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,020**	**0,010**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
61	36,301	41,303	70,049	75,514	80,232	84,476	85,767	89,591	93,186	97,665	100,888
62	37,068	42,126	71,125	76,630	81,381	85,654	86,953	90,802	94,419	98,925	102,166
63	37,838	42,950	72,201	77,745	82,529	86,830	88,137	92,010	95,649	100,182	103,442
64	38,610	43,776	73,276	78,860	83,675	88,004	89,320	93,217	96,878	101,437	104,716
65	39,383	44,603	74,351	79,973	84,821	89,177	90,501	94,422	98,105	102,691	105,988
66	40,158	45,431	75,424	81,085	85,965	90,349	91,681	95,626	99,330	103,942	107,258
67	40,935	46,261	76,498	82,197	87,108	91,519	92,860	96,828	100,554	105,192	108,526
68	41,713	47,092	77,571	83,308	88,250	92,689	94,037	98,028	101,776	106,440	109,791
69	42,494	47,924	78,643	84,418	89,391	93,856	95,213	99,228	102,996	107,685	111,055
70	43,275	48,758	79,715	85,527	90,531	95,023	96,388	100,425	104,215	108,929	112,317
71	44,058	49,592	80,786	86,635	91,670	96,189	97,561	101,621	105,432	110,172	113,577
72	44,843	50,428	81,857	87,743	92,808	97,353	98,733	102,816	106,648	111,412	114,835
73	45,629	51,265	82,927	88,850	93,945	98,516	99,904	104,010	107,862	112,651	116,092
74	46,417	52,103	83,997	89,956	95,081	99,678	101,074	105,202	109,074	113,889	117,346
75	47,206	52,942	85,066	91,061	96,217	100,839	102,243	106,393	110,286	115,125	118,599
76	47,997	53,782	86,135	92,166	97,351	101,999	103,410	107,583	111,495	116,359	119,850
77	48,788	54,623	87,203	93,270	98,484	103,158	104,576	108,771	112,704	117,591	121,100
78	49,582	55,466	88,271	94,374	99,617	104,316	105,742	109,958	113,911	118,823	122,348

	α										
υ	**0,995**	**0,975**	**0,200**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,020**	**0,010**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
79	50,376	56,309	89,338	95,476	100,749	105,473	106,906	111,144	115,117	120,052	123,594
80	51,172	57,153	90,405	96,578	101,879	106,629	108,069	112,329	116,321	121,280	124,839
81	51,969	57,998	91,472	97,680	103,010	107,783	109,232	113,512	117,524	122,507	126,083
82	52,767	58,845	92,538	98,780	104,139	108,937	110,393	114,695	118,726	123,733	127,324
83	53,567	59,692	93,604	99,880	105,267	110,090	111,553	115,876	119,927	124,957	128,565
84	54,368	60,540	94,669	100,980	106,395	111,242	112,712	117,057	121,126	126,179	129,804
85	55,170	61,389	95,734	102,079	107,522	112,393	113,871	118,236	122,325	127,401	131,041
86	55,973	62,239	96,799	103,177	108,648	113,544	115,028	119,414	123,522	128,621	132,277
87	56,777	63,089	97,863	104,275	109,773	114,693	116,184	120,591	124,718	129,840	133,512
88	57,582	63,941	98,927	105,372	110,898	115,841	117,340	121,767	125,913	131,057	134,745
89	58,389	64,793	99,991	106,469	112,022	116,989	118,495	122,942	127,106	132,273	135,978
90	59,196	65,647	101,054	107,565	113,145	118,136	119,648	124,116	128,299	133,489	137,208
91	60,005	66,501	102,117	108,661	114,268	119,282	120,801	125,289	129,491	134,702	138,438
92	60,815	67,356	103,179	109,756	115,390	120,427	121,954	126,462	130,681	135,915	139,666
93	61,625	68,211	104,241	110,850	116,511	121,571	123,105	127,633	131,871	137,127	140,893
94	62,437	69,068	105,303	111,944	117,632	122,715	124,255	128,803	133,059	138,337	142,119
95	63,250	69,925	106,364	113,038	118,752	123,858	125,405	129,973	134,247	139,546	143,344
96	64,063	70,783	107,425	114,131	119,871	125,000	126,554	131,141	135,433	140,755	144,567
97	64,878	71,642	108,486	115,223	120,990	126,141	127,702	132,309	136,619	141,962	145,789
98	65,694	72,501	109,547	116,315	122,108	127,282	128,849	133,476	137,803	143,168	147,010
99	66,510	73,361	110,607	117,407	123,225	128,422	129,996	134,642	138,987	144,373	148,230
100	67,328	74,222	111,667	118,498	124,342	129,561	131,142	135,807	140,169	145,577	149,449

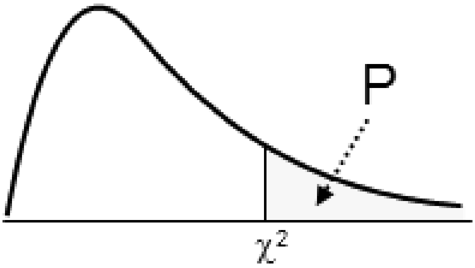
Nilai Kritis Distribusi *khi*-kuadrat untuk υ 101 s/d 140



υ	α										
	0,995	**0,975**	**0,200**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,020**	**0,010**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
101	68,146	75,083	112,726	119,589	125,458	130,700	132,287	136,971	141,351	146,780	150,667
102	68,965	75,946	113,786	120,679	126,574	131,838	133,431	138,134	142,532	147,982	151,884
103	69,785	76,809	114,845	121,769	127,689	132,975	134,575	139,297	143,712	149,183	153,099
104	70,606	77,672	115,903	122,858	128,804	134,111	135,718	140,459	144,891	150,383	154,314
105	71,428	78,536	116,962	123,947	129,918	135,247	136,860	141,620	146,070	151,582	155,528
106	72,251	79,401	118,020	125,035	131,031	136,382	138,002	142,780	147,247	152,780	156,740
107	73,075	80,267	119,078	126,123	132,144	137,517	139,143	143,940	148,424	153,977	157,952
108	73,899	81,133	120,135	127,211	133,257	138,651	140,283	145,099	149,599	155,173	159,162
109	74,724	82,000	121,192	128,298	134,369	139,784	141,423	146,257	150,774	156,369	160,372
110	75,550	82,867	122,250	129,385	135,480	140,917	142,562	147,414	151,948	157,563	161,581
111	76,377	83,735	123,306	130,472	136,591	142,049	143,700	148,571	153,122	158,757	162,788
112	77,204	84,604	124,363	131,558	137,701	143,180	144,838	149,727	154,294	159,950	163,995
113	78,033	85,473	125,419	132,643	138,811	144,311	145,975	150,882	155,466	161,141	165,201
114	78,862	86,342	126,475	133,729	139,921	145,441	147,111	152,037	156,637	162,332	166,406
115	79,692	87,213	127,531	134,813	141,030	146,571	148,247	153,191	157,808	163,523	167,610
116	80,522	88,084	128,587	135,898	142,138	147,700	149,383	154,344	158,977	164,712	168,813

	α										
υ	**0,995**	**0,975**	**0,200**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,020**	**0,010**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
117	81,353	88,955	129,642	136,982	143,246	148,829	150,517	155,496	160,146	165,900	170,016
118	82,185	89,827	130,697	138,066	144,354	149,957	151,652	156,648	161,314	167,088	171,217
119	83,018	90,700	131,752	139,149	145,461	151,084	152,785	157,800	162,481	168,275	172,418
120	83,852	91,573	132,806	140,233	146,567	152,211	153,918	158,950	163,648	169,461	173,617
121	84,686	92,446	133,861	141,315	147,674	153,338	155,051	160,100	164,814	170,647	174,816
122	85,520	93,320	134,915	142,398	148,779	154,464	156,183	161,250	165,980	171,831	176,014
123	86,356	94,195	135,969	143,480	149,885	155,589	157,314	162,398	167,144	173,015	177,212
124	87,192	95,070	137,022	144,562	150,989	156,714	158,445	163,546	168,308	174,198	178,408
125	88,029	95,946	138,076	145,643	152,094	157,839	159,575	164,694	169,471	175,380	179,604
126	88,866	96,822	139,129	146,724	153,198	158,962	160,705	165,841	170,634	176,562	180,799
127	89,704	97,698	140,182	147,805	154,302	160,086	161,834	166,987	171,796	177,743	181,993
128	90,543	98,576	141,235	148,885	155,405	161,209	162,963	168,133	172,957	178,923	183,186
129	91,382	99,453	142,288	149,965	156,508	162,331	164,091	169,278	174,118	180,103	184,379
130	92,222	100,331	143,340	151,045	157,610	163,453	165,219	170,423	175,278	181,282	185,571
131	93,063	101,210	144,392	152,125	158,712	164,575	166,346	171,567	176,438	182,460	186,762
132	93,904	102,089	145,444	153,204	159,814	165,696	167,473	172,711	177,597	183,637	187,953
133	94,746	102,968	146,496	154,283	160,915	166,816	168,600	173,854	178,755	184,814	189,142
134	95,588	103,848	147,548	155,361	162,016	167,936	169,725	174,996	179,913	185,990	190,331
135	96,431	104,729	148,599	156,440	163,116	169,056	170,851	176,138	181,070	187,165	191,520
136	97,275	105,609	149,651	157,518	164,216	170,175	171,976	177,280	182,226	188,340	192,707
137	98,119	106,491	150,702	158,595	165,316	171,294	173,100	178,421	183,382	189,514	193,894
138	98,964	107,372	151,753	159,673	166,415	172,412	174,224	179,561	184,538	190,688	195,080
139	99,809	108,254	152,803	160,750	167,514	173,530	175,348	180,701	185,693	191,861	196,266
140	100,655	109,137	153,854	161,827	168,613	174,648	176,471	181,840	186,847	193,033	197,451

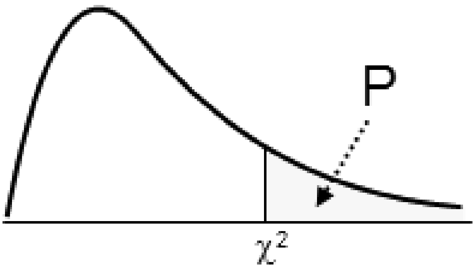
Nilai Kritis Distribusi *khi*-kuadrat untuk υ 141 s/d 180



υ	a										
	0,995	**0,975**	**0,200**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,020**	**0,010**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
141	101,501	110,020	154,904	162,904	169,711	175,765	177,594	182,979	188,001	194,205	198,635
142	102,348	110,903	155,954	163,980	170,809	176,882	178,716	184,118	189,154	195,376	199,819
143	103,196	111,787	157,004	165,056	171,907	177,998	179,838	185,256	190,306	196,546	201,002
144	104,044	112,671	158,054	166,132	173,004	179,114	180,959	186,393	191,458	197,716	202,184
145	104,892	113,556	159,104	167,207	174,101	180,229	182,080	187,530	192,610	198,885	203,366
146	105,741	114,441	160,153	168,283	175,198	181,344	183,200	188,666	193,761	200,054	204,547
147	106,591	115,326	161,202	169,358	176,294	182,459	184,321	189,802	194,912	201,222	205,727
148	107,441	116,212	162,251	170,432	177,390	183,573	185,440	190,938	196,062	202,390	206,907
149	108,291	117,098	163,300	171,507	178,485	184,687	186,560	192,073	197,211	203,557	208,086
150	109,142	117,985	164,349	172,581	179,581	185,800	187,678	193,208	198,360	204,723	209,265
151	109,994	118,871	165,398	173,655	180,676	186,914	188,797	194,342	199,509	205,889	210,443
152	110,846	119,759	166,446	174,729	181,770	188,026	189,915	195,476	200,657	207,054	211,620
153	111,698	120,646	167,495	175,803	182,865	189,139	191,033	196,609	201,804	208,219	212,797
154	112,551	121,534	168,543	176,876	183,959	190,251	192,150	197,742	202,951	209,383	213,973
155	113,405	122,423	169,591	177,949	185,052	191,362	193,267	198,874	204,098	210,547	215,149
156	114,259	123,312	170,639	179,022	186,146	192,474	194,384	200,006	205,244	211,710	216,324
157	115,113	124,201	171,686	180,094	187,239	193,584	195,500	201,138	206,390	212,873	217,499
158	115,968	125,090	172,734	181,167	188,332	194,695	196,616	202,269	207,535	214,035	218,673

υ	a										
	0,995	**0,975**	**0,200**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,020**	**0,010**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
159	116,823	125,980	173,781	182,239	189,424	195,805	197,731	203,400	208,680	215,197	219,846
160	117,679	126,870	174,828	183,311	190,516	196,915	198,846	204,530	209,824	216,358	221,019
161	118,536	127,761	175,875	184,382	191,608	198,025	199,961	205,660	210,968	217,518	222,191
162	119,392	128,651	176,922	185,454	192,700	199,134	201,076	206,790	212,111	218,678	223,363
163	120,249	129,543	177,969	186,525	193,791	200,243	202,190	207,919	213,254	219,838	224,535
164	121,107	130,434	179,016	187,596	194,883	201,351	203,303	209,047	214,396	220,997	225,705
165	121,965	131,326	180,062	188,667	195,973	202,459	204,417	210,176	215,539	222,156	226,876
166	122,823	132,218	181,109	189,737	197,064	203,567	205,530	211,304	216,680	223,314	228,045
167	123,682	133,111	182,155	190,808	198,154	204,675	206,642	212,431	217,821	224,472	229,215
168	124,541	134,003	183,201	191,878	199,244	205,782	207,755	213,558	218,962	225,629	230,383
169	125,401	134,897	184,247	192,948	200,334	206,889	208,867	214,685	220,102	226,786	231,552
170	126,261	135,790	185,293	194,017	201,423	207,995	209,978	215,812	221,242	227,942	232,719
171	127,122	136,684	186,338	195,087	202,513	209,102	211,090	216,938	222,382	229,098	233,887
172	127,983	137,578	187,384	196,156	203,602	210,208	212,201	218,063	223,521	230,253	235,053
173	128,844	138,472	188,429	197,225	204,690	211,313	213,311	219,189	224,660	231,408	236,220
174	129,706	139,367	189,475	198,294	205,779	212,419	214,422	220,314	225,798	232,563	237,385
175	130,568	140,262	190,520	199,363	206,867	213,524	215,532	221,438	226,936	233,717	238,551
176	131,430	141,157	191,565	200,432	207,955	214,628	216,641	222,563	228,074	234,870	239,716
177	132,293	142,053	192,610	201,500	209,042	215,733	217,751	223,687	229,211	236,023	240,880
178	133,157	142,949	193,654	202,568	210,130	216,837	218,860	224,810	230,347	237,176	242,044
179	134,020	143,845	194,699	203,636	211,217	217,941	219,969	225,933	231,484	238,328	243,207
180	134,884	144,741	195,743	204,704	212,304	219,044	221,077	227,056	232,620	239,480	244,370

Nilai Kritis Distribusi *khi*-kuadrat untuk υ 181 s/d 200



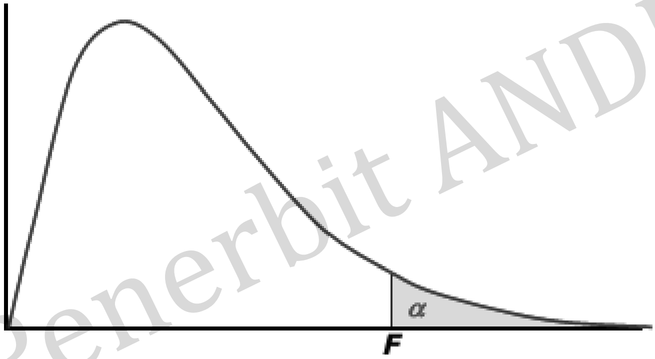
	α										
υ	**0,995**	**0,975**	**0,200**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,020**	**0,010**	**0,005**	**0,002**	**0,001**
181	135,749	145,638	196,788	205,771	213,391	220,148	222,185	228,179	233,755	240,632	245,533
182	136,614	146,535	197,832	206,839	214,477	221,251	223,293	229,301	234,891	241,783	246,695
183	137,479	147,432	198,876	207,906	215,563	222,353	224,401	230,423	236,026	242,933	247,857
184	138,344	148,330	199,920	208,973	216,649	223,456	225,508	231,544	237,160	244,084	249,018
185	139,210	149,228	200,964	210,040	217,735	224,558	226,615	232,665	238,294	245,234	250,179
186	140,077	150,126	202,008	211,106	218,820	225,660	227,722	233,786	239,428	246,383	251,339
187	140,943	151,024	203,052	212,173	219,906	226,761	228,828	234,907	240,561	247,532	252,499
188	141,810	151,923	204,095	213,239	220,991	227,863	229,935	236,027	241,694	248,681	253,659
189	142,678	152,822	205,139	214,305	222,076	228,964	231,040	237,147	242,827	249,829	254,818
190	143,545	153,721	206,182	215,371	223,160	230,064	232,146	238,266	243,959	250,977	255,976
191	144,413	154,621	207,225	216,437	224,245	231,165	233,251	239,386	245,091	252,124	257,135
192	145,282	155,521	208,268	217,502	225,329	232,265	234,356	240,505	246,223	253,271	258,292
193	146,150	156,421	209,311	218,568	226,413	233,365	235,461	241,623	247,354	254,418	259,450
194	147,020	157,321	210,354	219,633	227,496	234,465	236,566	242,742	248,485	255,564	260,607
195	147,889	158,221	211,397	220,698	228,580	235,564	237,670	243,860	249,616	256,710	261,763
196	148,759	159,122	212,439	221,763	229,663	236,664	238,774	244,977	250,746	257,855	262,920
197	149,629	160,023	213,482	222,828	230,746	237,763	239,877	246,095	251,876	259,001	264,075
198	150,499	160,925	214,524	223,892	231,829	238,861	240,981	247,212	253,006	260,145	265,231
199	151,370	161,826	215,567	224,957	232,912	239,960	242,084	248,329	254,135	261,290	266,386
200	152,241	162,728	216,609	226,021	233,994	241,058	243,187	249,445	255,264	262,434	267,541

TABEL 6

NILAI KRITIS DISTRIBUSI F

UNTUK *f 0,05*

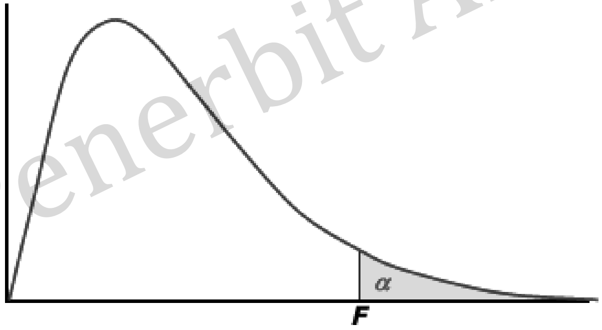
Nilai Kritis Distribusi F; *f 0,05* (v_1, v_2) untuk v_2 1 s/d 9



υ2	υ1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4476	199,5000	215,7073	224,5832	230,1619	233,9860	236,7684	238,8827	240,5433
2	18,5128	19,0000	19,1643	19,2468	19,2964	19,3295	19,3532	19,3710	19,3848
3	10,1280	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8867	8,8452	8,8123
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3882	6,2561	6,1631	6,0942	6,0410	5,9988
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2067	4,1468	4,0990
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660	3,7870	3,7257	3,6767
8	5,3177	4,4590	4,0662	3,8379	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881
9	5,1174	4,2565	3,8625	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,4780	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204

υ2	υ1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,9480	2,8962
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876
16	4,4940	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377
17	4,4513	3,5915	3,1968	2,9647	2,8100	2,6987	2,6143	2,5480	2,4943
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563
19	4,3807	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227
20	4,3512	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,5990	2,5140	2,4471	2,3928

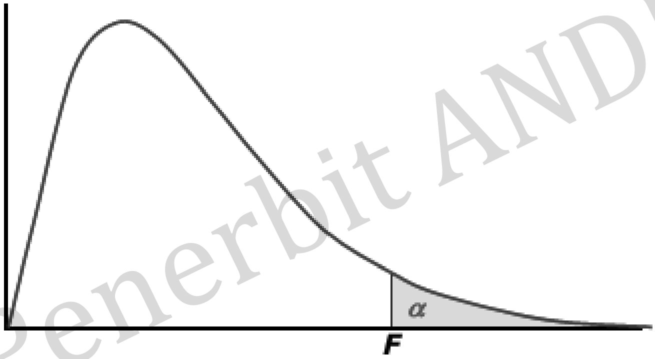
Nilai Kritis Distribusi F; *f 0,05* (v_1, v_2) untuk v_2 1 s/d 9 (lanjutan)



υ2	υ1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,3660
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419
23	4,2793	3,4221	3,0280	2,7955	2,6400	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,6030	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821
26	4,2252	3,3690	2,9752	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655

27	4,2100	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501
28	4,1960	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,2360
29	4,1830	3,3277	2,9340	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2783	2,2229
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107
40	4,0847	3,2317	2,8387	2,6060	2,4495	2,3359	2,2490	2,1802	2,1240
60	4,0012	3,1504	2,7581	2,5252	2,3683	2,2541	2,1665	2,0970	2,0401
120	3,9201	3,0718	2,6802	2,4472	2,2899	2,1750	2,0868	2,0164	1,9588
∞	3,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799

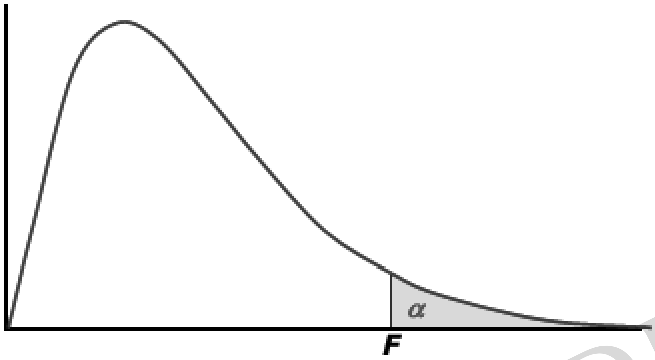
Nilai Kritis Distribusi F; $f\ 0{,}05\ (v_1, v_2)$ untuk v_2 10 s/d ∞



υ2	**υ1**									
	10	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	241,8817	243,9060	245,9499	248,0131	249,0518	250,0951	251,1432	252,1957	253,2529	254,3144
2	19,3959	19,4125	19,4291	19,4458	19,4541	19,4624	19,4707	19,4791	19,4874	19,4957
3	8,7855	8,7446	8,7029	8,6602	8,6385	8,6166	8,5944	8,5720	8,5494	8,5264
4	5,9644	5,9117	5,8578	5,8025	5,7744	5,7459	5,7170	5,6877	5,6581	5,6281
5	4,7351	4,6777	4,6188	4,5581	4,5272	4,4957	4,4638	4,4314	4,3985	4,3650
6	4,0600	3,9999	3,9381	3,8742	3,8415	3,8082	3,7743	3,7398	3,7047	3,6689
7	3,6365	3,5747	3,5107	3,4445	3,4105	3,3758	3,3404	3,3043	3,2674	3,2298
8	3,3472	3,2839	3,2184	3,1503	3,1152	3,0794	3,0428	3,0053	2,9669	2,9276

9	3,1373	3,0729	3,0061	2,9365	2,9005	2,8637	2,8259	2,7872	2,7475	2,7067
10	2,9782	2,9130	2,8450	2,7740	2,7372	2,6996	2,6609	2,6211	2,5801	2,5379
11	2,8536	2,7876	2,7186	2,6464	2,6090	2,5705	2,5309	2,4901	2,4480	2,4045
12	2,7534	2,6866	2,6169	2,5436	2,5055	2,4663	2,4259	2,3842	2,3410	2,2962
13	2,6710	2,6037	2,5331	2,4589	2,4202	2,3803	2,3392	2,2966	2,2524	2,2064
14	2,6022	2,5342	2,4630	2,3879	2,3487	2,3082	2,2664	2,2229	2,1778	2,1307
15	2,5437	2,4753	2,4034	2,3275	2,2878	2,2468	2,2043	2,1601	2,1141	2,0658
16	2,4935	2,4247	2,3522	2,2756	2,2354	2,1938	2,1507	2,1058	2,0589	2,0096
17	2,4499	2,3807	2,3077	2,2304	2,1898	2,1477	2,1040	2,0584	2,0107	1,9604
18	2,4117	2,3421	2,2686	2,1906	2,1497	2,1071	2,0629	2,0166	1,9681	1,9168
19	2,3779	2,3080	2,2341	2,1555	2,1141	2,0712	2,0264	1,9795	1,9302	1,8780
20	2,3479	2,2776	2,2033	2,1242	2,0825	2,0391	1,9938	1,9464	1,8963	1,8432

Nilai Kritis Distribusi F; $f\ 0{,}05\ (v_1, v_2)$ untuk v_2 10 s/d ∞ (lanjutan)



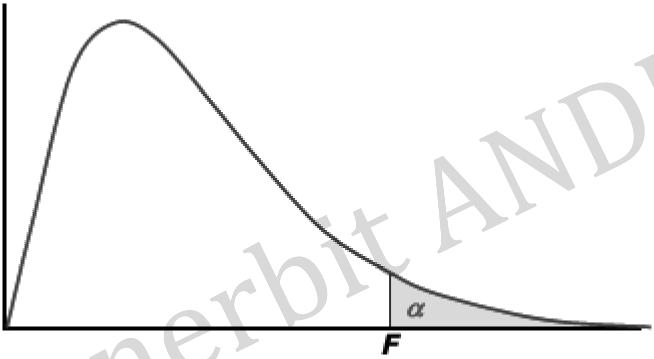
	υ1									
υ2	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
21	2,3210	2,2504	2,1757	2,0960	2,0540	2,0102	1,9645	1,9165	1,8657	1,8117
22	2,2967	2,2258	2,1508	2,0707	2,0283	1,9842	1,9380	1,8894	1,8380	1,7831
23	2,2747	2,2036	2,1282	2,0476	2,0050	1,9605	1,9139	1,8648	1,8128	1,7570
24	2,2547	2,1834	2,1077	2,0267	1,9838	1,9390	1,8920	1,8424	1,7896	1,7330
25	2,2365	2,1649	2,0889	2,0075	1,9643	1,9192	1,8718	1,8217	1,7684	1,7110
26	2,2197	2,1479	2,0716	1,9898	1,9464	1,9010	1,8533	1,8027	1,7488	1,6906
27	2,2043	2,1323	2,0558	1,9736	1,9299	1,8842	1,8361	1,7851	1,7306	1,6717
28	2,1900	2,1179	2,0411	1,9586	1,9147	1,8687	1,8203	1,7689	1,7138	1,6541
29	2,1768	2,1045	2,0275	1,9446	1,9005	1,8543	1,8055	1,7537	1,6981	1,6376
30	2,1646	2,0921	2,0148	1,9317	1,8874	1,8409	1,7918	1,7396	1,6835	1,6223
40	2,0772	2,0035	1,9245	1,8389	1,7929	1,7444	1,6928	1,6373	1,5766	1,5089
60	1,9926	1,9174	1,8364	1,7480	1,7001	1,6491	1,5943	1,5343	1,4673	1,3893
120	1,9105	1,8337	1,7505	1,6587	1,6084	1,5543	1,4952	1,4290	1,3519	1,2539
∞	1,8307	1,7522	1,6664	1,5705	1,5173	1,4591	1,3940	1,3180	1,2214	1,0000

TABEL 7

NILAI KRITIS DISTRIBUSI F

UNTUK *f 0,01*

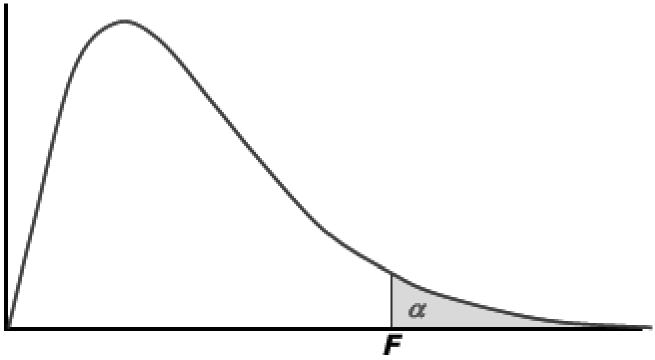
Nilai Kritis Distribusi F; $f\ 0{,}01\ (v_1, v_2)$ untuk v_2 1 s/d 9



υ2	υ1								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	4052.181	4999.500	5403.352	5624.583	5763.650	5858.986	5928.356	5981.070	6022.473
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158

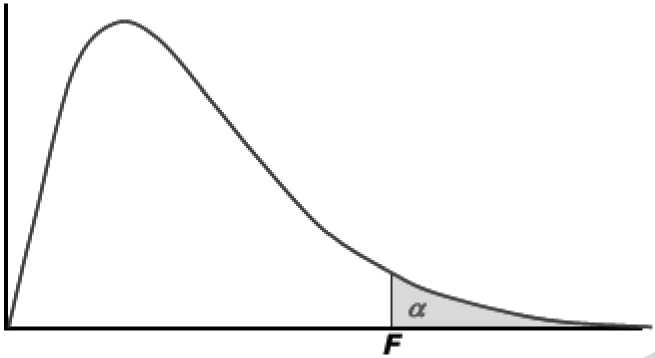
υ2	υ1								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457

Nilai Kritis Distribusi F; *f 0,01 (v_1, v_2)* untuk v_2 1 s/d 9 (lanjutan)



υ2	υ1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718
120	6.851	4.787	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559
∞	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407

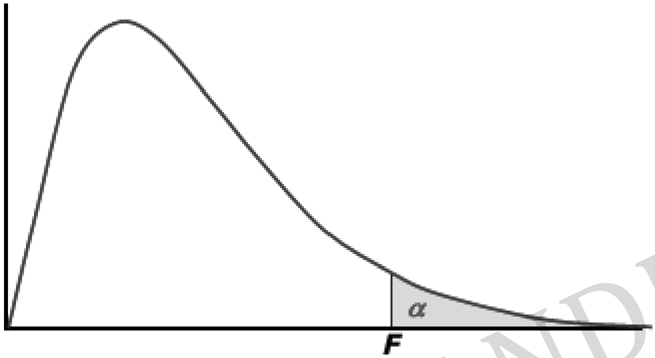
Nilai Kritis Distribusi F; *f 0,01* (v_1, v_2) untuk v_2 10 s/d ∞



	υ1									
υ2	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	6055.847	6106.321	6157.285	6208.730	6234.631	6260.649	6286.782	6313.030	6339.391	6365.864
2	99.399	99.416	99.433	99.449	99.458	99.466	99.474	99.482	99.491	99.499
3	27.229	27.052	26.872	26.690	26.598	26.505	26.411	26.316	26.221	26.125
4	14.546	14.374	14.198	14.020	13.929	13.838	13.745	13.652	13.558	13.463
5	10.051	9.888	9.722	9.553	9.466	9.379	9.291	9.202	9.112	9.020
6	7.874	7.718	7.559	7.396	7.313	7.229	7.143	7.057	6.969	6.880
7	6.620	6.469	6.314	6.155	6.074	5.992	5.908	5.824	5.737	5.650
8	5.814	5.667	5.515	5.359	5.279	5.198	5.116	5.032	4.946	4.859
9	5.257	5.111	4.962	4.808	4.729	4.649	4.567	4.483	4.398	4.311
10	4.849	4.706	4.558	4.405	4.327	4.247	4.165	4.082	3.996	3.909

	υ1									
υ2	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
11	4.539	4.397	4.251	4.099	4.021	3.941	3.860	3.776	3.690	3.602
12	4.296	4.155	4.010	3.858	3.780	3.701	3.619	3.535	3.449	3.361
13	4.100	3.960	3.815	3.665	3.587	3.507	3.425	3.341	3.255	3.165
14	3.939	3.800	3.656	3.505	3.427	3.348	3.266	3.181	3.094	3.004
15	3.805	3.666	3.522	3.372	3.294	3.214	3.132	3.047	2.959	2.868
16	3.691	3.553	3.409	3.259	3.181	3.101	3.018	2.933	2.845	2.753
17	3.593	3.455	3.312	3.162	3.084	3.003	2.920	2.835	2.746	2.653
18	3.508	3.371	3.227	3.077	2.999	2.919	2.835	2.749	2.660	2.566
19	3.434	3.297	3.153	3.003	2.925	2.844	2.761	2.674	2.584	2.489
20	3.368	3.231	3.088	2.938	2.859	2.778	2.695	2.608	2.517	2.421

Nilai Kritis Distribusi F; *f 0,01* (v_1, v_2) untuk v_2 10 s/d ∞ (lanjutan)



υ2	υ1									
	10	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
21	3,310	3,173	3,030	2,880	2,801	2,720	2,636	2.548	2.457	2.360
22	3,258	3,121	2,978	2,827	2,749	2,667	2,583	2,495	2,403	2,305
23	3,211	3,074	2,931	2,781	2,702	2,620	2,535	2,447	2,354	2,256
24	3,168	3,032	2,889	2,738	2,659	2,577	2,492	2,403	2,310	2,211
25	3,129	2,993	2,850	2,699	2,620	2,538	2,453	2,364	2,270	2,169
26	3,094	2,958	2,815	2,664	2,585	2,503	2,417	2,327	2,233	2,131
27	3,062	2,926	2,783	2,632	2,552	2,470	2,384	2,294	2,198	2,097
28	3,032	2,896	2,753	2,602	2,522	2,440	2,354	2,263	2,167	2,064
29	3,005	2,868	2,726	2,574	2,495	2,412	2,325	2,234	2,138	2,034
30	2,979	2,843	2,700	2,549	2,469	2,386	2,299	2,208	2,111	2,006
40	2,801	2,665	2,522	2,369	2,288	2,203	2,114	2,019	1,917	1,805
60	2,632	2,496	2,352	2,198	2,115	2,028	1,936	1,836	1,726	1,601
120	2,472	2,336	2,192	2,035	1,950	1,860	1,763	1,656	1,533	1,381
∞	2,321	2,185	2,039	1,878	1,791	1,696	1,592	1,473	1,325	1,000

STATISTIKA DAN PROBABILITAS

TENTANG PENULIS

Leksmono Suryo Putranto lahir di Jakarta 4 Maret tahun 1966. Penulis meraih gelar Ir. di Jurusan Teknik Sipil, Universitas Indonesia tahun 1990, kemudian pada tahun 1995 meraih gelar MT di ITB (Sistem dan Teknik Jalan Raya) dan pada tahun 2004 meraih gelar Ph.D. di The University of Leeds, U.K (Institute for Transport Studies). Saat ini penulis menjabat sebagai guru besar.

Dalam bidang akademik, penulis memiliki pengalaman sebagai reviewer, pimpinan komite ilmiah simposium, dan asesor. Selain itu juga memiliki pengalaman sebagai pengajar, pembimbing, penguji, dan pimpinan lembaga. Penulis juga berhasil mendapat hibah penelitian, termasuk hibah konferensi internasional dan hibah kursus internasional. Beberapa penghargaan akademik juga diraih oleh penulis, yaitu sebagai Dosen Berprestasi I Kopertis Wilayah III (1998) dan Dosen Berprestasi Universitas Tarumanagara (2012).

Penulis telah banyak memublikasikan karya ilmiah seperti jurnal internasional, jurnal nasional terakreditasi, jurnal nasional, *invited speaker* internasional, *invited speaker* nasional, prosiding pertemuan ilmiah internasional, prosiding pertemuan ilmiah nasional, tulisan media cetak, tulisan yang tidak diterbitkan (intern), dan lain sebagainya. Selain itu, penulis juga telah menerbitkan banyak buku ajar, antara lain *Perilaku Pengemudi Indonesia: Kumpulan Hasil Penelitian dan Alat Ukur*, *Statistika dan Probabilitas untuk Teknik Sipil*, *Rekayasa Lalu-lintas*, dan buku diktat kuliah.

Sebagai konsultan, penulis telah melaksanakan kegiatan sebagai konsultan untuk studi-studi skala nasional maupun internasional di bidang transportasi sebanyak lebih dari 50 kegiatan sejak tahun 1990-2022.

INDEKS