

SURAT - TUGAS

Nomor: 474-D/2427/FT-UNTAR/VI/2020

Dekan Fakultas Teknik Universitas Tarumanagara, dengan ini menugaskan kepada Saudara:

- 1. Ir. Aniek Prihatiningsih, M.M.**
- 2. Ir. Fannywati Itang, M.M.**

Untuk melaksanakan kegiatan **Penelitian Mandiri** dengan data sebagai berikut:

Judul Penelitian : Analisis Perhitungan Putaran Sudut dan Lendutan
Menggunakan Metode Analitik dan Numerik
Waktu Pelaksanaan : 01 Februari – 30 Mei 2020
Biaya : Rp. 3.000.000,-

Demikian Surat Tugas ini dibuat, untuk dilaksanakan dengan sebaik-baiknya dan melaporkan hasil penugasan tersebut kepada Dekan Fakultas Teknik Universitas Tarumanagara.

29 Juni 2020

Dekan



Harto Tanujaya, S.T., M.T., Ph.D.

Tembusan:

1. Kaprodi. Sarjana Teknik Sipil
2. Kasubag. Personalia
3. Arsip

PROGRAM STUDI :

- Sarjana Arsitektur, Magister Arsitektur, Sarjana Perencanaan Wilayah dan Kota, Magister Perencanaan Wilayah dan Kota
- Sarjana Teknik Sipil, Magister Teknik Sipil, Doktor Teknik Sipil
- Sarjana Teknik Mesin, Sarjana Teknik Industri, Sarjana Teknik Elektro

Jl. Letjen. S. Parman No.1 - Jakarta 11440

P : (021) 5663124 - 5672548 - 5638335

MPWK : (021) 56967322, MTS : (021) 5655801 - 5655802, DTS : (021) 56967015 - 5645907

F : (021) 5663277, MTS : (021) 5655805, MPWK : (021) 5645956

E : ft@untar.ac.id

SURAT KETERANGAN
No. 004 - Perpust TDI/UNTAR/V/2020

Kepala Perpustakaan Teknik, Desain dan Informatika Universitas Tarumanagara menerangkan bahwa buku dengan Judul:

Analisis Perhitungan Putaran Sudut dan Lendutan Menggunakan Metode Analitik dan Numerik, Mei 2020

Oleh : Ir. Aniek Prihatiningsih, M.M. dan Ir. Fanywati Itang, M.M.
Staf Pengajar Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik
Universitas Tarumanagara

Disimpan sebagai Koleksi Perpustakaan TDI Universitas Tarumanagara Jakarta.
Demikian Surat Keterangan ini dibuat, agar dapat digunakan sesuai dengan keperluannya.

Jakarta, 31 Mei 2020

Kepala Perpustakaan,



Dr. Harsiti, M.S.

**ANALISIS PERHITUNGAN PUTARAN SUDUT DAN
LENDUTAN MENGGUNAKAN METODE
ANALITIK DAN NUMERIK**



**Oleh:
Ir. Aniek Prihatiningsih, M.M.
Ir. Fannywati Itang, M.M.**

**Program Studi Sarjana Teknik Sipil
Fakultas Teknik
Universitas Tarumanagara
Jakarta
Mei 2020**

DAFTAR ISI

	Hal
DAFTAR ISI	i
DABTAR TABEL	ii
DAFTAR GAMBAR	iii
ABSTRAK	iv
BAB 1. PENDAHULUAN	1
BAB 2. KAJIAN PUSTAKA	3
BAB 3. METODE PENELITIAN	7
BAB 4. PAPARAN DATA DAN TEMUAN PENELITIAN	8
BAB 5. PEMBAHASAN	27
BAB 6 PENUTUP	29
DAFTAR PUSTAKA	30

DAFTAR TABEL

	Hal
Tabel 4.1. Perhitungan putaran sudut/EI secara analitik.	22
Tabel 4.2. Perhitungan lendutan/EI secara analitik.	23
Tabel 4.3. Perhitungan putaran sudut/EI dengan metode Euler	23
Tabel 4.4. Perhitungan lendutan/EI dengan metode Euler	24
Tabel 4.5. Perhitungan putaran sudut/EI dengan metode Heun	24
Tabel 4.6. Perhitungan putaran/EI dengan metode Heun	24
Tabel 4.7. Perhitungan putaran sudut/EI dengan metode Runge Kutta	25
Tabel 4.8. Perhitungan lendutan/EI dengan metode Runge Kutta	25
Tabel 4.9. Putaran sudut/EI dengan metode numerik	25
Tabel 4.10. Lendutan/EI dengan metode Numerik	26
Tabel 5.1. Perbandingan perhitungan analitik dan numerik untuk putaran sudut/EI dan presentase kesalahan.	27
Tabel 5.2. Perbandingan perhitungan analitik dan numerik untuk lendutan/EI dan presentase kesalahan	28

DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 2.1. Tafsiran geometri metode Euler	4
Gambar 2.2. Tafsiran geometri metode Heun	5
Gambar 4.1. Struktur yang akan dihitung pada penelitian	8
Gambar 4.2. Struktur untuk menghitung dengan metode Persamaan Differensial	8
Gambar 4.3. Struktur untuk menghitung dengan metode <i>Conjugated Beam</i>	11
Gambar 4.4. Struktur momen sebagai beban untuk metode <i>Conjugated Beam</i>	11
Gambar 4.5. Putaran sudut dan lendutan titik 1	12
Gambar 4.6. Putaran sudut dan lendutan titik 2	13
Gambar 4.7. Putaran sudut dan lendutan titik 3	14
Gambar 4.8. Putaran sudut dan lendutan titik 4	15
Gambar 4.9. Putaran sudut dan lendutan titik 4	16
Gambar 4.10. Bidang momen akibat beban	16
Gambar 4.11. Bidang momen akibat beban momen satuan dititik 1 (θ_1)	16
Gambar 4.12. Bidang momen akibat gaya satuan vertical di titik 1 (Y_1)	17
Gambar 4.13. Bidang momen akibat beban	18
Gambar 4.14. Bidang momen akibat beban momen satuan dititik 2 (θ_2)	18
Gambar 4.15. Bidang momen akibat beban satuan vertical dititik 2 (Y_2)	19
Gambar 4.16. Bidang momen akibat beban	19
Gambar 4.17. Bidang momen akibat beban momen satuan dititik 3 (θ_3)	20
Gambar 4.18. Bidang momen akibat beban satuan vertical dititik 3 (Y_3)	20
Gambar 4.19. Bidang momen akibat beban	21
Gambar 4.20. Bidang momen akibat beban momen satuan dititik 4 (θ_4)	21
Gambar 4.21. Bidang momen akibat beban satuan vertical dititik 4 (θ_4)	22

Abstrak.

Perhitungan secara analitik dan numerik merupakan penyelesaian solusi dari sebuah masalah. Kedua perhitungan ini dapat dilakukan, untuk persoalan yang tidak rumit perhitungan secara analitik dapat dilakukan tetapi pada persoalan yang rumit dimana penyelesaian secara analitik sudah tidak dapat dilakukan, maka metode numerik dapat membantu mencari solusinya. Pada penelitian ini akan membahas perhitungan putaran sudut dan lendutan dengan berbagai metode secara analitik dan numerik. Metode analitik menggunakan metode persamaan differensial, *Conjugated beam*, dan *unit load*. Metode numerik menggunakan persamaan defferensial dengan metode Euler, Huen, dan Runge Kutta.

Kata kunci: Metode persamaan diferensial, *Unit Load*, Euler, Huen, Runge Kutta

BAB I

PENDAHULUAN

Banyak cara penyelesaian perhitungan mencari putaran sudut dan lendutan. Penelitian ini membahas perhitungan putaran sudut dan lendutan balok di atas dua perletakan sendi dan rol, dengan beban segitiga tidak simetris. Perhitungan struktur balok tersebut dilakukan dengan dua acara, secara analitik dan numerik.

Perhitungan secara analitik dilakukan dengan metode persamaan differensial, *conjugate beam*, dan *unit load*. Untuk perhitungan numerik dilakukan dengan persamaan differensial menggunakan metode Euler, Heun, dan Runge Kutta.

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tak diketahui [3]. Hasil dari penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitik. Selisih dari keduanya disebut dengan galat (error). Metode numerik mampu memecahkan masalah yang rumit dari suatu persamaan yang sulit diselesaikan secara analitik [4]. Metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan matematika yang mempunyai masalah nilai awal. Jadi memerlukan nilai awal yang harus diketahui dan ini merupakan persyaratan dalam penyelesaian numerik.

Pada penyelesaian numerik dipilih menggunakan Persamaan diferensial biasa dengan metode Euler, Heun, dan Runge Kutta yang merupakan metode satu langkah. Metode Euler mempunyai ketelitian yang rendah. Metode Heun merupakan perbaikan dari metode Euler tetapi memiliki iterasi lebih banyak dibandingkan dengan metode Euler. Metode deret Taylor memiliki kekurangan yaitu memerlukan perhitungan turunan dan tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya. Metode Runge Kutta adalah metode alternatif dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Kelebihan metode ini memiliki ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan metode metode Euler, metode Heun dan metode deret Taylor.

1.1. Latar Belakang

Perhitungan putaran sudut dan lendutan diperlukan dalam perhitungan struktur. Sering kali perhitungan analitik tidak dapat menyelesaikan persamaan tersebut. Numerik adalah salah satu cara penyelesaian yang dapat membantu menyelesaikan persoalan tersebut.

Pada penelitian ini akan dilakukan perhitungan putaran sudut dan lendutan pada konstruksi sederhana yang dilakukan perhitungan secara analitik dan munerik dengan berbagai metode.

1.2. Rumusan Masalah

Persamaan differensial yang tidak terlalu sulit dapat diselesaikan secara analitik, tetapi bila persamaan differensial tersebut sudah tidak mungkin diselesaikan secara analitik, maka dilakukan penyelesaian secara numerik.

Penelitian ini menghitung putaran sudut dan lendutan pada balok di atas dua perletakan konstruksi statis tertentu dengan beberapa metode secara analitik dan numerik. Beban yang bekerja di atas konstruksi tersebut adalah beban segitiga tidak simetris dengan kekakuan dan elastisitas yang sama.

1.3. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menghitung putaran sudut dan lendutan dengan metode analitik dan numerik serta menghitung error/persentase kesalahan antara analitik dan numerik, serta menentukan metode numerik mana yang paling cocok dengan analitik

1.4. Kegunaan Penelitian

Membuktikan metode mana yang hasil perhitungan putaran sudut dan lendutan secara numerik paling mendekati perhitungan secara eksak.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Dasar teori untuk penelitian ini adalah sebagai berikut:

2.1. Metode Analitik

2.1.1. Metode Integrasi/Persamaan Differensial

Prinsip dasar dari metode Integrasi:

1. Buat persamaan momen akibat beban yang bekerja.
2. Derajat kelengkungan balok tergantung dari besar momen $\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$
3. Persamaan dasar untuk putaran sudut adalah $d\theta = \frac{M}{EI} dx = \frac{d^2y}{dx^2} dx \rightarrow \theta = \int \frac{M}{EI} dx$
4. Untuk lendutan/defleksi : $dy = \theta dx \rightarrow Y = \int \theta dx + C$

2.1.2. Metode Conjugated Beam

Prinsip dasar dari metode Conjugated Beam:

1. Bidang momen dibuat sebagai beban M/EI pada balok conjugate (balok padanan).
2. Hasil gaya geser dan momen pada balok conjugate merupakan nilai putaran sudut dan lendutan/defleksi pada balok sebenarnya.
3. Perlu dilakukan perubahan perletakan dari balok asal ke balok conjugate.

2.1.3. Metode Unit Load

Prinsip metode Unit Load:

1. Letakan beban virtual satu satuan pada titik pada elemen yang ditinjau.
2. Untuk putaran sudut beban satuan yang diberikan berupa beban momen satu satuan,
3. Untuk lendutan/defleksi beban satuan yang diberikan berupa beban terpusat satu satuan.
4. Buat persamaan momen akibat beban actual/beban luar M_x dan akibat beban virtual m_x

Rotasi $d\theta$ sepanjang dx akibat momen actual (akibat beban luar) M_x

$$d\theta = \frac{M_x}{EI} dx \dots\dots\dots (2.1)$$

Persamaan usaha internal dan eksternal dari sistim virtual dapat ditetapkan:

$$\theta = Y = \int_0^L m_x d\theta \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\theta = Y = \int_0^L m_x \frac{M_x}{EI} dx \dots\dots\dots (2.3)$$

Dimana:

θ = putaran sudut disuatu titik pada elemen

Y = lendutan/defleksi disuatu titik pada elemen.

2.2. Metode Numerik

Persamaan diferensial adalah gabungan antara fungsi yang tidak diketahui secara eksplisit dan turunan (diferensial)-nya. Sebagai contoh

$$\frac{dy}{dx} = x^3 + y = f(x, y)$$

Bentuk baku dari persamaan diferensial biasa untuk penyelesaian secara numerik adalah:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ dengan nilai awal } y(x_0) = y_0 \dots\dots\dots(2.4)$$

Penyelesaian persamaan diferensial biasa secara numerik berarti menghitung nilai fungsi di $x_{r+1} = x_r + h$, dengan h adalah ukuran langkah (step) setiap lelaran sementara nilai awal berfungsi untuk memulai lelaran. Metode yang akan dibahas dari metode yang paling dasar (Euler), perbaikan dari metode Euler yaitu metode Heun, dan metode yang paling mendekati analitik yaitu metode Runge Kutta.

Seluruh metode ini didasarkan pada deret Taylor:

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1}-x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1}-x_r)^2}{2!} y''(x_r) + \dots \dots\dots (2.5)$$

2.2.1. Metode Euler

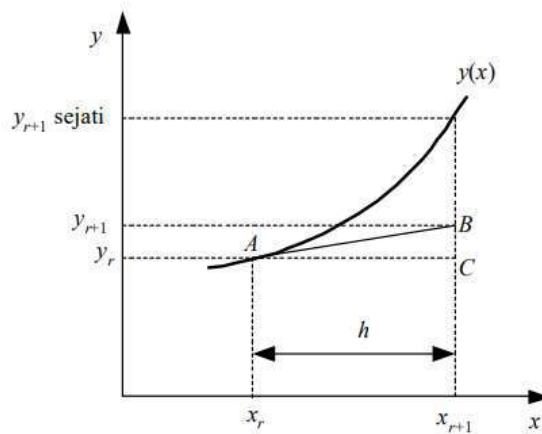
Pada metode Euler persamaan (2.4) dipotong sampai suku orde tiga, sehingga disebut juga metode orde pertama. Penulisan untuk rumus metode Euler disederhanakan menjadi:

$$y_{r+1} = y_r + h \cdot f(x_r, y_r) \text{ dengan nilai awal } y(x_0) = y_0 \dots\dots\dots(2.6)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_r) = f(x_r, y_r)$$

$$x_{r+1} - x_r = h$$

Jika dilakukan tafsiran secara geomtri pada metode Euler dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1. Tafsiran geometri metode Euler [2 : 368]

2.2.2. Metode Heun

Metode Heun merupakan salah satu peningkatan dari metode Euler. Metode ini melibatkan dua buah persamaan. Persamaan pertama disebut sebagai persamaan prediktor yang digunakan untuk memprediksi nilai integrasi awal (Persamaan (2.7)). Persamaan kedua disebut sebagai persamaan korektor yang mengoreksi hasil integrasi awal (Persamaan (2.8)). Metode Heun merupakan metode prediktor-korektor satu tahapan. Akurasi integrasi dapat ditingkatkan dengan melakukan koreksi ulang terhadap nilai koreksi semula menggunakan persamaan kedua.

$$y_{r+1}^0 = y_r + h \cdot f(x_r, y_r) \dots\dots\dots (2.7)$$

$$y_{r+1} = y_r + h \frac{f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_{r+1}^0)}{2} \dots\dots\dots (2.8)$$

Heun menyederhanakan penulisan persamaannya menjadi:

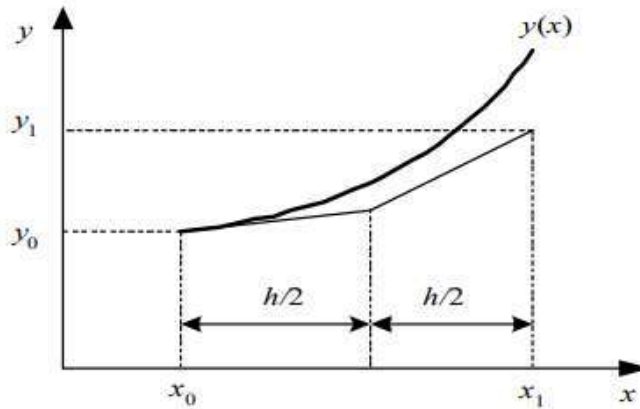
$$k_1 = hf(x_r, y_r) \dots\dots\dots (2.9)$$

$$k_2 = hf(x_{r+1}, y_r + k_1) \dots\dots\dots (2.10)$$

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \dots\dots\dots (2.11)$$

Pada metode Heun, solusi dari metode Euler dijadikan sebagai solusi perkiraan awal (predictor) (persamaan 2.7). Selanjutnya, solusi perkiraan awal ini diperbaiki dengan metode Heun (corrector) (persamaan 2.8).

Secara geometri metode Heun dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.2. Tafsiran geometri metode Heun [2 : 373]

2.2.3. Metode Runge Kutta

Metode Runge-Kutta orde 4 merupakan metode yang paling populer dalam penyelesaian persamaan diferensial. Metode ini dapat memperoleh akurasi deret Taylor tanpa memerlukan diferensiasi orde yang lebih tinggi. Metode Runge-Kutta orde 4 dituliskan ke dalam bentuk:

$$k_1 = hf(x_r, y_r) \dots\dots\dots (2.12)$$

$$k_2 = hf(x_r + \frac{h}{2}, y_r + \frac{1}{2}k_1) \dots\dots\dots (2.13)$$

$$k_3 = hf(x_r + \frac{h}{2}, y_r + \frac{1}{2}k_2) \dots\dots\dots (2.14)$$

$$k_4 = hf(x_r + h, y_r + k_3) \dots\dots\dots (2.15)$$

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \dots\dots\dots (2.16)$$

BAB III

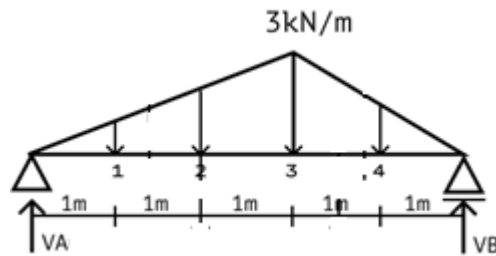
METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan dengan melakukan perhitungan secara analitik dan numerik. Pada perhitungan analitik dilakukan perhitungan dengan metode persamaan diferensial, *conjugate beam*, dan *unit load*. Perhitungan dilakukan secara eksak. Untuk perhitungan numerik menggunakan penyelesaian persamaan differensial dengan metode Euler, Heun, dan Runge Kutta dan dengan bantuan program excel.

Hasil perhitungan putaran sudut dan lendutan secara analitik dan numerik dibandingkan dengan mencari persen kesalahan antara analitik dan numerik serta menganalisis metode mana yang hasilnya paling mendekati metode analitik.

BAB IV
PAPARAN DATA DAN TEMUAN PENELITIAN

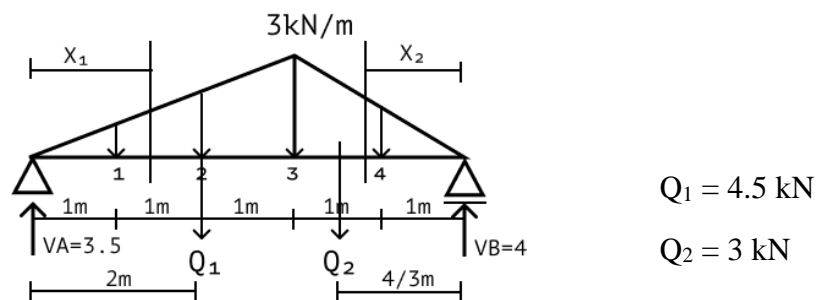
Pada penelitian ini akan dilakukan perhitungan putaran sudut dan lendutan untuk konstruksi seperti pada Gambar 4.1. di titik 1, 2, 3, dan 4.



Gambar 4.1. Struktur yang akan dihitung pada penelitian

4.1. Data Analitik

4.1.1. Metode Integrasi/Persamaan Differensial



Gambar 4.2. Struktur untuk menghitung dengan metode Persamaan Differensial

$$V_A = 3.5 \text{ kN}$$

$$V_B = 4 \text{ kN}$$

$$0 \leq X_1 \leq 3$$

$$M_{X_1} = 3.5 X_1 - \frac{1}{6} X_1^3$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{6} X_1^3 - 3.5 X_1 \dots\dots\dots (4.1)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{24} X_1^4 - 1.75 X_1^2 + C_1 \dots\dots\dots (4.2)$$

$$EIY = \frac{1}{120}X_1^5 - \frac{7}{12}X_1^3 + C_1X_1 + C_2 \dots\dots\dots (4.3)$$

$$0 \leq X_2 \leq 2$$

$$M_{X_2} = 34 X_2 - \frac{1}{4}X_2^3$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4}X_2^3 - 4 X_2 \dots\dots\dots (4.4)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{16}X_2^4 - 2 X_2^2 + C_3 \dots\dots\dots (4.5)$$

$$EIY = \frac{1}{80}X_2^5 - \frac{2}{3}X_2^3 + C_3X_2 + C_4 \dots\dots\dots (4.6)$$

Syarat batas

a. Lendutan titik A $\rightarrow Y_A = 0 \rightarrow$ Pers 3($X_1=0$) = 0 $\rightarrow C_2 = 0$

b. Lendutan titik B $\rightarrow Y_B = 0 \rightarrow$ Pers 6($X_2=0$) = 0 $\rightarrow C_4 = 0$

c. Putaran sudut di titik C $\rightarrow (\frac{dY}{dX})_{X_1=3} = (\frac{dY}{dX})_{X_2=2}$

$$\frac{1}{24}(3)^4 - 1.75(3)^2 + C_1 = -\frac{1}{16}(2)^4 + 2(2)^2 + C_3$$

$$-12.375 + C_1 = 7 - C_3$$

$$C_1 = 19.375 - C_3 \dots\dots\dots (4.7)$$

d. Lendutan di titik C $\rightarrow (Y)_{x_1=3} = (Y)_{x_2=2}$

$$\frac{1}{120}(3)^5 - \frac{7}{12}(3)^3 + 3C_1 = \frac{1}{80}(2)^5 - \frac{2}{3}(2)^3 + 2C_3$$

$$-13.725 + 3C_1 = -\frac{74}{15} + 2C_3 \dots\dots\dots (4.8)$$

Perhatikan persamaan (4.7) \rightarrow (4.8)

$$-13.725 + 3(19.375 - C_3) = -\frac{74}{15} + 2C_3$$

$$-13.725 + 58.125 - 3C_3 = -\frac{74}{15} + 2C_3$$

$$C_3 = \frac{148}{15}$$

$$C_1 = \frac{1141}{120}$$

Persamaan menjadi:

$$0 \leq X_1 \leq 3$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{24} X_1^4 - 1.75 X_1^2 + \frac{1141}{120} \dots\dots\dots (4.9)$$

$$EIY = \frac{1}{120} X_1^5 - \frac{7}{12} X_1^3 + \frac{1141}{120} X_1 \dots\dots\dots (4.10)$$

$$0 \leq X_2 \leq 2$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{16} X_2^4 - 2 X_2^2 + \frac{148}{15} \dots\dots\dots (4.11)$$

$$EIY = \frac{1}{80} X_2^5 - \frac{2}{3} X_2^3 + \frac{148}{15} X_2 \dots\dots\dots (4.12)$$

Putaran sudut dan lendutan titik 1 ($X_1 = 1$)

$$EI \frac{dy}{dx} = 7.8 \qquad EIY = \frac{134}{15} = 8.93$$

Putaran sudut dan lendutan titik 2 ($X_1 = 2$)

$$EI \frac{dy}{dx} = 3.175 \qquad EIY = \frac{877}{60} = 14.62$$

Putaran sudut dan lendutan titik 3 ($X_1 = 3$)

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{43}{15} = -2.867 \qquad EIY = 14.8$$

Putaran sudut dan lendutan titik 4 ($X_2 = 1$)

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1903}{240} = 7.929 \qquad EIY = 9.2125$$

Putaran sudut dan lendutan titik A ($X_1 = 0$)

$$EI \frac{dy}{dx} = 9.5052 \qquad EIY = 0$$

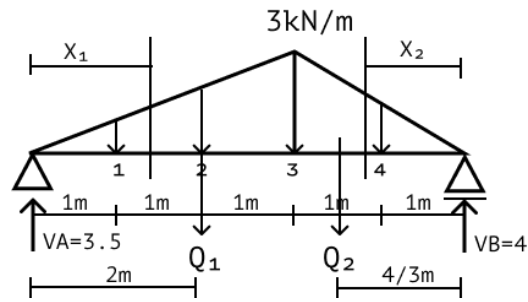
Putaran sudut dan lendutan titik 4 ($X_2 = 1$)

$$EI \frac{dy}{dx} = 9.8632 \qquad EIY = 0$$

4.1.2. Metode Conjugated Beam

Balok dengan beban merata segitiga sebesar $q = 3 \text{ kN/m}$

Balok conjugate dengan beban momen M/EI



Gambar 4.3. Struktur untuk menghitung dengan metode *Conjugated Beam*

$$0 \leq X_1 \leq 3$$

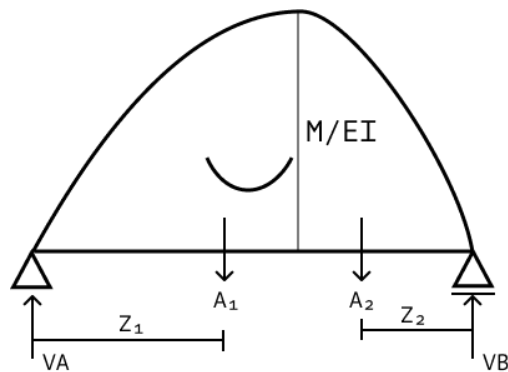
$$q_{x1} = X_1$$

$$M_{X1} = 3.5 X_1 - \frac{1}{6} X_1^3$$

$$0 \leq X_2 \leq 2$$

$$q_{x2} = 1.5 X_2$$

$$M_{X2} = 4 X_2 - \frac{1}{4} X_2^3$$



Gambar 4.4. Struktur monen sebagai beban untuk metode *Conjugated Beam*

Mencari besar A_1 , Z_1 , A_2 , Z_2

$$A_1 = \int_0^3 M_x dx$$

$$A_1 = \frac{1}{EI} \int_0^3 (3.5 X_1 - \frac{1}{6} X_1^3) dx$$

$$A_1 = \frac{12.375}{EI}$$

$$Z_1 A_1 = \int_0^3 M_x \cdot X dx$$

$$Z_1 A_1 = \frac{1}{EI} \int_0^3 (3.5 X_1^2 - \frac{1}{6} X_1^4) dx$$

$$Z_1 A_1 = \frac{23.4}{EI}$$

$$Z_1 = \frac{104}{55}$$

$$A_2 = \int_0^2 M_x dx$$

$$A_2 = \frac{1}{EI} \int_0^2 (4 X_2 - \frac{1}{4} X_2^3) dx$$

$$A_2 = \frac{7}{EI}$$

$$Z_2 A_2 = \frac{1}{EI} \int_0^3 (4 X_2^2 - \frac{1}{4} X_2^4) dx$$

$$Z_2 A_2 = \frac{138}{15EI}$$

$$Z_2 = \frac{136}{105}$$

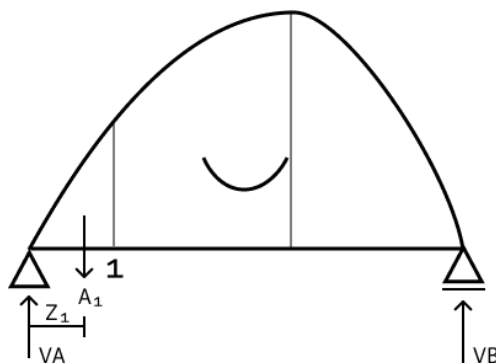
Besar reaksi V_A dan V_B

$$V_A = \frac{A_1 (5 - \frac{104}{55}) + A_2 (\frac{136}{105})}{5}$$

$$V_A = \frac{1141}{120EI}$$

$$V_B = \frac{A_1 (\frac{104}{55}) + A_2 (5 - \frac{136}{105})}{5}$$

$$V_B = \frac{148}{15EI}$$



Gambar 4.5. Putaran sudut dan lendutan titik 1

$$A_1 = \int_0^1 M_x dx$$

$$A_1 = \frac{1}{EI} \int_0^1 (3.5 X_1 - \frac{1}{6} X_1^3) dx$$

$$A_1 = \frac{41}{24EI}$$

$$Z_1 A_1 = \frac{1}{EI} \int_0^1 (3.5 X_1^2 - \frac{1}{6} X_1^4) dx$$

$$Z_1 A_1 = \frac{17}{15EI}$$

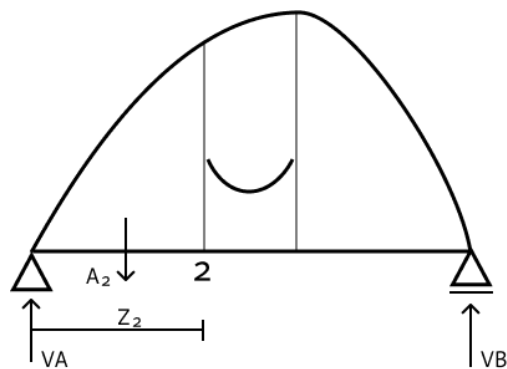
$$Z_1 = \frac{136}{205}$$

$$\theta_1 = V_A - A_1$$

$$\theta_1 = \frac{1141}{120EI} - \frac{41}{24EI} = \frac{39}{5EI} = \frac{7.8}{EI}$$

$$Y_1 = V_A \cdot 1 - A_1(1 - Z_1)$$

$$Y_1 = \frac{1141}{120EI} - \frac{41}{24EI} \left(\frac{69}{205} \right) = \frac{134}{15EI} = \frac{8.933}{EI}$$



Gambar 4.6. Putaran sudut dan lendutan titik 2

$$A_2 = \int_0^2 M_x dx$$

$$A_2 = \frac{1}{EI} \int_0^2 (3.5 X_1 - \frac{1}{6} X_1^3) dx$$

$$A_2 = \frac{19}{3EI}$$

$$Z_2 A_2 = \frac{1}{EI} \int_0^2 (3.5 X_1^2 - \frac{1}{6} X_1^4) dx$$

$$Z_2 A_2 = \frac{124}{15EI}$$

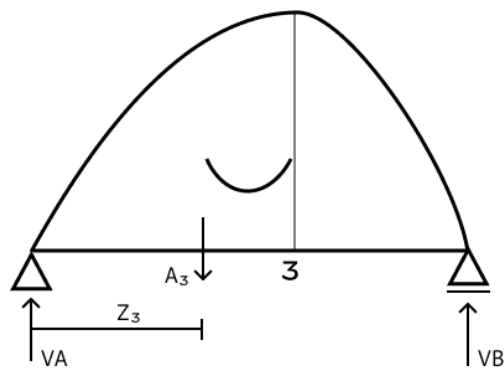
$$Z_2 = \frac{124}{95} m$$

$$\theta_2 = V_A - A_2$$

$$\theta_2 = \frac{1141}{120EI} - \frac{19}{3EI} = \frac{127}{40EI} = \frac{3.175}{EI}$$

$$Y_2 = V_A \cdot 2 - A_2(2 - Z_2)$$

$$Y_2 = \frac{1141}{120EI} \cdot 2 - \frac{19}{3EI} \left(\frac{66}{95}\right) = \frac{877}{60EI} = \frac{14.62}{EI}$$



Gambar 4.7. Putaran sudut dan lendutan titik 3

$$A_3 = \frac{1}{EI} \int_0^3 (3.5 X_1 - \frac{1}{6} X_1^3) dx$$

$$A_3 = \frac{12.375}{EI}$$

$$Z_3 A_3 = \frac{1}{EI} \int_0^3 (3.5 X_1^2 - \frac{1}{6} X_1^4) dx$$

$$Z_3 A_3 = \frac{23.4}{EI}$$

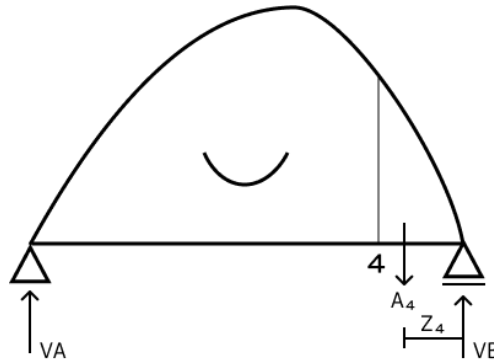
$$Z_3 = \frac{104}{55}$$

$$\theta_3 = V_A - A_3$$

$$\theta_3 = \frac{1141}{120EI} - \frac{12.375}{EI} = -\frac{43}{15EI} = -\frac{2.867}{EI}$$

$$Y_3 = V_A \cdot 3 - A_3(3 - Z_2)$$

$$Y_3 = \frac{1141}{120EI} \cdot 3 - \frac{12.375}{EI} \left(\frac{61}{55}\right) = \frac{14.8}{EI}$$



Gambar 4.8. Putaran sudut dan lendutan titik 4

$$A_4 = \frac{1}{EI} \int_0^1 \left(4X_2 - \frac{1}{4}X_2^3\right) dx$$

$$A_4 = \frac{31}{16EI}$$

$$Z_4 A_4 = \frac{1}{EI} \int_0^1 \left(4X_2^2 - \frac{1}{4}X_2^4\right) dx$$

$$Z_4 A_4 = \frac{77}{60EI}$$

$$Z_4 = \frac{308}{465}$$

$$\theta_4 = -V_B + A_4$$

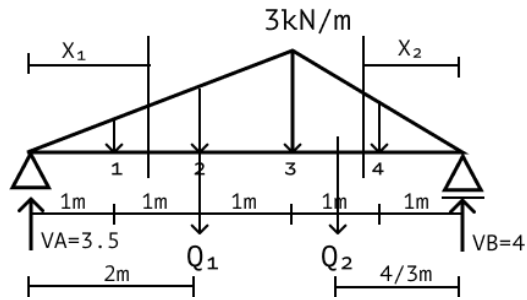
$$\theta_4 = -\frac{148}{15EI} + \frac{31}{16EI} = -\frac{1903}{240EI} = -\frac{7.929}{EI}$$

$$Y_4 = V_B \cdot 1 - A_4(1 - Z_4)$$

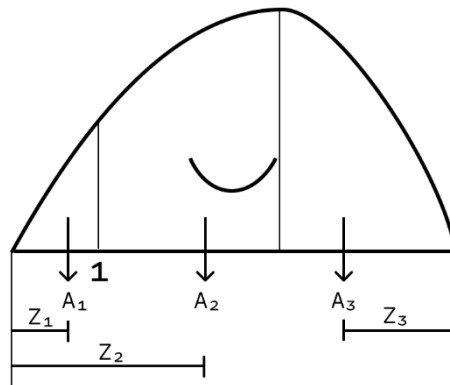
$$Y_4 = \frac{148}{15EI} - \frac{31}{16EI} \left(\frac{157}{465}\right) = \frac{737}{80EI} = \frac{9.2125}{EI}$$

4.1.3. Metode Unit Load

Akan dicari besar putaran sudut dan lendutan/defleksi titik 1, 2, 3 dan 4



Gambar 4.9. Putaran sudut dan lendutan titik 4



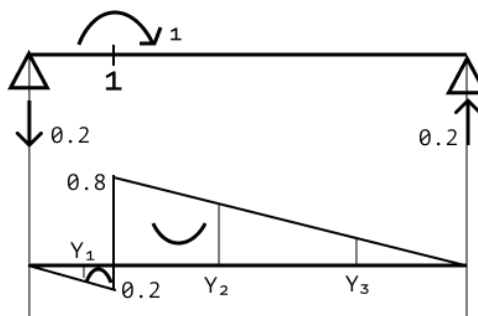
Gambar 4.10. Bidang momen akibat beban

$$A_1 = \frac{41}{24EI}, Z_1 = \frac{136}{205}$$

$$A_2 = \frac{32}{3EI}, Z_2 = 2.0875$$

$$A_3 = \frac{7}{EI}, Z_3 = \frac{136}{105}$$

4.1.3.1. Mencari besar putaran sudut dan lendutan/defleksi titik 1



Gambar 4.11. Bidang momen akibat beban momen satuan dititik 1 (θ_1)

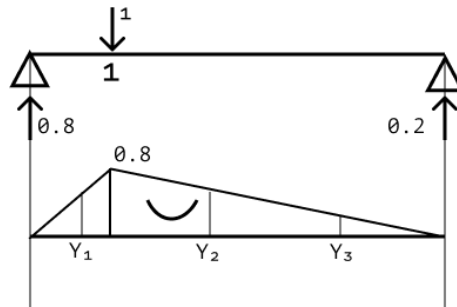
$$Y_1 = \frac{136}{1025}$$

$$Y_2 = 0.5825$$

$$Y_3 = \frac{136}{525}$$

$$\theta_1 = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3$$

$$\theta_1 = -\frac{41}{24EI} \left(\frac{136}{1025} \right) + \frac{32}{3EI} (0.5825) + \frac{7}{EI} \left(\frac{136}{525} \right) = \frac{7.8}{EI}$$



Gambar 4.12. Bidang momen akibat gaya satuan vertical di titik 1 (Y_1)

$$Y_1 = \frac{544}{1025}$$

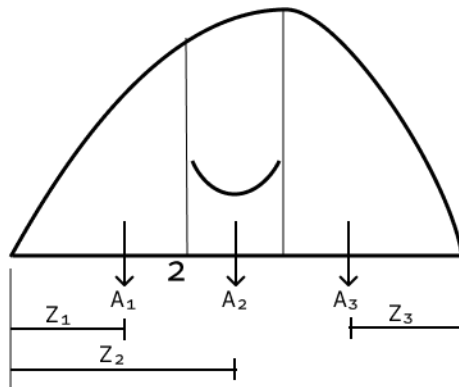
$$Y_2 = 0.5825$$

$$Y_3 = \frac{136}{525}$$

$$Y_1 = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3$$

$$Y_1 = \frac{41}{24EI} \left(\frac{544}{1025} \right) + \frac{32}{3EI} (0.5825) + \frac{7}{EI} \left(\frac{136}{525} \right) = \frac{134}{15EI} = \frac{8.933}{EI}$$

4.1.3.2. Mencari besar putaran sudut dan lendutan/defleksi titik 2

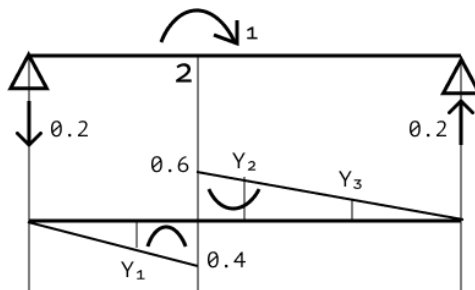


Gambar 4.13. Bidang momen akibat beban

$$A_1 = \frac{19}{3EI}, Z_1 = \frac{124}{95}$$

$$A_2 = \frac{145}{24EI}, Z_2 = \frac{1816}{725}$$

$$A_3 = \frac{7}{EI}, Z_3 = \frac{136}{105}$$



Gambar 4.14. Bidang momen akibat beban momen satuan dititik 2 (θ_2)

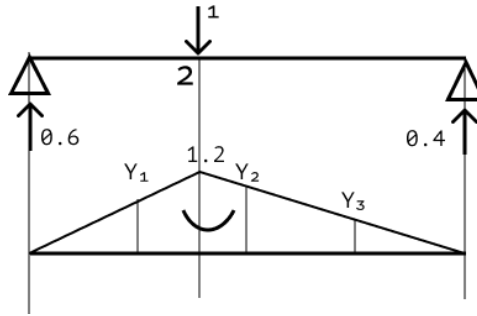
$$Y_1 = \frac{124}{475}$$

$$Y_2 = \frac{1809}{3625}$$

$$Y_3 = \frac{136}{525}$$

$$\theta_2 = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3$$

$$\theta_2 = -\frac{19}{3EI} \left(\frac{124}{475} \right) + \frac{145}{24EI} \left(\frac{1809}{3625} \right) + \frac{7}{EI} \left(\frac{136}{525} \right) = \frac{3.175}{EI}$$



Gambar 4.15. Bidang momen akibat beban satuan vertical dititik 2 (Y_2)

$$Y_1 = \frac{372}{475}$$

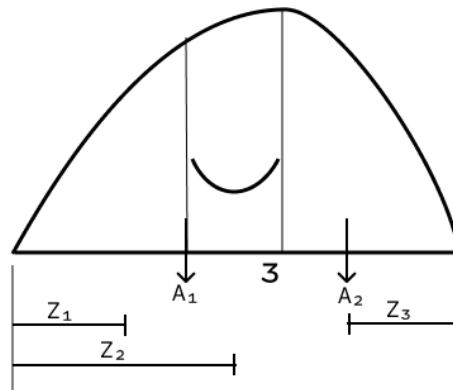
$$Y_2 = \frac{3618}{3625}$$

$$Y_3 = \frac{272}{525}$$

$$Y_2 = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3$$

$$Y_2 = \frac{19}{3EI} \left(\frac{372}{475} \right) + \frac{145}{24EI} \left(\frac{3618}{3625} \right) + \frac{7}{EI} \left(\frac{272}{525} \right) = \frac{877}{60EI} = \frac{14.62}{EI}$$

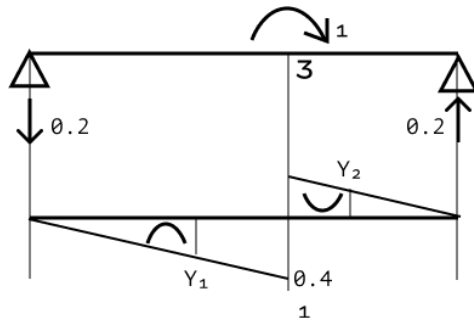
4.1.3.3. Mencari besar putaran sudut dan lendutan/defleksi titik 3



Gambar 4.16. Bidang momen akibat beban

$$A_1 = \frac{12.375}{EI}, Z_1 = \frac{104}{55}$$

$$A_2 = \frac{7}{EI}, Z_2 = \frac{136}{105}$$



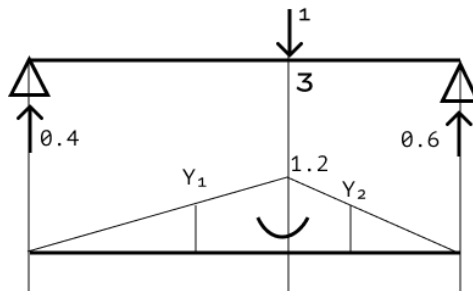
Gambar 4.17. Bidang momen akibat beban momen satuan dititik 3 (θ_3)

$$Y_1 = \frac{104}{275}$$

$$Y_2 = \frac{136}{525}$$

$$\theta_3 = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3$$

$$\theta_3 = -\frac{12.375}{EI} \left(\frac{104}{275} \right) + \frac{7}{EI} \left(\frac{136}{525} \right) = -\frac{43}{15EI} = -\frac{2.867}{EI}$$



Gambar 4.18. Bidang momen akibat beban satuan vertical dititik 3 (Y_3)

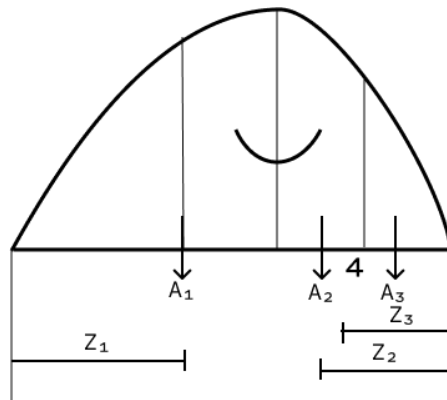
$$Y_1 = \frac{208}{275}$$

$$Y_2 = \frac{136}{175}$$

$$Y_3 = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3$$

$$Y_3 = \frac{12.375}{EI} \left(\frac{208}{275} \right) + \frac{7}{EI} \left(\frac{136}{175} \right) = \frac{14.8}{EI}$$

4.1.3.4. Mencari besar putaran sudut dan lendutan/defleksi titik 4

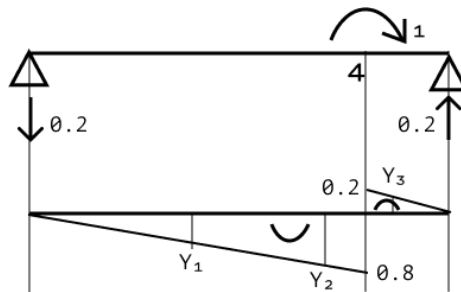


Gambar 4.19. Bidang momen akibat beban

$$A_1 = \frac{12.375}{EI}, Z_1 = \frac{104}{55}$$

$$A_2 = \frac{5.0625}{EI}, Z_2 = \frac{1868}{1215}$$

$$A_3 = \frac{31}{16EI}, Z_3 = \frac{308}{465}$$



Gambar 4.20. Bidang momen akibat beban momen satuan dititik 4 (θ_4)

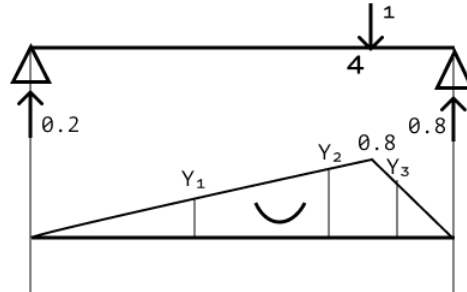
$$Y_1 = \frac{104}{55}$$

$$Y_2 = \frac{4207}{6075}$$

$$Y_3 = \frac{308}{2325}$$

$$\theta_4 = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3$$

$$\theta_4 = -\frac{12.375}{EI} \left(\frac{104}{275}\right) - \frac{5.0625}{EI} \left(\frac{4207}{6075}\right) + \frac{31}{16EI} \left(\frac{308}{2325}\right) = -\frac{1903}{240EI} = -\frac{7.929}{EI}$$



Gambar 4.21. Bidang momen akibat beban satuan vertical dititik 4 (θ_4)

$$Y_1 = \frac{104}{275}$$

$$Y_2 = \frac{4207}{6075}$$

$$Y_3 = \frac{1232}{2325}$$

$$Y_4 = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3$$

$$Y_4 = \frac{12.375}{EI} \left(\frac{104}{275}\right) + \frac{5.0625}{EI} \left(\frac{4207}{6075}\right) + \frac{31}{16EI} \left(\frac{2132}{2325}\right) = \frac{9.2125}{EI}$$

Dari perhitungan analitik dapat disimpulkan putaran sudut dan lendutan seperti terlihat dalam Tabel 4.1. dan Tabel 4.2.

Tabel 4.1. Perhitungan putaran sudut/EI secara analitik.

n	x	Persamaan Differensial	Conjugateg Beam	Unit Load
A	0	9.5052	9.5052	9.5052
1	1	7.8000	7.8000	7.8000
2	2	3.1750	3.1750	3.1750
3	3	-2.8670	2.8670	2.8670
4	1	7.9290	7.9290	7.9290
B	0	9.8632	9.8632	9.8632

Tabel 4.2. Perhitungan lendutan/EI secara analitik

n	x	Persamaan Differensial	Conjugateg Beam	Unit Load
A	0	0	0	0
1	1	8.9333	8.9333	8.9333
2	2	14.6200	14.6200	14.6200
3	3	14.8000	14.8000	14.8000
4	1	9.2125	9.2125	9.2125
B	0	0	0	0

4.2. Data Numerik

Pada metode numerik ini akan menggunakan bantuan komputer dan yang digunakan adalah program excel. Persamaan yang akan digunakan untuk terhitung metode numerik ini diambil dari perhitungan secara analitik dengan metode persamaan differensial. Persamaan 4.3 dan 4.4 akan digunakan untuk menghitung putaran sudut pada metode numerik dan persamaan 4.9 dan 4.11 akan digunakan untuk menghitung lendutan secara numerik.

Untuk nilai awal diambil dari perhitungan analitik. Putaran sudut di titik A sebesar $9.5251/EI$ sedangkan untuk di titik B sebesar $9.8632/EI$. Nilai awal lendutan dititik A sebesar $Y_A = 0$ dan untuk dititik B lendutan sebesar $Y_B = 0$.

4.2.1 Metode Euler

Perhitungan metode Euler untuk nilai putaran sudut dapat dilihat pada Tabel 4.3. dan untuk lendutan dapat dilihat pada Tabel 4.4.

Tabel 4.3. Perhitungan putaran sudut/EI dengan metode Euler

n	x	P_{n+1} Euler
A	0	9.5052
1	1	9.5052
2	2	6.1719
3	3	0.5052
4	1	9.8632
B	0	9.8632

Tabel 4.4. Perhitungan lendutan/EI dengan metode Euler

n	x	yn+1 Euler
A	0	0.0000
1	1	9.5052
2	2	17.3021
3	3	20.4739
4	1	9.8632
B	0	0.0000

4.2.1. Metode Heun

Perhitungan metode Heun untuk nilai putaran sudut dapat dilihat pada Tabel 4.5. dan untuk lendutan dapat dilihat pada Tabel 4.6.

Tabel 4.5. Perhitungan putaran sudut/EI dengan metode Heun

n	x	k1	k2	Pn+1 (Heun)
A	0			9.5052
1	1	0.0000	-3.3333	7.8385
2	2	-3.3333	-5.6667	3.3385
3	3	-5.6667	-6.0000	-2.4948
4	1	0.0000	-3.7500	7.9882
B	0			9.8632

Tabel 4.6. Perhitungan putaran/EI dengan metode Heun

n	x	k1	k2	yn+1 (Heun)
A	0			0.0000
1	1	9.5052	7.7969	8.6510
2	2	7.7969	3.1719	14.1354
3	3	3.1719	-2.8698	14.2864
4	1	9.8632	7.9257	8.8945
B	0			0.0000

4.2.2. Metode Runge Kutta

Perhitungan metode Heun untuk nilai putaran sudut dapat dilihat pada Tabel 4.7. dan untuk lendutan dapat dilihat pada Tabel 4.8.

Tabel 4.7. Perhitungan putaran sudut/EI dengan metode Runge Kutta

n	x	k1	k2	k3	k4	Pn+1
A	0					9.5052
1	1	0.0000	-1.7292	-1.7292	-3.3333	7.7969
2	2	-3.4375	-4.6875	-4.6875	-5.6667	3.1545
3	3	-6.5000	-6.1458	-6.1458	-6.0000	-3.0261
4	1	0.0000	-1.9688	-1.9688	-3.7500	7.9257
B	0					9.8632

Tabel 4.8. Perhitungan lendutan/EI dengan metode Runge Kutta

n	x	k1	k2	k3	k4	yn+1
A	0					0.0000
1	1	9.5052	9.0703	9.0703	7.7969	8.9305
2	2	7.7969	5.7786	5.7786	3.1719	14.6111
3	3	3.1719	0.1953	0.1953	-2.8698	14.7916
4	1	9.8632	9.3671	9.3671	7.9257	9.2096
B	0					0.0000

Dari perhitungan numerik untuk putaran sudut dapat dilihat pada Tabel 4.9. dan lendutan dapat dilihat pada Tabel 4.10.

Tabel 4.9. Putaran sudut/EI dengan metode numerik

n	x	Euler	Heun	Runge Kutta
A	0	9.5052	9.5052	9.5052
1	1	9.5052	7.8385	7.7969
2	2	6.1719	3.3385	3.1545
3	3	0.5052	-2.4948	-3.0261
4	1	9.8632	7.9882	7.9257
B	0	9.8632	9.8632	9.8632

Tabel 4.10. Lendutan/EI dengan metode Numerik

n	x	Euler	Heun	Runge Kutta
A	0	0.0000	0.0000	0.0000
1	1	9.5052	8.6510	8.9305
2	2	17.3021	14.1354	14.6111
3	3	20.4739	14.2864	14.7916
4	1	9.8632	8.8945	9.2096
B	0	0.0000	0.0000	0.0000

BAB V

PEMBAHASAN

Perhitungan secara analitik untuk putaran sudut dan lendutan pada ketiga metode yaitu persamaan diferensial, *conjugated beam*, dan *unit load* tidak ada perbedaan. Terlihat pada Tabel 4.1. dan Tabel 4.2. Sedangkan untuk perhitungan secara numerik baik untuk putaran sudut dan lendutan, ketiga metode menghasilkan nilai yang berbeda-beda. Metode Euler menghaikkan nilai yang paling jauh terhadap hasil yang diperoleh secara analitik.

Pada Tabel 5.1. memperlihatkan perbandingan putaran sudut antara perhitungan analitik dan numerik dengan berbagai metode dan persentase kesalahan antara analitik dan numerik. Terlihat disini metode Runge Kutta menunjukkan nilai putaran sudut paling mendekati analitik. Persentase kesalahan di bawah 0.65% kecuali pada titik 3 kesalahan mencapai 5.55%. Metode Euler menunjukkan kesalahan yang paling besar. Terlihat pada metode Euler kesalahan putaran sudut mencapai nilai 94.39%, sedangkan pada metode Heun yang tertinggi sebesar 12.98%.

Tabel 5.1. Perbandingan perhitungan analitik dan numerik untuk putaran sudut/EI dan presentase kesalahan.

n	x	Euler	Heun	Runge Kutta	Eksak	Persentase kesalahan		
						Euler	Heun	Runge Kutta
A	0	9.5052	9.5052	9.5052	9.5052	0.00%	0.00%	0.00%
1	1	9.5052	7.8385	7.7969	7.8000	-21.86%	-0.49%	0.04%
2	2	6.1719	3.3385	3.1545	3.1750	-94.39%	-5.15%	0.65%
3	3	0.5052	-2.4948	-3.0261	2.8670	82.38%	12.98%	-5.55%
4	1	9.8632	7.9882	7.9257	7.9290	-24.39%	-0.75%	0.04%
B	0	9.8632	9.8632	9.8632	9.8632	0.00%	0.00%	0.00%

Pada Tabel 5.2. memperlihatkan perbandingan lendutan antara perhitungan analitik dan numerik dengan berbagai metode dan persentase kesalahannya. Metode Euler kesalahan lendutan tertinggi mencapai 38.34%, sedangkan pada metode Heun kesalahan tertinggi mencapai 3.47%, metode Runge Kutta menunjukkan nilai putaran sudut paling mendekati analitik. Persentase kesalahan di bawah 0.06%.

Tabel 5.2. Perbandingan perhitungan analitik dan numerik untuk lendutan/EI dan presentase kesalahan

n	x	Euler	Heun	Runge Kutta	Eksak	Persentase kesalahan		
						Euler	Heun	Runge Kutta
A	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000			
1	1	9.5052	8.6510	8.9305	8.9330	-6.41%	3.16%	0.03%
2	2	17.3021	14.1354	14.6111	14.6200	-18.35%	3.31%	0.06%
3	3	20.4739	14.2864	14.7916	14.8000	-38.34%	3.47%	0.06%
4	1	9.8632	8.8945	9.2096	9.2125	-7.06%	3.45%	0.03%
B	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000			

BAB VI

PENUTUP

Analisis perhitungan putaran sudut dan lendutan menggunakan metode analitik dan numerik pada kasus di atas dapat disimpulkan bahwa:

1. Perhitungan secara analitik untuk metode persamaan differensial, *conjugated beam*, dan *unit load* menghasilkan putaran sudut dan lendutan menghasilkan nilai yang sama.
2. Perhitungan secara numerik dengan persamaan differensial menggunakan metode Euler, Heun, dan Runge Kutta menghasilkan putaran sudut dan lendutan yang tidak sama.
3. Metode Runge Kutta merupakan metode yang paling mendekati analitik baik untuk putaran sudut maupun lendutan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Ayres, F dan Ault J. C. 1981. Persamaan Diferensial dalam Satuan SI (Metrik). Edisi Seri Buku Schaum, Ratna, L (alih bahasa). Erlangga: Jakarta
- [2]. Chapra, Steven C. dan Canale, Raymond P., 1991. Metode Numerik Untuk Teknik dengan Penerapan Pada Komputer Pribadi. Sardy (alih bahasa). Universitas Indonesia: Jakarta
- [3]. Finizio, N. dan Ladas G. Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern [Santoso, W, trans]. Jakarta: Edisi ke-2. Erlangga; 1988.
- [4]. Munir, R. Metode Numerik. Bandung: Informatika; 2003.
-
1. Armenakas, A.E. Classical Structural Mechanics, A Modern Approach. New York: McGraw-Hill Book Co., 1988
 2. Timoshenko. Elements of Strength of Materials. D Van Nostrand Co. Inc., Princeton N.J., 1962
 3. R.C. Hibbeler. Mechanics of Materials. Pearson Prentice Hall, New Jersey, 6th ed, 2005
 4. Ferdinand P. Beer. Mechanics of Materials. The McGraw-Hill Companies, Inc, 3rd ed, 2002
 5. Soemono, Tegangan 1, Institut Teknologi Bandung, (1978).
 6. Ferdinand L. Singer, Andrew Pytel, Darwin Sebayang. Kekuatan Bahan (Strength of materials), Airlangga, 1985,
 7. Binsar Hariandja, Mekanika Bahan dan Pengantar teori Elastisitas, Erlangga (1997).

SURAT KETERANGAN
No. 004 - Perpust TDI/UNTAR/V/2020

Kepala Perpustakaan Teknik, Desain dan Informatika Universitas Tarumanagara menerangkan bahwa buku dengan Judul:

Analisis Perhitungan Putaran Sudut dan Lendutan Menggunakan Metode Analitik dan Numerik, Mei 2020

Oleh : Ir. Aniek Prihatiningsih, M.M. dan Ir. Fanywati Itang, M.M.
Staf Pengajar Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik
Universitas Tarumanagara

Disimpan sebagai Koleksi Perpustakaan TDI Universitas Tarumanagara Jakarta.
Demikian Surat Keterangan ini dibuat, agar dapat digunakan sesuai dengan keperluannya.

Jakarta, 31 Mei 2020

Kepala Perpustakaan,



Dr. Harsiti, M.S.