

**PENGARUH KOEFISIEN KEKAKUAN ROTASI PERLETAKAN
TERHADAP RESPONS DINAMIK PELAT BETON AKIBAT BEBAN
TRANSVERSAL BERJALAN**



Nama : Yenny Untari Liucius
NIM : 327152030
Pembimbing : Prof. Ir. Sofia W. Alisjahbana, M.Sc., Ph.D.

TESIS

**Diajukan untuk memenuhi persyaratan dalam
mendapatkan gelar Magister Teknik**

**PROGRAM MAGISTER TEKNIK SIPIL
UNIVERSITAS TARUMANAGARA
JAKARTA**

2017

UNIVERSITAS TARUMANAGARA

**MAGISTER TEKNIK SIPIL
KONSENTRASI STRUKTUR**

Jakarta, 3 Juli 2017

Kami yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan bahwa tesis yang dibuat oleh

Yenny Untari Liucius

Dengan judul

**PENGARUH KOEFISIEN KEKAKUAN ROTASI PERLETAKAN
TERHADAP RESPONS DINAMIK PELAT BETON AKIBAT
BEBAN TRANSVERSAL BERJALAN**

dapat diterima sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar

MAGISTER TEKNIK

Komisi Sidang Pengujian :

Prof. Ir. Sofia W. Alisjahbana, M.Sc., Ph.D.
Pembimbing / Penguji

Prof. Ir. Roesdiman Soegiarso, M.Sc., Ph.D
Penguji

Dr. Ir. Onnyxiforus Gondokusumo, M.Eng.
Penguji

PERNYATAAN :

Dengan sejujur-jujurnya saya menyatakan bahwa tesis ini dibuat oleh saya sendiri. Bila di kemudian hari terbukti adanya penjiplakan saya bersedia menerima sanksi yang diberikan oleh Universitas Tarumanagara.

Jakarta, 3 Juli 2017

(_____)

Nama Lengkap

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA TULIS

Yang bertandatangan di bawah ini :

Nama : Yenny Untari Liucius

NIM : 327152030

Program Studi : Magister Teknik

Menyatakan bahwa Tesis dengan judul :

PENGARUH KOEFISIEN KEKAKUAN ROTASI PERLETAKAN TERHADAP RESPONS DINAMIK PELAT BETON AKIBAT BEBAN TRANSVERSAL BERJALAN

Merupakan hasil karya asli, bukan jiplakan dari karya tulis orang lain. Jika di kemudian hari ternyata tidak sesuai dengan pernyataan di atas, penulis bersedia untuk mempertanggungjawabkannya.

Jakarta, 3 Juli 2017

(Yenny Untari Liucius)

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini dengan baik dan tepat pada waktunya.

Tesis dengan judul “PENGARUH KOEFISIEN ROTASI PERLETAKAN TERHADAP RESPONS DINAMIK PELAT BETON AKIBAT BEBAN TRANSVERSAL BERJALAN” ini ditulis karena merupakan salah satu persyaratan akademik yang harus dipenuhi dalam menyelesaikan pendidikan dan memperoleh gelar Magister Teknik Sipil Universitas Tarumanagara, Jakarta.

Penulis menyadari bahwa selesainya tesis ini tidak terlepas dari bimbingan, bantuan serta dorongan dari berbagai pihak yang penulis terima sejak awal hingga berakhirnya penulisan tesis ini. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Ibu Prof. Ir. Sofia W. Alisjahbana, M.Sc., Ph.D. selaku dosen pembimbing tesis penulis yang telah banyak meluangkan waktu, tenaga dan pikiran serta memberikan bimbingan, masukan, dan motivasi dalam menyelesaikan tesis ini.
2. Dr. Ir. Onnyxiforus Gondokusumo, M.Eng., selaku Ketua Program Magister Teknik Sipil Universitas Tarumanagara yang telah banyak memberikan pengarahan serta motivasi bagi penulis.
3. Seluruh dosen Program Magister Teknik Sipil Universitas Tarumanagara yang telah mengajarkan banyak ilmu serta memberikan saran dan dukungan.
4. Seluruh karyawan Program Magister Teknik Sipil Universitas Tarumanagara, terutama untuk Bu Erna, Pak Paiman, dan Pak Dargo yang telah membantu dan mendukung penulis dalam masa perkuliahan.
5. Kedua orang tua tercinta, papa dan mama yang senantiasa penulis banggakan dan selalu mendukung penulis.
6. Rocky Thoeng, S.T. dan Priscilla Karla, S.T. selaku *partner* di bawah bimbingan Prof. Sofia yang senantiasa memberikan banyak bantuan, dukungan, dan arahan dalam penyusunan tesis ini.

7. Teman-teman seperjuangan angkatan 2015 dan angkatan 2016, terutama kepada Andre Ongkosurya, S.T, M.T., Gregorius Filipus, S.T., M.T., dan Muhammad Fahmi, S.T., M.T. yang telah memberikan banyak bantuan dan arahan selama perkuliahan maupun penyusunan tesis.
8. Direktur, Fera Melani, S.T. selaku manager penulis, dan rekan-rekan PT Ketira Engineering Consultants yang telah memberikan kesempatan serta dukungan moril kepada penulis untuk melakukan penelitian ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah memberikan dukungan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa tesis ini masih memiliki banyak kekurangan yang disebabkan oleh keterbatasan pengetahuan dan kurangnya pemahaman penulis. Oleh karena itu, penulis sangat terbuka akan kritik dan saran dari pembaca yang sangat bermanfaat bagi penulis demi perbaikan di masa yang akan datang. Akhir kata penulis berharap semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Jakarta, Juli 2017

Penulis

ABSTRAK

Modified Bolotin Method adalah metode yang digunakan dalam penyelesaian masalah pelat dengan perletakan *semi rigid*. Tipe perletakan ini memiliki nilai kekakuan rotasi tersendiri untuk menunjukkan tingkat *semi rigid* tersebut. Analisis ini mempelajari pengaruh perbedaan koefisien kekakuan rotasi *semi rigid non-dimensional* (\bar{k}) terhadap respons dinamik pelat. Besaran koefisien yang dianalisis adalah 0,3 untuk kondisi mendekati sendi; 0,5 untuk kondisi *semi rigid* diantara sendi dan jepit; 0,7 untuk kondisi mendekati jepit. Pelat dimodelkan sebagai pelat isotropik dan elastis dengan menggunakan batasan dari teori lendutan kecil dan teori pelat Kirchoff. Penyelesaian masalah ragam getar pelat diselesaikan dengan bantuan dua persamaan transendental. Kemudian pelat dibebani dengan beban transversal yang bergerak dengan kecepatan konstan. Analisis dilakukan saat beban masih berada di dalam pelat ($0 < t < t_0$) dan saat beban telah meninggalkan pelat ($t > t_0$). Hasil analisis yang diperoleh adalah semakin mendekati kondisi sendi, lendutan tengah bentang saat beban di tengah pelat akan semakin besar. Perbedaan lendutan tengah bentang pada $\bar{k} = 0,3$ dan $\bar{k} = 0,7$ mencapai 3,32% saat beban di dalam pelat dan sebesar 69,45% saat beban telah meninggalkan pelat. Momen tengah bentang yang dihasilkan juga semakin besar dengan peningkatan sebesar 2,3% saat beban di dalam pelat dan sebesar 59,8% saat beban telah meninggalkan pelat. Hal yang serupa juga ditunjukkan pada gaya geser yang terjadi. Gaya geser meningkat seiring dengan semakin kecilnya \bar{k} . Peningkatan yang terjadi mencapai 2,19% untuk kondisi beban di dalam pelat dan 83,06% untuk kondisi beban setelah meninggalkan pelat.

Kata-kata kunci: *Modified Bolotin Method*, *semi rigid*, koefisien kekakuan rotasi, *non-dimensional*, isotropik, elastis, beban transversal, lendutan, momen, gaya geser.

ABSTRACT

Modified Bolotin Method is used to solve the slabs problem with the semi rigid type of edge conditions. Each edge condition has its own rotation stiffness coefficient depends on how rigid the condition is. This analysis studies the effect of non-dimensional rotation stiffness coefficient (\bar{k}) to dynamic response of the slab. Using coefficient 0.3 for the condition tends to simply supported edge; 0.5 for the semi rigid state between simply supported and clamped; 0.7 for the condition tends to clamped edge. Slab is modeled as an isotropic and elastic slab with the assumption of the small deflection theory and Kirchoff's theory of plates. The eigen vector is solved using the two transcendental equations. Then the dynamic transverse load with constant velocity is applied to this slab. Analysis will be done when the load still within the slab ($0 < t < t_0$) and after the load left the slab ($t > t_0$). Analysis showed that as the edge condition draws near to simply supported state, the middle deflection when the load at the middle point of slab will be higher. The difference between $\bar{k} = 0.3$ and $\bar{k} = 0.7$ middle deflection is 3.32% when the load within the slab and 69.45% when the load left the slab. The bending moment at center of slab is also higher about 2.3% when the load within the slab and 59.8% when the load left the slab. This works along with the shear force which is higher about 2.19% when the load within the slab and 83.06% when the load left the slab.

Keywords : *Modified Bolotin Method, semi rigid, rotation stiffness coefficient, non-dimensional, isotropic, elastic, transverse load, deflection, bending, shear force.*

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiii
DAFTAR NOTASI	xiv
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Pembatasan Masalah	6
1.5 Metodologi Penelitian	6
1.6 Sistematika Penulisan	7
1.7 Kerangka Pemikiran	8

BAB 2	PERSAMAAN DIFERENSIAL PELAT ISOTROPIK	9
2.1	Teori Pelat	9
2.2	Teori Elastisitas	11
2.3	Hubungan Tegangan, Regangan dan Lendutan Pelat	14
2.4	Penurunan Persamaan Diferensial Elemen Pelat	16
BAB 3	RESPONS DINAMIK PELAT ISOTROPIK	20
3.1	Prosedur Penelitian	20
3.2	Analisis Getaran Bebas	20
3.2.1	Masalah Pelat Tipe Levy	23
3.2.1.1	Masalah <i>Auxiliary</i> Pertama	24
3.2.1.2	Masalah <i>Auxiliary</i> Kedua	27
3.3	Solusi Homogen.....	28
3.4	Solusi Partikuler.....	32
3.5	Solusi Total	36
3.6	Fungsi Beban Dinamik.....	36
3.7	Respons Dinamik Pelat	38
BAB 4	ANALISIS NUMERIK.....	41
4.1	Asumsi Perhitungan dan Beban yang Bekerja	41
4.2	Parameter dan Properti Pelat Beton	41
4.3	Beban Dinamik Transversal.....	42
4.4	Frekuensi Alami Sistem	43
4.5	Kecepatan Kritis.....	45

4.6	Riwayat Waktu (<i>Time History</i>) Defleksi Dinamik dan Gaya Dalam Pelat	47
4.7	Perhitungan Defeksi Dinamik dan Gaya Dalam Pelat pada Saat Posisi Beban $t= 0,3$ s dan $t= 0,72$ s	49
4.8	Perilaku Pelat Saat Posisi Beban di dalam Pelat ($0 < t < t_0$) dan Saat Beban Diluar Pelat ($t > t_0$)	53
4.9	Perhitungan Defleksi Dinamik dan Gaya Dalam Pelat pada Saat Posisi Beban di Tengah Pelat dengan $v= 50$ km/jam.....	57
4.10	Respons Dinamik Pelat dengan Rasio Redaman 10%	58
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	60
5.1	Kesimpulan	60
5.2	Saran.....	61
	DAFTAR PUSTAKA	62
	LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Pelat dengan Beban Transversal Berjalan	2
Gambar 1.2	Diagram Alir Kerangka Pemikiran	8
Gambar 2.1	Geometrik Struktur Pelat	9
Gambar 2.2	Kurva Hubungan Tegangan dan Regangan	11
Gambar 2.3	Benda Mengalami Regangan Lateral dan Longitudinal Akibat Gaya P ..	12
Gambar 2.4	Komponen Tegangan pada Pelat	13
Gambar 2.5	Lentur pada Pelat	15
Gambar 2.6	Penampang Pelat Sebelum dan Sesudah Deformasi	15
Gambar 2.7	Keseimbangan Gaya pada Pelat	17
Gambar 3.1	Geometri Pelat	22
Gambar 4.1	Pemodelan Pelat.....	42
Gambar 4.2	Grafik Kecepatan Kritis	47
Gambar 4.3	Riwayat Waktu Defleksi Dinamik.....	48
Gambar 4.4	Riwayat Waktu Momen Arah X.....	48
Gambar 4.5	Riwayat Waktu Gaya Gesers Arah X.....	49
Gambar 4.6	Grafik Momen Arah X Saat Posisi Beban pada $t= 0,3$ s.....	50
Gambar 4.7	Grafik Momen Arah X Saat Posisi Beban pada $t= 0,72$ s.....	50
Gambar 4.8	Grafik Gaya Geser Arah X Saat Posisi Beban pada $t= 0,3$ s	51
Gambar 4.9	Grafik Gaya Geser Arah X Saat Posisi Beban pada $t= 0,72$ s	51
Gambar 4.10	Defleksi Dinamik Tengah Bentang Pelat pada Setiap Posisi Beban	54
Gambar 4.11	Momen dan Gaya Geser Arah X dan Arah Y dalam 3D Saat Posisi Beban dalam Pelat ($0 < t < t_0$)	55
Gambar 4.12	Momen dan Gaya Geser Arah X dan Arah Y dalam 3D Saat Posisi Beban Diluar Pelat ($t > t_0$).....	56

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Data Pelat	42
Tabel 4.2	Nilai Ragam Getar dan Frekuensi Alami Sistem dengan Variasi Nilai \bar{k}	44
Tabel 4.3	Nilai Frekuensi Alami Sistem dengan Satuan rad/s	45
Tabel 4.4	Lendutan dengan Berbagai Variasi Kecepatan	46
Tabel 4.5	Defleksi dan Gaya Dalam Pelat Saat Posisi Beban pada $t= 0,3$ s	52
Tabel 4.6	Defleksi dan Gaya Dalam Saat Posisi Beban pada $t= 0,72$ s.....	53
Tabel 4.7	Pengecekan Defleksi Pelat Terhadap Defleksi Ijin	53
Tabel 4.8	Defleksi dan Gaya Dalam Pelat dengan $v= 50$ km/jam Saat Beban di Tengah Pelat	57
Tabel 4.9	Rangkuman Persentase Perbedaan Respons Dinamik Pelat dengan Kecepatan Beban 30 km/jam dan 50 km/jam.....	58
Tabel 4.10	Perbandingan Respons Dinamik Pelat dengan Variasi Rasio Redaman Saat Beban Berada pada $t= 0,3$ s	58
Tabel 4.11	Perbandingan Respons Dinamik Pelat dengan Variasi Rasio Redaman Saat Beban Berada pada $t= 0,72$ s	59

DAFTAR LAMPIRAN

- Lampiran 1** Program Mencari p dan q
- Lampiran 2** Program Mencari Defleksi, Momen Lentur, Gaya Geser dan Plot 3D Defleksi Pelat dan Bentuk Defleksi Pelat

DAFTAR NOTASI

a		= Dimensi pelat di arah sumbu x
a_0, b_0		= Konstanta yang berhubungan dengan kondisi awal pelat
b		= Dimensi pelat di arah sumbu y
D_x		= Kekakuan lentur pelat arah x
D_y		= Kekakuan lentur pelat arah y
E_x, E_y		= Modulus elastisitas pelat di sumbu utama
F_D		= Gaya redaman
F_E		= Gaya dalam elastik pelat
F_I		= Gaya inersia pelat
G		= Modulus geser bahan pelat beton
h		= Tebal pelat beton
H		= Kekakuan puntir efektif pelat
$\overline{k_1}$		= Koefisien kekakuan rotasi tak bersatuan arah x
$\overline{k_2}$		= Koefisien kekakuan rotasi tak bersatuan arah y
M_x		= Gaya dalam momen arah x
M_y		= Gaya dalam momen arah y
m		= <i>Mode</i> di arah x dalam bentuk indeks integer
n		= <i>Mode</i> di arah y dalam bentuk indeks integer
Q_x		= Gaya geser arah x
Q_y		= Gaya geser arah y
$P_z(x,y,t)$		= Fungsi beban transversal yang tergantung pada fungsi posisi dan fungsi waktu
p, q		= Akar-akar dari persamaan <i>transcendental</i> berupa bilangan riil pengganti bilangan bulat (m,n)
P_0		= Beban tengah ekuivalen rata-rata dari beban kendaraan
Q_{mn}, Q_{pq}		= Konstanta normalisasi
t		= Variabel waktu
$T(t)$		= Fungsi waktu / <i>temporal</i>
$\hat{T}_{pq}(t)$		= Solusi homogen dalam fungsi waktu

$T_{pq}^*(t)$	= Solusi partikular dalam fungsi waktu
u, v, w	= Lendutan bidang pelat di arah sumbu x, y dan z
v_0	= Kecepatan awal beban di arah x
$W(x,y)$	= Fungsi posisi (<i>spatial function</i>) dalam arah x dan y
$W(\xi,\eta)$	= Fungsi posisi (<i>spatial function</i>) dalam arah ξ dan η
$w(x,y,t)$	= Fungsi defleksi dalam arah z yang bergantung pada fungsi posisi (x,y) dan fungsi waktu (t)
$w(\xi,\eta,t)$	= Fungsi defleksi dalam arah z yang bergantung pada fungsi posisi dalam <i>non-dimensional</i> (ξ,η) dan fungsi waktu (t)
w_h	= Solusi homogen
w_p	= Solusi partikular
w_{ijin}	= Batas Lendutan ijin
$X(x)$	= Fungsi posisi X dalam arah x
$X(\xi)$	= Fungsi posisi X dalam arah ξ
x, y, z	= Variabel koordinat kartesian
x_0	= Posisi beban transversal pada arah x
$Y(y)$	= Fungsi posisi Y dalam arah y
$Y(\eta)$	= Fungsi posisi Y dalam arah η
y_0	= Posisi beban transversal pada arah y
α	= koefisien beban
β, θ	= Konstanta pemisah sistem
β_1	= Parameter frekuensi
$\delta[.]$	= Fungsi Dirac Delta
$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$	= Regangan aksial sesuai indeks
ρ	= Massa jenis pelat
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	= Tegangan normal yang bekerja pada bidang kontak

τ	= Variabel integrasi terhadap waktu
τ_{xy}, τ_{yx}	= Tegangan geser bidang
ν, ν_x, ν_y	= <i>Poisson's ratio</i> pelat beton
$\omega, \omega_{\text{beban}}$	= Frekuensi beban transversal dinamik
ω_D	= Frekuensi sistem dengan redaman
ω_{ij}	= Frekuensi alami sistem pelat pada <i>mode</i> (i,j)
$\bar{\omega}_{pq}$	= Frekuensi alami sistem pelat dalam <i>non-dimensional</i>
γ	= Koefisien redaman <i>viscous</i> ekuivalen pelat
γ_{xy}, γ_{yx}	= Regangan geser bidang
$\Delta d_x, \Delta d_y, \Delta d_z$	= Deformasi yang terjadi pada pelat
$\pi = 3.14159$	= Konstanta PI
ξ	= Rasio redaman
ξ	= sumbu koordinat dalam <i>non-dimensional</i> pada arah x
η	= sumbu koordinat dalam <i>non-dimensional</i> pada arah y

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Pelat lantai merupakan salah satu komponen yang penting dalam suatu konstruksi. Pelat lantai berfungsi sebagai tempat berpijak dan berperan untuk menambah kekakuan horizontal sehingga pelat lantai juga berhubungan langsung dengan faktor kenyamanan dan kekuatan dari suatu bangunan. Sesuai dengan fungsinya sebagai tempat berpijak, maka pelat lantai tidak terlepas dari adanya beban transversal yang berpindah tempat (bersifat dinamik).

Berkaitan dengan unsur kenyamanan dan kekuatan tersebut, maka perlu dipelajari lebih lanjut mengenai respons dinamik pelat akibat beban transversal. Respons dinamik yang dihasilkan juga dipengaruhi oleh banyak faktor, di antaranya adalah ukuran pelat dan asumsi perletakan yang digunakan pada sisi-sisi pelat. Asumsi perletakan ini akan mempengaruhi kekakuan pada keempat sisi pelat. Hal inilah yang akan menghasilkan respons dinamik yang berbeda-beda.

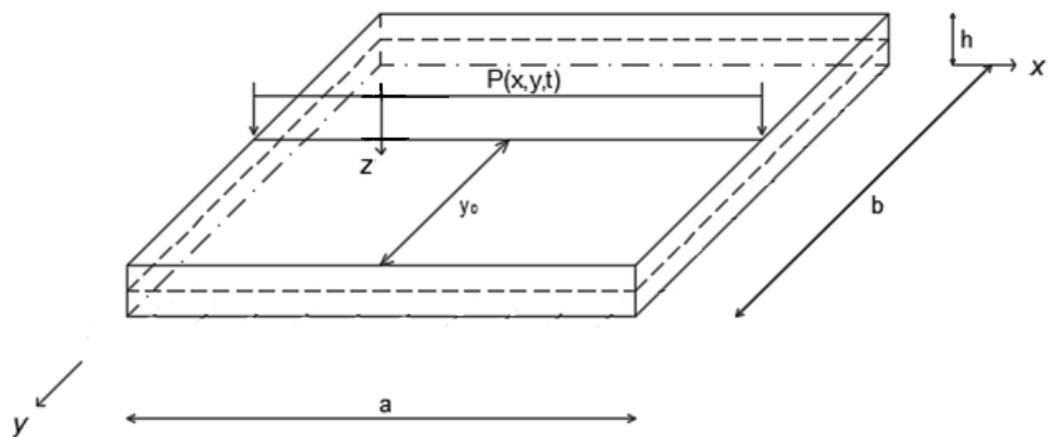
Ada beberapa jenis penyelesaian untuk permasalahan respons dinamik dari pelat lantai. Namun pada umumnya, metode-metode yang telah ada sebelumnya seperti *finite difference*, *finite element*, Rayleigh-Ritz, dan Deret Fourier memberikan hasil yang kurang akurat pada mode yang lebih tinggi (King dan Lin, 1973). Oleh karena itu, salah satu metode yang dapat digunakan untuk penyelesaian pelat pada mode yang lebih tinggi adalah dengan *Bolotin Method*. Metode ini digunakan untuk menyelesaikan masalah pelat dan cangkang (*shell*) secara numerik dengan menggunakan fungsi trigonometri (Pevzner et.al, 2000). Banyak permasalahan pelat yang dapat diselesaikan dengan metode ini termasuk frekuensi dan ragam getar yang lebih tinggi dari pelat dengan berbagai jenis kondisi perletakan, getaran bebas, dan tipe-tipe lain dari cangkang. Tentunya metode ini lebih baik dibandingkan dengan metode konvensional yang hanya memberikan perhitungan yang akurat pada ragam getar yang lebih rendah.

Seiring dengan berjalannya waktu, *Bolotin Method* kemudian dikembangkan menjadi *Modified Bolotin Method*. Salah satu yang mengembangkan metode ini adalah Vijayakumar melalui tulisannya dengan judul “*A New Method for Analysis of Flexural Vibration of Rectangular Orthotropic Plates*” pada tahun 1971. Modifikasi metode ini

dilakukan dengan menambahkan suku yang diabaikan oleh Bolotin sebelumnya. Dengan demikian, *Modified Bolotin Method* memberikan hasil yang lebih akurat terutama untuk ragam getar yang lebih tinggi dengan kondisi perletakan yang beragam.

Pada tahun 2006, Alisjahbana dan Wangsadinata juga menggunakan *Modified Bolotin Method* dalam penelitiannya mengenai respons dinamik pelat persegi panjang orthotropik yang berada di atas pondasi Pasternak dan dibebani oleh beban transversal dinamik yang bergerak dengan kecepatan konstan. Pelat tersebut memiliki perletakan yang tidak simetris pada seluruh sisinya, sehingga solusi dari persamaan diferensial homogen sistem tersebut diselesaikan dengan *Modified Bolotin Method*. Untuk masalah pelat dengan perletakan tidak simetris pada keempat sisinya, *wave number* dinyatakan sebagai $p\pi/a$ dan $q\pi/b$ dengan p dan q adalah bilangan riil yang perlu dipecahkan dari dua buah persamaan *auxiliary*.

Dalam penelitian ini akan dibahas penyelesaian respons dinamik pelat isotropik yang dibebani dengan beban transversal berjalan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.1 berikut.



Gambar 1.1 Pelat dengan Beban Transversal Berjalan

Material yang digunakan dalam struktur pelat dalam penelitian ini adalah beton sehingga pelat memiliki sifat isotropik, yaitu memiliki kekakuan yang sama di segala arahnya. Asumsi yang digunakan untuk perletakan pelat pada keempat sisinya adalah *semi rigid* sehingga akan digunakan *Modified Bolotin Method* untuk penyelesaian respons dinamik pelat. Persamaan gerak yang digunakan untuk bahan isotropik adalah sebagai berikut:

$$D \left(\frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right) + \rho \cdot h \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \right) + \gamma \cdot h \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} = p_z(x, y, t) \quad (1.1)$$

dengan:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}; \text{kekakuan lentur pelat [Nm/rad/m']}$$

$$\rho = \text{massa jenis [kg/m}^3\text{]}$$

$$h = \text{tebal pelat [m]}$$

$$\gamma = \text{koefisien redaman}$$

$$w(x, y, t) = \text{fungsi lendutan yang tergantung pada fungsi posisi dan fungsi waktu [m]}$$

$$p_z(x, y, t) = \text{fungsi beban transversal arah z yang tergantung pada fungsi posisi dan fungsi waktu [N]}$$

$$E = \text{modulus elastisitas pelat [N/m}^2\text{]}$$

$$\nu = \text{Poisson's ratio}$$

Agar perhitungan lebih sederhana, dilakukan beberapa modifikasi pada persamaan gerak tersebut. Salah satunya adalah perhitungan *wave number* dilakukan secara tak bersatuan (*non-dimensional*) sehingga persamaan gerak yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} \right) + 2 \cdot s^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right) + s^4 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right) + \frac{a^4 \rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

dengan:

$$a = \text{lebar pelat (m)}$$

$$b = \text{panjang pelat (m)}$$

$$\xi = x/a$$

$$\eta = y/b$$

$$s = a/b$$

Perhitungan *non-dimensional* ini juga akan mempengaruhi syarat batas yang digunakan untuk penyelesaian masalah *auxiliary* tipe Levy. Penyelesaian ini dinilai memberikan hasil frekuensi natural dan ragam getar yang paling akurat dengan cara penyelesaian persamaan *transcendental* yang paling mudah (Elishakoff, 1974). Koefisien kekakuan rotasi pada perletakan (\bar{k}_1 dan \bar{k}_2) untuk *semi rigid* diambil di antara 0 (kondisi sendi) dan 1 (kondisi jepit). Pengaruh nilai \bar{k}_1 dan \bar{k}_2 terhadap respon dinamik pelat akan dikaji dalam penelitian ini. Kajian dilakukan melalui perhitungan respon dinamik pelat dengan berbagai nilai \bar{k}_1 dan \bar{k}_2 , diantaranya 0,3, 0,5, dan 0,7. Berikut ini adalah syarat batas penyelesaian masalah *auxiliary* tipe Levy pertama dan kedua untuk perhitungan *non-dimensional*:

Saat $\xi=0$ sampai $\xi=1$:

$$X_{mn}(\xi) = 0; \left(\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right) + \nu \cdot s^2 \left(\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right) = -\bar{k}_1 \cdot s \left(\frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \quad (1.3)$$

Saat $\eta=0$ sampai $\eta=1$:

$$Y_{mn}(\eta) = 0; \left(\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\nu}{s^2} \left(\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right) = -\frac{\bar{k}_2}{s} \left(\frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \quad (1.4)$$

dengan:

$$\bar{k}_1 = \left(\frac{k_1 \cdot b}{D} \right); \text{ koefisien kekakuan rotasi } non\text{-dimensional} \text{ arah } \xi$$

$$\bar{k}_2 = \left(\frac{k_2 \cdot a}{D} \right); \text{ koefisien kekakuan rotasi } non\text{-dimensional} \text{ arah } \eta$$

Beban transversal yang melintas di atas permukaan pelat dapat dinyatakan dengan fungsi *Dirac's Delta* sebagai berikut:

$$p_z(x, y, t) = P_0 (1 + \alpha \cos \omega t) \delta[x - x(t)] \cdot \delta[y - y(t)] \quad (1.5)$$

dengan:

P_0 = amplitudo maksimum beban transversal [N]

α = koefisien beban

ω = frekuensi harmonis dari amplitudo beban transversal

$x(t)$ = fungsi posisi beban di arah x sebagai fungsi t

$$= v_0 \cdot t$$

v_0 = kecepatan beban transversal

$y(t)$ = fungsi posisi beban di arah y sebagai fungsi t

$$= b/2$$

$\delta[.]$ = *Dirac's delta function* yang diperlukan untuk penyelesaian persamaan gerak

Adanya beban dinamik transversal dan perbedaan koefisien rotasi pada perletakan tentu saja akan mempengaruhi respons dinamik pelat. Maka dari itu, pengaruh tersebut perlu diteliti lebih lanjut. Sesuai dengan latar belakang yang telah disebutkan di atas, maka penulis akan menulis tesis dengan judul:

**“Pengaruh Koefisien Rotasi Perletakan terhadap Respons Dinamik Pelat
Beton Akibat Beban Transversal Berjalan”**

1.2 Perumusan Masalah

Sesuai dengan latar belakang yang telah dikemukakan, perumusan masalah pada tesis ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana pengaruh koefisien rotasi pada perletakan terhadap lendutan struktur pelat?
2. Bagaimana pengaruh koefisien rotasi pada perletakan terhadap momen pelat?
3. Bagaimana pengaruh koefisien rotasi pada perletakan terhadap gaya geser pelat?
4. Bagaimana pengaruh beban dinamik terhadap respons dinamik pelat pada kondisi koefisien kekakuan rotasi tertentu?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui :

1. Pengaruh koefisien rotasi pada perletakan terhadap lendutan struktur pelat.
2. Pengaruh koefisien rotasi pada perletakan terhadap momen pelat.
3. Pengaruh koefisien rotasi pada perletakan terhadap gaya geser pelat.

4. Pengaruh beban dinamik terhadap respons dinamik pelat pada kondisi koefisien rotasi tertentu.

1.4 Batasan Masalah

Beberapa batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Analisis dilakukan pada pelat tipis sesuai dengan teori Bernoulli yaitu penampang tetap rata sebelum dan setelah dibebani sehingga dalam perhitungan deformasi geser diabaikan karena nilainya sangat kecil.
2. Analisis dilakukan pada batasan dimana hukum Hooke masih berlaku.
3. Pemodelan pelat dengan perletakan *semi rigid* dengan koefisien kekakuan rotasi tertentu (\bar{k}_1 dan \bar{k}_2) pada sisi pelat.
4. Frekuensi alami pelat dan *Eigen Vector* diselesaikan dengan menggunakan *Modified Bolotin Method*.
5. Analisis beban dinamik transversal dilakukan untuk beban transversal yang bergerak dengan kecepatan konstan.
6. Analisis numerik dilakukan dengan menggunakan bantuan program Wolfram Mathematica 10 dengan mengumpulkan data di lapangan tanpa uji eksperimental di laboratorium.
7. Analisis dilakukan pada pelat isotropik, yaitu pelat yang memiliki kekakuan yang sama pada arah x dan y.
8. Analisis dilakukan sesuai dengan teori lendutan kecil (*small deflection theory*) yaitu defleksi maksimum pelat tidak melebihi 1/10 dari ketebalan pelat.
9. Redaman yang digunakan adalah redaman linier *viscous* yaitu faktor redaman yang memberikan gaya dalam arah yang berlawanan terhadap defleksi transversal dan bersifat proporsional terhadap kecepatan sistem (Paz, 1985)

1.5 Metodologi Penelitian

Metodologi penelitian pada penulisan tesis ini adalah sebagai berikut :

1. Studi literatur berupa buku–buku, jurnal, *website* dan sumber lainnya yang mendukung tesis ini.
2. Memasukkan data geometri dan material pelat lantai, serta input beban dinamik yang bekerja pada pelat lantai ke dalam program Wolfram Mathematica.

3. Dalam menganalisis perilaku dinamik pelat akibat beban transversal dinamik, terlebih dahulu dilakukan penyelesaian persamaan melalui solusi homogen untuk memperoleh waktu getar alami sistem.
4. Melakukan analisis terhadap defleksi dinamik, riwayat waktu, dan gaya-gaya dalam yang terjadi akibat beban transversal dinamik yang bergerak dengan kecepatan konstan dan dengan berbagai nilai koefisien kekakuan rotasi.
5. Mengambil kesimpulan.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tesis secara garis besar adalah sebagai berikut :

BAB 1 PENDAHULUAN

Bab ini membahas tentang latar belakang, maksud dan tujuan penelitian, rumusan masalah, batasan masalah, metodologi penelitian dan sistematika penulisan.

BAB 2 PERSAMAAN DIFERENSIAL PELAT ISOTROPIK

Pada bab ini dibahas tentang landasan teori pelat, teori elastisitas, pelat tipis dengan lendutan kecil, kemudian dilanjutkan dengan penurunan diferensial pelat isotropik dengan perletakan *semi rigid* di keempat sisinya.

BAB 3 RESPONS DINAMIK PELAT ISOTROPIK

Pada bab ini disajikan penurunan persamaan gerak pelat *non-dimensional* dengan perletakan *semi rigid* di keempat sisinya dan penyelesaian persamaan diferensial homogen maupun partikuler untuk memperoleh frekuensi alami sistem.

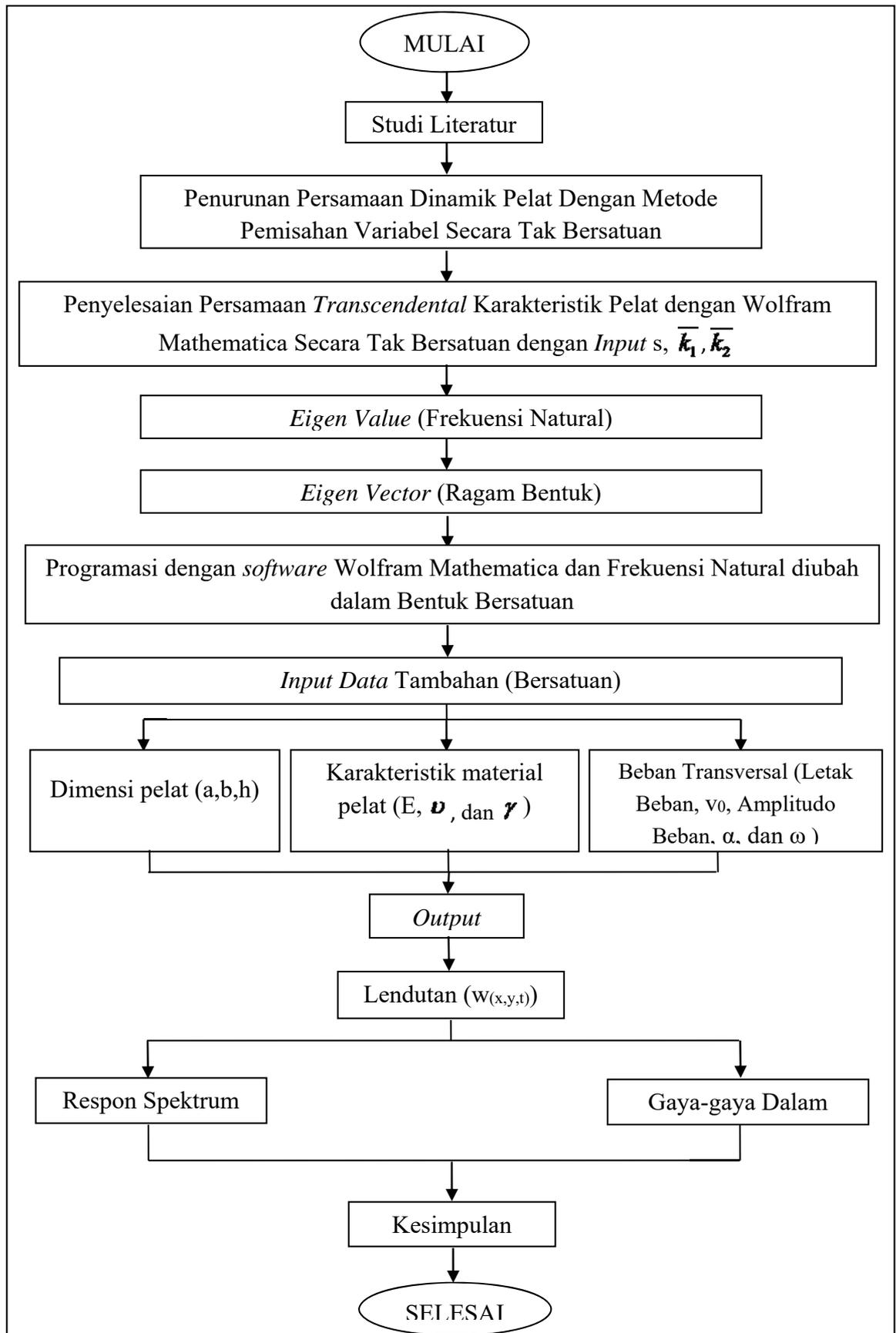
BAB 4 ANALISIS NUMERIK

Bab ini membahas tentang hasil analisis pelat dengan berbagai kondisi koefisien rotasi perletakan serta perhitungan respon dinamik pelat yang ditampilkan dalam bentuk tabel dan grafik sebagai aplikasi dari hubungan antar parametrik yang diperoleh dari bab sebelumnya.

BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini merupakan bab penutup yang berisi kesimpulan dari analisis yang telah dilakukan, serta saran yang dapat diberikan untuk penelitian berikutnya.

1.7 Kerangka Pemikiran



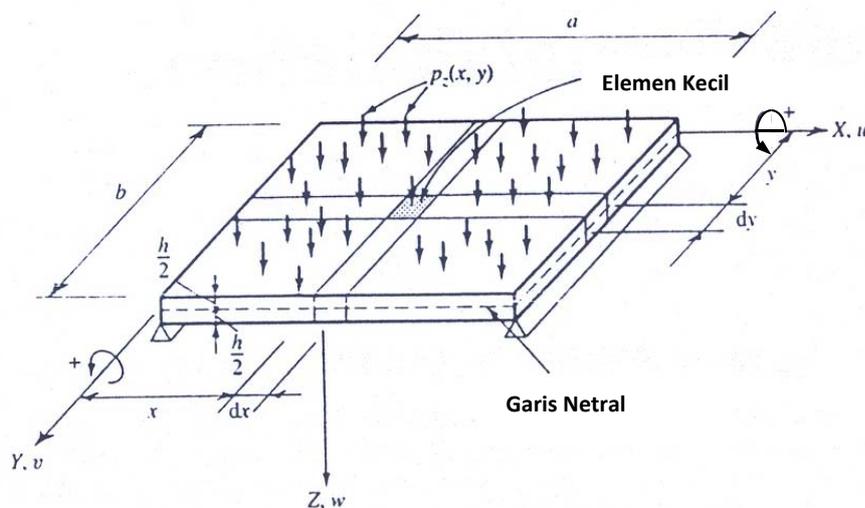
Gambar 1.2 Diagram Alir Kerangka Pemikiran

BAB 2

PERSAMAAN DIFERENSIAL PELAT ISOTROPIK

2.1 Teori Pelat

Pelat merupakan struktur bidang yang lurus dan merupakan komponen struktural dua dimensi serta permukaannya tidak melengkung (datar) dengan ketebalan yang jauh lebih kecil dari ukuran dimensi lainnya yaitu panjang dan lebarnya (Szilard, 1974). Beban yang terjadi pada pelat baik statik maupun dinamik biasanya bekerja tegak lurus pada permukaan pelat seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.1. Beban ini akan menghasilkan gaya dalam berupa momen lentur dan momen torsi serta gaya geser pada pelat.



Gambar 2.1 Geometrik Struktur Pelat (Szilard, 2004)

Gaya dalam yang dihasilkan pada pelat dipengaruhi oleh beberapa faktor, di antaranya berdasarkan sifat bahan, asumsi perletakan pada keempat sisi pelat, dimensi pelat, dan beban yang bekerja pada pelat tersebut. Ada beberapa jenis pelat berdasarkan sifat bahannya, yaitu:

1. Pelat isotropik

Pelat yang memiliki sifat elastis bahan yang sama di segala arah atau yang memiliki kekakuan lentur yang sama di segala arah.

2. Pelat anisotropik

Pelat yang memiliki sifat elastis bahan yang tidak teratur di segala arah. Contoh bahan anisotropik adalah kayu lapis (*plywood*) dan plastik.

3. Pelat orthotropik

Pelat yang bahannya bersifat homogen dan memiliki kekakuan lentur yang berbeda pada arah yang saling tegak lurus.

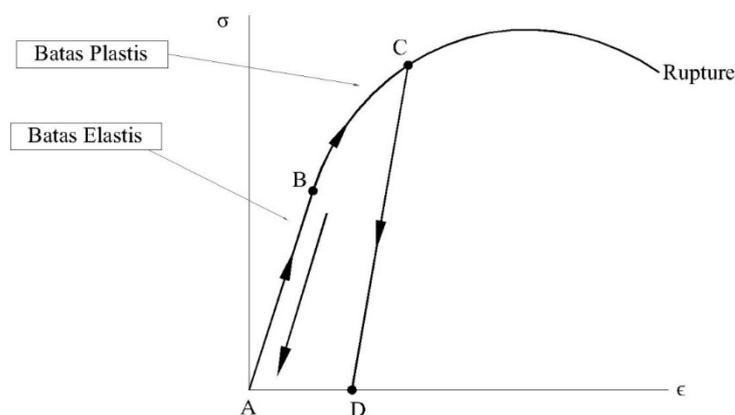
Analisis secara matematis dari pelat tipis yang dibebani oleh beban dinamik pada permukaannya memerlukan solusi dari persamaan diferensial dari teori elastisitas tiga dimensi. Namun banyak kesulitan dalam penyelesaian teori elastisitas secara tiga dimensi. Maka dari itu, untuk penyelesaian pelat digunakan teori pelat klasik Kirchoff tentang pelat tipis. Hasil yang diperoleh pun cukup akurat tanpa memerlukan perhitungan tiga dimensi secara utuh. Defleksi yang dihasilkan berupa turunan ke empat dan membutuhkan dua buah syarat batas untuk setiap sisi pelat. Simplifikasi yang dilakukan dalam penurunan persamaan pelat didasarkan pada beberapa asumsi berdasarkan teori pelat klasik Kirchoff berikut:

1. Material yang digunakan adalah homogen, isotropik, dan elastis (mengikuti hukum Hooke).
2. Pelat adalah datar pada awalnya dan penampang pelat akan tetap datar sebelum dan setelah dibebani (melentur) sehingga deformasi geser dapat diabaikan karena nilainya kecil (teori Bernoulli).
3. Ketebalan pelat adalah konstan dan nilainya kecil bila dibandingkan dengan dimensi lainnya dari pelat. Dimensi lateral terkecil dari pelat minimum adalah 10 kali lebih besar dari tebal pelat.
4. Defleksi yang dihasilkan adalah kecil bila dibandingkan dengan ketebalan pelat. Maksimum defleksi yang terjadi adalah $\frac{1}{10}$ dari tebal pelat. Hal ini sesuai dengan batasan dari teori lendutan kecil (*small deflection theory*).
5. Kemiringan dari bidang tengah yang melendut sangat kecil dibandingkan dengan satu.
6. Tegangan normal arah tegak lurus permukaan pelat dapat diabaikan.

2.2 Teori Elastisitas

Teori elastisitas merupakan cabang penting dari fisika matematis, yang mengkaji hubungan yang mendasar antara gaya, perpindahan, tegangan, dan regangan dalam benda yang bersifat elastis. Apabila suatu benda pejal dibebani oleh gaya luar, maka benda tersebut akan mengalami perubahan bentuk atau berdeformasi, sehingga timbul tegangan dan regangan dalam. Berdasarkan teori elastisitas ini, benda dianggap bersifat homogen, isotropik, dan elastis yang artinya benda terbuat dari bahan yang sama dalam segala arah serta benda akan kembali ke bentuk semula setelah berdeformasi apabila gaya luar yang bekerja dihilangkan seperti yang dapat dilihat oleh garis kurva A-B pada Gambar 2.2. Berdasarkan sifat-sifat di atas maka hubungan antara tegangan dan regangan bersifat linier.

Ketika gaya luar tersebut dihilangkan, maka perubahan bentuk yang terjadi akan hilang dan kembali ke bentuk semula. Dengan demikian tegangan yang timbul akan hilang seperti yang dilukiskan oleh garis kurva A-B. Fenomena seperti ini memperlihatkan bahwa bahan material tersebut berada dalam dalam batas elastis sempurna (*perfectly elastic*). Apabila gaya luar diperbesar lagi maka tegangan dan regangan yang terjadi sudah mencapai garis kurva di titik C. Bila gaya diperkecil dan akhirnya dihilangkan tetapi regangan pada bahan tidak kembali ke bentuk semula, maka terjadi regangan akhir di titik D. Pada kondisi ini timbul regangan sisa (*residual stress*). Fenomena ini memperlihatkan bahan material tersebut sudah melampaui batas plastis.



Gambar 2.2 Kurva Hubungan Tegangan dan Regangan

Penerapan teori elastisitas di dalam pelat yaitu teori pelat klasik merumuskan dan menyelesaikan masalah pelat berdasarkan analisis matematis yang eksak. Hukum Hooke yang menyatakan hubungan antara tegangan dan regangan yang linier ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan sebagai berikut :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.1)$$

dengan :

σ = Tegangan

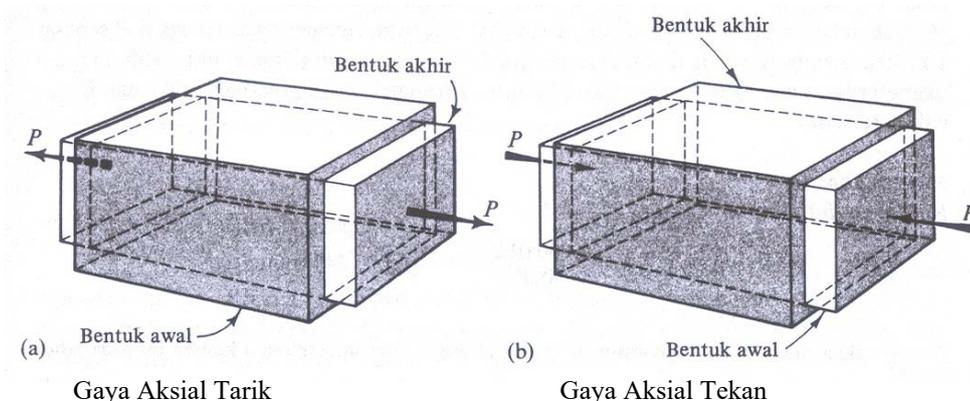
E = Modulus elastisitas (*Young's modulus*)

ε = Regangan

Benda yang dibebani oleh aksi gaya luar akan diimbangi oleh reaksi gaya dalam sehingga terjadi suatu keadaan keseimbangan. Apabila gaya luar yang bekerja pada benda diuraikan ke dalam tiga buah komponen yang sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat kartesian (x, y, z), maka komponen gaya arah normal (*normal force*) akan menyebabkan adanya tegangan aksial (σ) yang menimbulkan regangan aksial (ε). Jika tegangan normal bekerja dalam arah x , perpanjangan ε_x diikuti oleh perpendekan lateral, jadi regangan dalam arah x, y, z adalah

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.2)$$

dengan ν adalah angka rasio Poisson yang menyatakan perbandingan antara regangan arah lateral dan regangan arah longitudinal yang ditunjukkan pada Gambar 2.3. Besarnya angka rasio Poisson ini berkisar antara 0,15 dan 0,35 untuk kebanyakan bahan struktur.

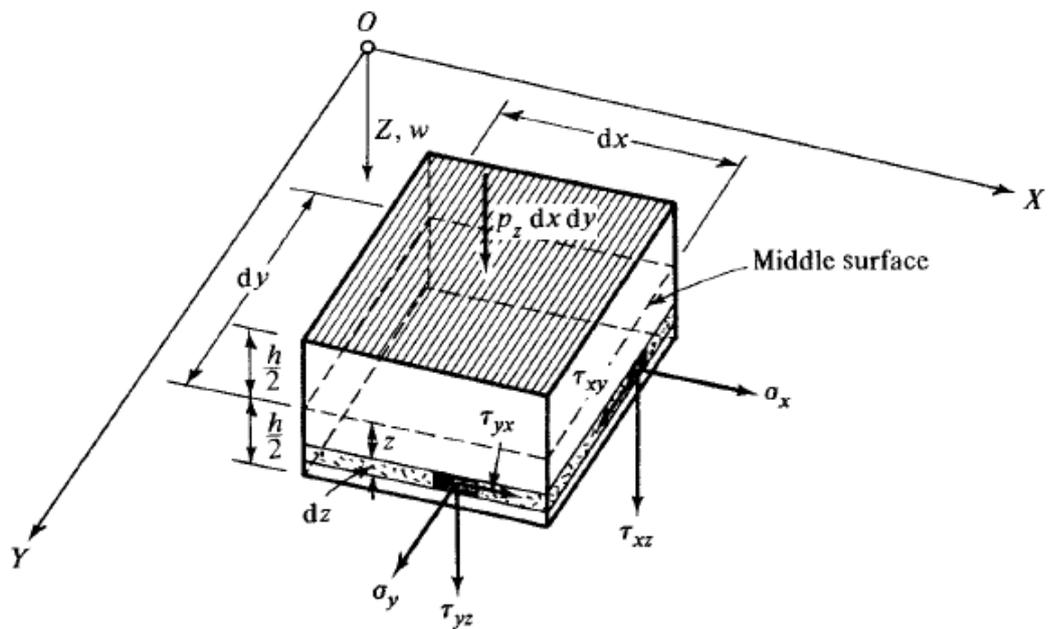


Gambar 2.3 Benda Mengalami Regangan Lateral dan Longitudinal

Akibat Gaya P (Popov, 1984)

Pada struktur bersifat linear yang mengikuti hukum Hooke yaitu saat deformasinya cenderung kecil dan tidak mempengaruhi gaya luar, prinsip superposisi dapat diterapkan (Timoshenko dan Goodier, 1951). Arah tegangan dan regangan dapat dilihat pada Gambar 2.4. Dengan demikian, jika tegangan σ_x , σ_y , dan σ_z bekerja secara bersamaan pada elemen kecil tersebut, hukum Hooke diperluas menjadi:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].\end{aligned}\tag{2.3}$$



Gambar 2.4 Komponen Tegangan pada Pelat (Szilard, 2004)

Komponen gaya lainnya yang berupa gaya geser akan menyebabkan adanya komponen tegangan geser (τ) yang menimbulkan regangan geser (γ) di dalam benda (Szilard, 1974). Kemudian dengan cara yang sama, hubungan antara tegangan geser dan regangan geser adalah

$$\gamma = \frac{\tau}{G}\tag{2.4}$$

dengan G adalah modulus elastisitas geser atau modulus geser. Jika tegangan geser bekerja pada semua permukaan elemen, Persamaan (2.4) menjadi:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}\tag{2.5}$$

Sedangkan hubungan antara modulus geser G dan modulus elastisitas Young E dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.6)$$

2.3 Hubungan Tegangan, Regangan, dan Lendutan Pelat

Jika suatu pelat dibebani dalam arah transversal terhadap permukaannya, pelat tersebut akan melendut sehingga dapat dikatakan pelat tersebut mengalami lenturan. Pada kondisi pelat berbeda dengan kondisi balok, karena pada balok tegangan dan regangan sudah merupakan masalah satu dimensi. Tegangan dan regangan pada pelat lebih rumit karena merupakan dua dimensi.

Hubungan antara tegangan, regangan, dan perpindahan perlu ditinjau dari elemen kecil sebuah benda elastis. Dapat dilihat pada Gambar 2.5. bahwa sebuah elemen pelat lentur yang kecil sekali, dengan bidang x - y sebagai bidang netralnya, tebal pelat t , panjang dan lebar adalah dx dan dy . Ditinjau keping khusus pada elemen ini yang terletak sejauh z dari bidang netral. Pada keping ini diperlihatkan jenis-jenis tegangan dan regangan yang sangat mempengaruhi deformasi dalam pelat yang melendut. Regangan yang bekerja dalam bidang ini adalah:

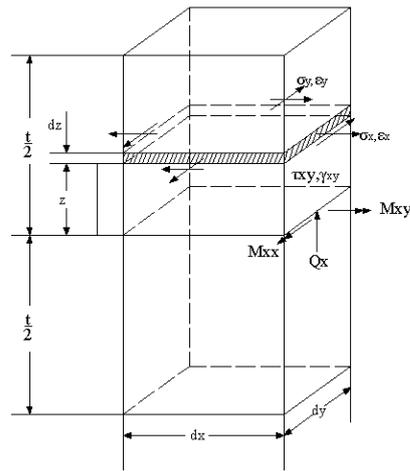
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.7)$$

Teori lenturan pelat tipis memiliki anggapan bahwa bidang normal sumbu netral akan tetap lurus selama deformasi seperti terlihat pada Gambar 2.6. Maka dari itu kita dapat menyatakan peralihan u dan v dalam w , sebagai:

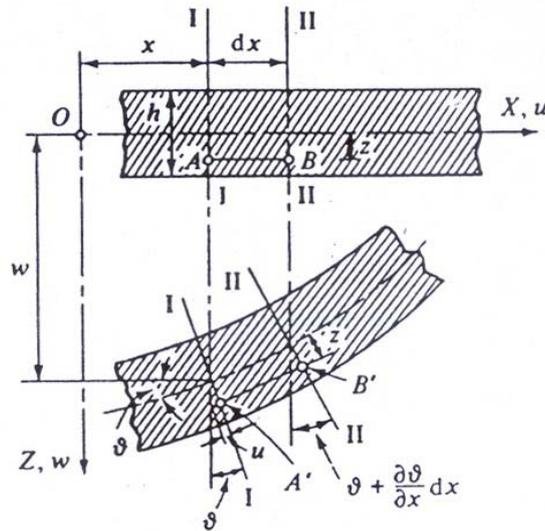
$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.8)$$

Substitusi persamaan (2.8) ke dalam persamaan (2.7) akan menghasilkan:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.9)$$



Gambar 2.5 Lentur pada Pelat



Gambar 2.6 Penampang Pelat Sebelum dan Sesudah Deformasi (Szilard, 2004)

Berdasarkan asumsi teori pelat lentur tipis dan teori lendutan kecil, maka dengan mengambil sebuah irisan untuk nilai y yang konstan, seperti yang terlihat pada Gambar 2.6 dapat terlihat bahwa irisan sebelum penampang melendut dan sesudah melendut terjadi rotasi pada potongan I-I dan II-II.

Gambar tersebut juga menunjukkan hubungan regangan peralihan dalam pelat yang melentur. Hubungan ini hanya melibatkan satu macam translasi (w) dan tiga buah regangan (ϵ_x , ϵ_y , dan γ_{xy}). Kedua translasi yang lain (u dan v) merupakan variasi linier

terhadap bidang netral seperti yang ditunjukkan dalam persamaan (b). Regangan normal ϵ_z dan regangan geser γ_{xz} dan γ_{yz} dalam analisis pelat tipis biasanya diabaikan.

Hubungan tegangan regangan pelat dapat dianggap sama dengan pada keadaan tegangan bidang. Hal ini karena pelat tersebut cukup tipis dan tidak ditahan dalam arah z (kecuali pada perletakannya). Jadi, untuk material isotropik akan kita peroleh:

$$E = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{1-\nu}{2}$$

Dengan mengetahui harga – harga tegangan pelat, besarnya momen lentur M_x , M_y dan momen puntir M_{xy} dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = - (D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = -D_x (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \quad (2.10)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = - (D_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = -D_y (\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \quad (2.11)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -2 D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.12)$$

Demikian juga melalui turunan ketiga dari fungsi lendutan, maka besarnya gaya geser pada pelat dapat dihitung dengan persamaan berikut:

$$Q_x = - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.13)$$

$$Q_y = - \frac{\partial}{\partial y} \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.14)$$

2.4 Penurunan Persamaan Diferensial Elemen Pelat

Persamaan diferensial pelat dapat diperoleh dengan meninjau kesetimbangan suatu elemen pelat. Gambar 2.7 menunjukkan bidang netral dari sebuah elemen pelat kecil yang terletak pada bidang x - y dengan ukuran dx kali dy . Pada gambar ini juga diperlihatkan gaya tubuh b_z (dalam arah z) dan tegangan umum M_{xx} , M_{yy} , Q_x , yang bekerja pada sisi elemen. Gaya geser Q_x dan Q_y diperoleh dari integrasi tegangan geser τ_{xz} dan τ_{yz} (per satuan lebar) pada permukaan x dan y elemen kecil tersebut. Dalam gambar dilukiskan arah positif momen sesuai dengan arah positif kelengkungan, sedangkan arah

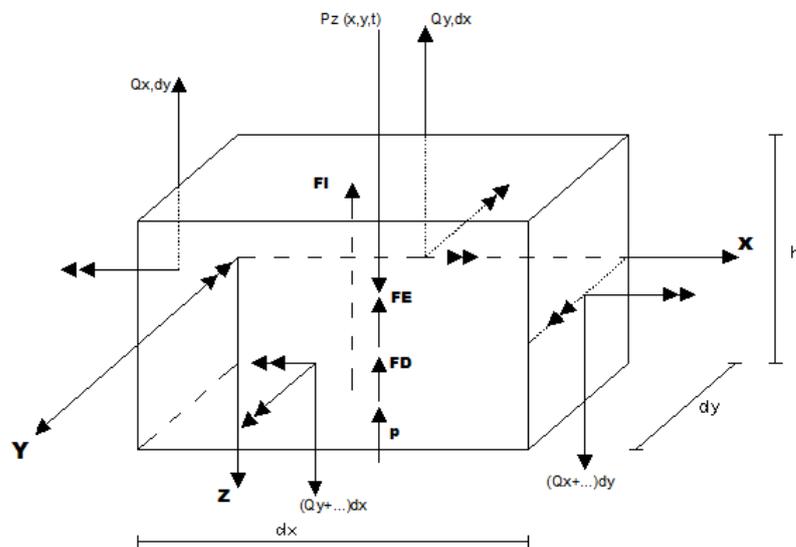
positif gaya geser sesuai dengan arah positif sudut. Kemudian persamaan keseimbangan antara gaya geser dengan beban yang bekerja dapat diturunkan.

Persamaan gerak pelat lantai bangunan dapat diperoleh dengan menggunakan Hukum Newton II yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\sum F = m \cdot a \quad (2.15)$$

Gambar 2.7 menunjukkan arah keseimbangan gaya pada elemen kecil pelat. Berdasarkan Hukum Newton II, persamaan gerak sistem dengan menggunakan keseimbangan gaya dan reaksi yang bekerja pada pelat dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F_E + F_i + F_D - p(x,y,t) = 0 \quad (2.16)$$



Gambar 2.7 Keseimbangan Gaya pada Pelat

dengan :

1. F_E adalah gaya dalam lateral elastis pelat isotropik akibat gaya vertikal

$$F_E = D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (2.17)$$

2. F_i adalah gaya inersia lateral yang merupakan gaya lateral pelat akibat adanya percepatan pada gerak lendutan pelat, yang arahnya berlawanan dengan lendutan pelat.

$$F_i = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

3. F_D adalah gaya redaman viskos ekuivalen yang merupakan gaya redaman dari keseluruhan sistem pelat. Arah dari gaya ini selalu berlawanan dengan arah lendutan pelat.

$$F_D = \gamma.h \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.19)$$

4. $P_z(x,y,t)$ adalah gaya transversal luar yang bekerja pada pelat.

Bila persamaan (2.15), persamaan (2.16), dan persamaan (2.17) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.14) akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho.h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \gamma.h \frac{\partial w}{\partial t} = p_z(x, y, t) \quad (2.20)$$

dengan:

$$D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Dengan cara yang sama persamaan diferensial gerak pelat dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$D \left(\frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right) + \rho.h \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \right) + \gamma.h \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} = p_z(x, y, t) \quad (2.21)$$

dengan :

D = kekakuan lentur pelat [Nm/rad/m']

ρ = massa jenis [kg/m³]

h = tebal pelat [m]

γ = koefisien redaman

$w(x,y,t)$ = fungsi lendutan yang tergantung pada fungsi posisi dan fungsi waktu [m]

$p_z(x,y,t)$ = fungsi beban transversal arah z yang tergantung pada fungsi posisi dan fungsi waktu [N]

E = modulus elastisitas pelat [N/m²]

ν = *Poisson's ratio*

Agar perhitungan lebih sederhana, persamaan gerak pelat tersebut juga dapat dinyatakan secara *non-dimensional* sebagai berikut:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}\right) + 2s^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2}\right) + s^4 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4}\right) + \frac{a^4 \rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_z(x, y, t) \quad (2.22)$$

BAB 3

RESPONS DINAMIK PELAT ISOTROPIK

3.1 Prosedur Penelitian

Penelitian untuk memperoleh pengaruh koefisien kekakuan rotasi perletakan terhadap respons dinamik pelat diawali dari analisis getaran bebas (*free vibration*) dengan syarat batas berdasarkan jenis perletakan pada keempat sisi pelat untuk mengetahui frekuensi natural dan ragam getar pelat. Analisis ini dilakukan dengan tak bersatuan (*non-dimensional*) agar lebih memudahkan dalam penyelesaiannya. Kemudian analisis getaran paksa (*force vibration*) dengan jenis beban berupa beban yang bergerak dengan kecepatan konstan untuk mengetahui bagaimana respons dinamik pelat akibat beban tersebut.

3.2 Analisis Getaran Bebas

Persamaan gerak sebuah pelat tipis isotropik yang dibebani oleh beban transversal yang bergerak dengan kecepatan konstan dan semua tepinya merupakan perletakan *semi rigid* pada kondisi getaran bebas tanpa redaman ($\gamma = 0$) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$D \left(\frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right) + \rho \cdot h \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (3.1)$$

Sedangkan untuk pelat isotropik dengan perletakan *semi rigid* pada sisi x dan sisi y, syarat batas bersatuan (*dimensional*) yang berlaku adalah:

$$W(x, y) = 0, \text{ di } x = 0 \text{ dan } x = a \quad (3.2)$$

$$-D_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = k_1 \frac{\partial W}{\partial x}, \text{ di } x = 0 \text{ dan } x = a \quad (3.3)$$

$$W(x, y) = 0, \text{ di } y = 0 \text{ dan } y = b \quad (3.4)$$

$$-D_y \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu x \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = k_2 \frac{\partial W}{\partial y}, \text{ di } y = 0 \text{ dan } y = b \quad (3.5)$$

Kemudian persamaan (3.1) dan syarat batas tersebut diubah menjadi persamaan tak bersatuan dengan mensubstitusikan koefisien $\xi = x/a$; $\eta = y/b$; $s = a/b$. Untuk syarat batas tak bersatuan akan dibahas lebih lanjut pada penyelesaian masalah tipe Levy pertama dan kedua. Sedangkan untuk persamaan gerak tak bersatuan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} \right) + 2 \cdot s^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right) + s^4 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right) + \frac{a^4 \rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6)$$

Penyelesaian frekuensi alami secara eksak untuk masalah pelat dengan perletakan sendi pada ke empat sisinya dapat diselesaikan dengan menggunakan solusi Navier dan solusi Levy yang juga dibuat menjadi tak bersatuan. Sedangkan pelat dengan perletakan jepit, perletakan *semi rigid* maupun perletakan bebas dapat diselesaikan dengan solusi numerik, yaitu Metode Bolotin. Metode Bolotin kemudian dimodifikasi sehingga dapat memberikan hasil yang akurat serta dapat menyelesaikan masalah dinamik pelat lebih baik dan teliti pada ragam-ragam getar yang tinggi dan dikenal dengan istilah *Modified Bolotin Method*.

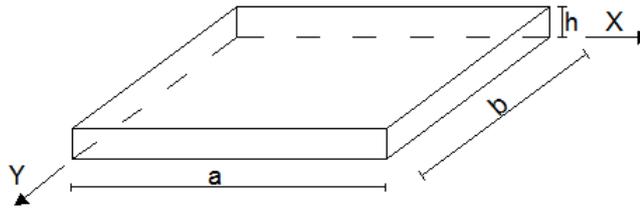
Model yang representatif untuk menggambarkan pelat lantai bangunan adalah sebuah pelat isotropik dengan perletakan *semi rigid* pada keempat sisinya seperti yang terlihat pada Gambar 3.1. Defleksi dinamik pelat isotropik diperoleh dengan mengasumsikan bahwa solusi persamaan gerak homogen dapat dinyatakan sebagai perkalian dari fungsi posisi $W(\xi, \eta)$ dan fungsi waktu $T(t)$. Untuk masalah *free vibration* atau masalah getaran bebas pelat tanpa redaman ($\gamma = 0$), defleksi transversal pelat dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$w(\xi, \eta, t) = W_{mn}(\xi, \eta) \sin(\omega_{mn} t) = X_m(\xi) Y_n(\eta) \sin(\omega_{mn} t) \quad (3.7)$$

dengan:

$W(\xi, \eta)$ = fungsi posisi atau *spatial function*

ω = frekuensi alami sistem (*natural frequency system*)



Gambar 3.1 Geometri Pelat

Bila persamaan (3.7) dan turunannya terhadap t disubstitusikan ke dalam persamaan (3.6) akan dihasilkan persamaan sebagai berikut :

$$\left(\frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^4} \right) + 2.s^2 \left(\frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right) + s^4 \left(\frac{\partial^4 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^4} \right) + \frac{a^4 \rho h}{D} . W(\xi, \eta) . \omega^2 = 0 \quad (3.8)$$

Dari persamaan (3.8) tersebut dapat terlihat hubungan antara frekuensi natural berdimensi dan frekuensi natural tak berdimensi sebagai berikut:

$$\varpi = \omega \sqrt{\frac{a^4 \rho h}{D}} \quad (3.9)$$

dengan:

ϖ = frekuensi alami tak bersatuan

ω = frekuensi alami bersatuan

Perhitungan frekuensi natural yang tak bersatuan ini kemudian akan diubah kembali menjadi bersatuan pada saat perhitungan untuk lendutan dan gaya-gaya dalam pelat agar lebih memudahkan saat penyelesaian getaran paksa (*force vibration*).

Untuk pelat yang memiliki perletakan sendi, solusi persamaan gerak yang memenuhi kondisi batas sesuai dengan persamaan (3.4) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right) \quad (3.10)$$

dengan:

A_{mn} = koefisien amplitudo, yang ditentukan dari kondisi awal (*initial condition*)

m = indeks integer, pola getar yang terjadi (*mode*) di arah x

- n = indeks integer, pola getar yang terjadi (*mode*) di arah y
- a = panjang pelat di arah sumbu x
- b = panjang pelat di arah sumbu y

Pada penelitian ini, kondisi perletakan pelat yang digunakan adalah *semi rigid* sehingga pola getar yang terjadi untuk arah x dan y memiliki indeks riil, yang dinyatakan dengan koefisien p dan q. Penurunan untuk akar-akar persamaan transendental tersebut juga dilakukan secara tak bersatuan sehingga untuk arah x dan y masing-masing menjadi arah ξ dan η . Maka, persamaan (3.10) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$W_{mn}(\xi, \eta) = A_{pq} \sin(p\pi\xi) \sin(q\pi\eta) \quad (3.11)$$

Bila persamaan (3.11) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.8) akan diperoleh frekuensi alami sistem untuk pelat yang memiliki perletakan *semi rigid* pada keempat sisinya. Frekuensi alami tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\omega^2 = \left[(p\pi)^4 + 2s^2(pq\pi^2)^2 + s^4(q\pi)^4 \right] \quad (3.12)$$

Nilai p dan q diperoleh dengan *Modified Bolotin Method* dari dua buah persamaan transendental. Kedua persamaan ini merupakan determinan dari dua buah matriks yang berisikan syarat-syarat batas dari kedua sisi-sisi tepi pelat yang saling berhadapan yang dapat diselesaikan dengan masalah tipe Levy dari dua buah persamaan *auxiliary*.

3.2.1 Masalah Pelat Tipe Levy

Masalah pelat tipe Levy dapat dikategorikan menjadi dua, yaitu masalah tipe Levy pertama (*auxiliary I*) dan masalah tipe Levy kedua (*auxiliary II*). Masalah tipe Levy pertama memberikan solusi fungsi posisi X(x) di arah x sedangkan di arah y dibiarkan mengikuti gerak harmonis. Masalah tipe Levy kedua memberikan solusi fungsi posisi Y(y) di arah y sedangkan di arah x dibiarkan mengikuti gerak harmonis.

3.2.1.1 Masalah *Auxiliary* Pertama

Untuk masalah *auxiliary I*, solusi fungsi posisi di arah x yang tak bersatuan dari persamaan (3.6) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$W_{mn}(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^m \sum_{n=1}^n X_{mn}(\xi) \sin(\pi q \eta) \quad (3.12)$$

Masalah yang ditinjau pada tesis ini adalah perletakan *semi rigid* sehingga berlaku hubungan sebagai berikut di sisi $\xi = 0$ dan di sisi $\xi = 1$ (untuk persamaan tak bersatuan) :

$$X_{mn}(\xi) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right) + \nu \cdot s^2 \left(\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right) = -\bar{k}_1 \cdot s \left(\frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \quad (3.13)$$

Dalam persamaan (3.13), notasi \bar{k}_1 merupakan kekakuan torsional (rotasi) balok perimeter untuk arah ξ (tak bersatuan). Bila persamaan (3.12) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.8), akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$X^{IV} - 2 \cdot s^2 \cdot X'' (\pi q)^2 + s^4 \cdot X (\pi q)^4 - \frac{a^4 \rho h}{D} \cdot X \cdot \omega^2 = 0 \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) dapat disederhanakan lebih lanjut menjadi:

$$X^{IV} - X'' \cdot 2 \cdot s^2 \cdot (\pi q)^2 + X ((s \pi q)^4 - \frac{a^4 \rho h}{D} \cdot \omega^2) = 0 \quad (3.15)$$

Bila mensubstitusi :

$$X(\xi) = e^{\lambda \xi}; \frac{dX(\xi)}{d\xi} = \lambda e^{\lambda \xi}; \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} = \lambda^2 e^{\lambda \xi} \quad (3.16)$$

akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\lambda^4 - \lambda^2 (2(s \pi q)^2 + ((s \pi q)^4 - \omega^2)) = 0 \quad (3.17)$$

Dengan memasukkan persamaan (3.12) ke persamaan (3.17) diperoleh

$$\lambda^4 - (p \pi)^4 - \lambda^2 (2(s \pi q)^2) - 2 \cdot s^2 (p q \pi^2)^2 = 0 \quad (3.18)$$

Persamaan (3.18) jika disederhanakan akan menghasilkan

$$\left(\lambda^2 + (p \pi)^2 \right) \left(\lambda^2 - (p \pi)^2 - 2(s \pi q)^2 \right) = 0 \quad (3.19)$$

Persamaan karakteristik sesuai dengan persamaan (3.19) akan memiliki dua buah akar riil dan dua buah akar imajiner yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = \pm(p\pi)i \quad \lambda_{3,4} = \pm\pi\beta \quad (3.20)$$

dengan:

$$\beta = \sqrt{p^2 + 2s^2q^2} \quad (3.21)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.20) ke dalam persamaan (3.16), solusi fungsi posisi di arah x menjadi sebagai berikut:

$$X(\xi) = A_1 e^{ip\pi\xi} + A_2 e^{-ip\pi\xi} + A_3 e^{\pi\beta\xi} + A_4 e^{-\pi\beta\xi} \quad (3.22)$$

Dalil De Moivre menyatakan:

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.23) ke dalam persamaan (3.22), maka didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$X(\xi) = A_1 \cos(p\pi\xi) + A_2 \sin(p\pi\xi) + A_3 \cosh(\pi\beta\xi) + A_4 \sinh(\pi\beta\xi) \quad (3.24)$$

Bila persamaan (3.24) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.13) akan dihasilkan persamaan aljabar linier yang dapat disederhanakan dalam bentuk matriks berikut ini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -p^2\pi^2 & s\bar{k}_1 & \pi^2\beta^2 & s\bar{k}_1\pi\beta \\ c_1 & s_1 & C_1 & S_1 \\ -p^2\pi^2c_1 - s\bar{k}_1p\pi s_1 & s\bar{k}_1p\pi c_1 - p^2\pi^2s_1 & \pi^2\beta^2C_1 + s\bar{k}_1\pi\beta S_1 & s\bar{k}_1\pi\beta C_1 + \pi^2\beta^2S_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

dengan:

$$\beta = \sqrt{p^2 + 2s^2q^2}$$

$$C_1 = \cosh(\pi\beta)$$

$$c_1 = \cos(p\pi)$$

$$S_1 = \sinh(\pi\beta) \qquad s_1 = \sin(p\pi) \qquad (3.26)$$

Agar persamaan (3.25) memiliki solusi yang bersifat non-trivial, maka determinan dari persamaan karakteristik tersebut harus sama dengan nol. Nilai determinan dari persamaan (3.25) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & -2s^2\bar{k}_1^2 p\beta + 2s^2\bar{k}_1^2 p\beta \cdot \cos(p\pi) \cosh(\pi\beta) + \\ & (s^2\bar{k}_1^2 (p^2 - \beta^2) + \pi^2 (p^2 + \beta^2)^2) \cdot \sin(p\pi) \sinh(\pi\beta) = 0 \end{aligned} \qquad (3.28)$$

Selanjutnya, untuk memperoleh fungsi posisi di arah x terlebih dahulu harus ditentukan koefisien A_1 sampai dengan A_4 dari persamaan (3.24). Dengan menormalkan nilai A_2 , A_3 , dan A_4 terhadap A_1 dan dengan mensubstitusikan koefisien yang diperoleh ke dalam persamaan (3.24), maka diperoleh fungsi posisi di arah x, yaitu:

$$X(\xi) = \sum_{m=1}^m \sum_{n=1}^n \cos(p\pi\xi) + F_1 \sin(p\pi\xi) - \cosh(\beta\pi\xi) + F_2 \sinh(\beta\pi\xi) \qquad (3.29)$$

dengan:

$$F_1 = -\frac{\beta \cos(p\pi)}{\beta \sin(p\pi) - p \sinh(\pi\beta)} + \frac{\beta \cosh(\pi\beta)}{\beta \sin(p\pi) - p \sinh(\pi\beta)}$$

$$-\frac{p^2 \pi \sinh(\pi\beta)}{s\bar{k}_1 (\beta \sin(p\pi) - p \sinh(\pi\beta))} - \frac{\beta^2 \pi \sinh(\pi\beta)}{s\bar{k}_1 (\beta \sin(p\pi) - p \sinh(\pi\beta))}$$

$$F_2 = -\frac{p \cos(p\pi)}{\beta \sin(p\pi) - p \sinh(\pi\beta)} - \frac{p \cosh(\pi\beta)}{\beta \sin(p\pi) - p \sinh(\pi\beta)}$$

$$+ \frac{p^2 \pi \sin(p\pi)}{s\bar{k}_1 (\beta \sin(p\pi) - p \sinh(\pi\beta))} + \frac{\beta^2 \pi \sin(p\pi)}{s\bar{k}_1 (\beta \sin(p\pi) - p \sinh(\pi\beta))}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \cosh(\pi\beta) & c_1 &= \cos(p\pi) \\ S_1 &= \sinh(\pi\beta) & s_1 &= \sin(p\pi) \end{aligned} \qquad (3.30)$$

3.2.1.2 Masalah Auxiliary Kedua

Masalah *auxiliary* II yaitu memecahkan solusi fungsi posisi di arah y yang tak bersatuan dari persamaan (3.6) dinyatakan sebagai berikut:

$$W_{mn}(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^m \sum_{n=1}^n \sin(\pi p \xi) Y_{mn}(\eta) \quad (3.31)$$

Masalah yang ditinjau pada tesis ini adalah perletakan *semi rigid* sehingga berlaku hubungan sebagai berikut di sisi $\eta = 0$ dan $\eta = 1$ (untuk persamaan tak bersatuan) :

$$Y_{mn}(\eta) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \frac{\nu}{s^2} \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \right) = -\frac{\bar{k}_2}{s} \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (3.32)$$

Dalam persamaan (3.36), \bar{k}_2 adalah kekakuan torsional untuk arah η (tak bersatuan). Dengan cara yang sama seperti pada masalah *auxiliary* I, fungsi posisi di arah y dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Y(\eta) = B_1 \cos(q\pi\eta) + B_2 \sin(q\pi\eta) + B_3 \cosh(\theta\pi\eta) + B_4 \sinh(\theta\pi\eta) \quad (3.33)$$

dengan:

$$\theta = \frac{1}{s} \sqrt{2p^2 + s^2 q^2} \quad (3.34)$$

Bila persamaan (3.33) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.32) akan dihasilkan persamaan aljabar linier yang dapat disederhanakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\pi^2 q^2 & \frac{\bar{k}_2 q \pi}{s} & \pi^2 \theta^2 & \frac{\bar{k}_2 \theta \pi}{s} \\ c_2 & s_2 & C_2 & S_2 \\ -\pi^2 q^2 c_2 - \frac{\bar{k}_2 q \pi s_2}{s} & \frac{\bar{k}_2 q \pi c_2}{s} - \pi^2 q^2 s_2 & \pi^2 \theta^2 C_2 + \frac{\bar{k}_2 \theta \pi S_2}{s} & \frac{\bar{k}_2 \theta \pi C_2}{s} + \pi^2 \theta^2 S_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

dengan:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \cosh(\pi\theta) & c_1 &= \cos(q\pi) \\
S_1 &= \sinh(\pi\theta) & s_1 &= \sin(q\pi)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Agar persamaan (3.35) memiliki solusi yang bersifat non-trivial, maka determinan dari persamaan karakteristik tersebut harus sama dengan nol. Nilai determinan dari persamaan (3.35) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& -2\bar{k}_2^2 q\theta + 2\bar{k}_2^2 q\theta \cdot \cos(q\pi) \cosh(\pi\theta) + \\
& (\bar{k}_2^2 (q^2 - \theta^2) + s^2 \pi^2 (q^2 + \theta^2)^2) \cdot \sin(q\pi) \sinh(\pi\theta) = 0
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Selanjutnya, untuk memperoleh fungsi posisi di arah y terlebih dahulu harus ditentukan koefisien B_1 sampai dengan B_4 dari persamaan (3.33). Dengan menormalkan nilai B_2 , B_3 , dan B_4 terhadap B_1 dan dengan mensubstitusikan koefisien yang diperoleh ke dalam persamaan (3.33), maka diperoleh fungsi posisi di arah y , yaitu:

$$Y_{mn}(\eta) = \sum_{m=1}^m \sum_{n=1}^n \cos(q\pi\eta) + F_3 \sin(q\pi\eta) - \cosh(\theta\pi\eta) + F_4 \sinh(\theta\pi\eta) \tag{3.38}$$

dengan:

$$F_3 = -\frac{\bar{k}_2 \theta \cos(\pi q) - \bar{k}_2 \theta \cosh(\pi\theta) + s\pi(q^2 + \theta^2) \sinh(\pi\theta)}{\bar{k}_2 (\theta \sin(\pi q) - q \sinh(\pi\theta))}$$

$$F_4 = -\frac{\bar{k}_2 q \cos(\pi q) - \bar{k}_2 q \cosh(\pi\theta) + s\pi(q^2 + \theta^2) \sin(\pi q)}{\bar{k}_2 (\theta \sin(\pi q) - q \sinh(\pi\theta))}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= \cosh(\pi\theta) & c_1 &= \cos(q\pi) \\
S_1 &= \sinh(\pi\theta) & s_1 &= \sin(q\pi)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

3.3 Solusi Homogen

Solusi homogen, w_h , dari persamaan gerak sesuai persamaan (2.19) dapat diperoleh dari persamaan diferensial yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$D \left(\frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right) + \rho \cdot h \left(\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \right)$$

$$+ \gamma.h \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} = p_z(x, y, t) \quad (3.40)$$

Persamaan (3.40) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pemisahan variabel (*separation of variables method*), sehingga diperoleh bentuk yang mudah diselesaikan berupa dua buah persamaan yang terpisah yaitu persamaan diferensial *spatial* $W(x,y)$ yang merupakan fungsi posisi x dan y saja dan persamaan diferensial *temporal* $T(t)$ yang merupakan fungsi waktu t . Dengan demikian solusi homogen *dimensional* dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$w_{pq}(x,y,t) = W(x,y).T(t) = X_{pq}(x).Y_{pq}(y).T(t) = X.Y.T \quad (3.41)$$

dengan :

$$W(x,y) = \text{Fungsi posisi (spatial function)}$$

$$X(x) = \text{Fungsi posisi di arah } x$$

$$Y(y) = \text{Fungsi posisi di arah } y$$

$$T(t) = \text{Fungsi waktu (temporal function)}$$

Apabila persamaan (3.41) disubsitusikan ke dalam persamaan gerak sesuai persamaan (3.40) akan diperoleh dua buah persamaan diferensial yang masing-masing mengandung konstanta pemisah β_1 sebagai berikut :

$$\ddot{T} + \frac{\gamma.h.D}{(\rho.h)} \dot{T} + \frac{\beta_1.D}{(\rho.h)} T = 0 \quad (3.42)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right) = \beta_1 \quad (3.43)$$

Persamaan diferensial (3.42) analog dengan persamaan getaran bebas teredam sebagai berikut :

$$\ddot{T} + \frac{c}{m} \dot{T} + \frac{k_t}{m} T = 0 \quad (3.44)$$

Berdasarkan ketiga buah persamaan diferensial tersebut di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa konstanta pemisah (*separation constant*), β_1 , ada hubungannya dengan frekuensi alami sistem yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\omega_{pq}^2 = \frac{\beta_1 \cdot D}{\rho \cdot h} \quad (3.45)$$

Harga β_1 untuk pelat isotropik persegi panjang dapat diperoleh dari persamaan (3.43) dengan melakukan substitusi $X = A_0 \cdot \text{Sin} \left[\frac{p \cdot \pi \cdot x}{a} \right]$ dan $Y = B_0 \cdot \text{Sin} \left[\frac{q \cdot \pi \cdot y}{b} \right]$ ke dalam persamaan tersebut, sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\beta_1 = \pi^4 \left[\left(\frac{p}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{pq}{ab} \right)^2 + \left(\frac{q}{b} \right)^4 \right] \quad (3.46)$$

Kehilangan energi dari sistem yang bergetar hanya disebabkan oleh adanya redaman *viscous* ekuivalen, yaitu redaman yang berbanding lurus tetapi berlawanan arah dengan kecepatan sistem yang bergetar (\dot{T}), maka besarnya redaman sistem dalam persamaan di atas dapat diwakili dengan sebuah konstanta c . Konstanta redaman c juga menunjukkan besarnya energi yang terdisipasi untuk 1 buah getaran lengkap. Bila struktur beresilasi tanpa adanya redaman, maka struktur tersebut akan terus mengalami gerak harmonis untuk waktu yang tidak terbatas (Chopra, 2012).

Dengan menggunakan $\omega_{pq}^2 = \frac{\beta_1 \cdot D}{\rho \cdot h}$ dan dengan menggunakan redaman sistem sebagai rasio dari redaman kritis ζ , maka redaman tanpa dimensi yang dinyatakan dalam persentase (%) dapat dinyatakan sebagai :

$$\zeta = \frac{c}{c_r} = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega_{pq}} \quad (3.47)$$

Dengan demikian persamaan (3.44) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\ddot{T} + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_{pq} \cdot \dot{T} + \omega_{pq}^2 \cdot T = 0 \quad (3.48)$$

Persamaan (3.48) dapat diselesaikan dengan menggunakan hubungan sebagai berikut :

$$T = e^{vt} ; \dot{T} = v \cdot e^{vt} ; \ddot{T} = v^2 \cdot e^{vt} \quad (3.49)$$

Bila persamaan (3.49) disubstitusikan kembali ke dalam persamaan (3.48) akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$v^2 \cdot e^{vt} + 2 \cdot \xi \cdot \omega_{pq} \cdot v \cdot e^{vt} + \omega_{pq}^2 \cdot e^{vt} = 0 \quad (3.50)$$

Dengan membagi sisi sebelah kiri dari persamaan (3.50) dengan faktor e^{vt} akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$v^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_{pq} \cdot v + \omega_{pq}^2 = 0 \quad (3.51)$$

Persamaan (3.51) memiliki akar yang dapat dinyatakan sebagai :

$$v_{1,2} = -\omega_{pq} \cdot \xi \pm i \cdot \omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.52)$$

Dengan demikian solusi fungsi waktu dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{vt} \\ &= e^{\left(-\xi \cdot \omega_{pq} + i \cdot \omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2}\right)t} + e^{\left(-\xi \cdot \omega_{pq} - i \cdot \omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2}\right)t} \\ &= e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot t} \left[a_0 \cdot e^{\left(i \cdot \omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2}\right)t} + b_0 \cdot e^{\left(-i \cdot \omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2}\right)t} \right] \\ &= e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot t} \left[a_0 \cdot \text{Cos}\left(\omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right) + b_0 \cdot \text{Sin}\left(\omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right) \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih sederhana sebagai berikut :

$$T(t) = e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot t} (a_0 \cdot \text{Cos}[\omega_D]t + b_0 \cdot \text{Sin}[\omega_D]t) \quad (3.54)$$

dengan :

$$\begin{aligned} \omega_D &= \omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2} \\ &= \text{Frekuensi sudut gerak getaran teredam} \\ a_0 \text{ dan } b_0 &= \text{Koefisien awal dari sistem bergetar} \end{aligned}$$

Turunan pertama dari fungsi waktu dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\dot{T}(t) = e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot t} (-a_0 \cdot \omega_D \cdot \text{Sin}[\omega_D]t + b_0 \cdot \text{Cos}[\omega_D]t) - \xi \cdot \omega_{pq} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot t} (a_0 \cdot \text{Cos}[\omega_D]t + b_0 \cdot \text{Sin}[\omega_D]t) \quad (3.55)$$

Dengan demikian solusi dari persamaan gerak pelat yang memenuhi kondisi batas dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$W(x,y,t) = W(x, y) \cdot T(t)$$

$$= [X(x)Y(y)]e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot t} (a_0 \cdot \text{Cos}[\omega_D]t + b_0 \cdot \text{Sin}[\omega_D]t) \quad (3.56)$$

Solusi homogen dari persamaan gerak pelat sesuai dengan persamaan (3.40) merupakan persamaan diferensial yang bersifat linier, maka superposisi dari persamaan (3.56) untuk setiap harga p dan q yang berbeda juga merupakan solusi dari persamaan homogen gerak pelat tersebut. Dengan demikian solusi homogen, w_h , pelat persegi panjang isotropik dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} w_h = w(x,y,t) &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} W_{pq}(x,y)T_{pq}(t) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} [X_{pq}(x)Y_{pq}(y)]e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot t} (a_{0[pq]} \cdot \text{Cos}[\omega_D]t + b_{0[p,q]} \cdot \text{Sin}[\omega_D]t) \end{aligned} \quad (3.57)$$

3.4 Solusi Partikuler

Sama halnya dengan solusi homogen, solusi partikuler (w_p), dapat diperoleh dengan cara menggunakan metode pemisahan variabel. Koefisien-koefisien yang terdapat pada solusi homogen sesuai dengan persamaan (3.57) diekspansikan sesuai dengan pengaruh beban luar (*excitation forces*) yang belum ada pada solusi homogen yang dapat dinyatakan sebagai :

$$\begin{aligned} w_p &= w_{pq}(x,y,t) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} X_{pq}(x)Y_{pq}(y)T_{pq}(t) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Apabila solusi sesuai dengan persamaan (3.58) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.40) akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} D \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} X_{pq}(x)Y_{pq}(y)T_{pq}(t) \right) + 2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} X_{pq}(x)Y_{pq}(y)T_{pq}(t) \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} X_{pq}(x)Y_{pq}(y)T_{pq}(t) \right) \right] + (\rho \cdot h) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} X_{pq}(x)Y_{pq}(y)T_{pq}(t) \right) \\ + \gamma \cdot h \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} X_{pq}(x)Y_{pq}(y)T_{pq}(t) \right) = P_z(x,y,t) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Dapat dilihat pada persamaan (3.59) bahwa semua deret ganda bersifat homogen, linier, dan konvergen, sehingga posisi operator diferensial dengan operator penjumlahan dapat bertukar tempat. Dengan demikian persamaan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} X_{pq}(x) Y_{pq}(y) T_{pq}(t) \right) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} 2.D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} X_{pq}(x) Y_{pq}(y) T_{pq}(t) \right) + \\ & \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} D \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} X_{pq}(x) Y_{pq}(y) T_{pq}(t) \right) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (\rho.h) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} X_{pq}(x) Y_{pq}(y) T_{pq}(t) \right) + \quad (3.60) \\ & \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \gamma.h \left(\frac{\partial}{\partial t} X_{pq}(x) Y_{pq}(y) T_{pq}(t) \right) = P_z(x, y, t) \end{aligned}$$

Jika operator diferensial dioperasikan pada persamaan (3.60) dan kemudian persamaan tersebut dibagi dengan fungsi posisi $W(x,y)=X_{pq}(x).Y_{pq}(y)$ dan selanjutnya diatur kembali, maka akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[D \left(\frac{X_{pq}^{IV}}{X_{pq}} + 2 \cdot \frac{X_{pq}^{II} \cdot Y_{pq}^{II}}{X_{pq} Y_{pq}} + \frac{Y_{pq}^{IV}}{Y_{pq}} \right) \right] + \quad (3.61) \\ & \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \rho.h \cdot \ddot{T}_{pq}(t) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \xi.h \cdot \dot{T}_{pq}(t) = \frac{P_z(x, y, t)}{X_{pq}(x) \cdot Y_{pq}(y)} \end{aligned}$$

Persamaan (3.61) dapat disederhanakan lebih lanjut sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} X_{pq}(x) Y_{pq}(y) \ddot{T}_{pq}(t) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} 2 \cdot \xi \cdot \omega_{pq} \left(X_{pq}(x) Y_{pq}(y) \cdot \dot{T}_{pq}(t) \right) \quad (3.62) \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (\omega_{pq})^2 \left(X_{pq}(x) Y_{pq}(y) T_{pq}(t) \right) = \frac{P_z(x, y, t)}{\rho.h} \end{aligned}$$

Kondisi syarat batas bersifat homogen, maka fungsi *eigen* dapat dibuktikan bersifat *orthogonal* (Wangsadinata, 1992). Persamaan diferensial fungsi waktu dapat diperoleh dengan menggunakan sifat *orthogonal* dari fungsi *eigen* tersebut. Persamaan (3.62) dapat diselesaikan dengan mengalikan persamaan tersebut dengan fungsi posisi $W(x,y) = X_{pq}(x).Y_{pq}(y)$ dan kemudian diintegrasikan untuk seluruh permukaan bidang pelat $0 \leq x \leq a$ dan $0 \leq y \leq b$, sehingga diperoleh persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
& \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b X_{pq}(x)Y_{pq}(y) \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} X_{pq}(x)Y_{pq}(y) \ddot{T}_{pq}(t) \right] dx dy + \\
& \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b X_{pq}(x)Y_{pq}(y) \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} 2.\xi.\omega_{pq} \left(X_{pq}(x)Y_{pq}(y) \dot{T}_{pq}(t) \right) \right] dx dy + \\
& \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b X_{pq}(x)Y_{pq}(y) \left[\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (\omega_{pq})^2 \left(X_{pq}(x)Y_{pq}(y) T_{pq}(t) \right) \right] dx dy = \\
& \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b X_{pq}(x)Y_{pq}(y) \left[\frac{P_z(x,y,t)}{\rho.h} \right] dx dy.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Faktor normalisasi dari *eigen vector* dapat dinyatakan sebagai :

$$Q_{pq} = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left(X_{pq}^2(x)Y_{pq}^2(y) \right) dx dy \tag{3.64}$$

Dengan memanfaatkan faktor normalisasi sesuai dengan persamaan (3.64) yang kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (3.63) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
Q_{pq} \left(\ddot{T}_{pq}(t) + 2.\xi.\omega_{pq} \dot{T}_{pq}(t) + \omega_{pq}^2 T_{pq}(t) \right) &= \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b X_{pq}(x)Y_{pq}(y) \left[\frac{P_z(x,y,t)}{\rho.h} \right] dx dy \\
\ddot{T}_{pq}(t) + 2.\xi.\omega_{pq} \dot{T}_{pq}(t) + \omega_{pq}^2 T_{pq}(t) &= \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b X_{pq}(x)Y_{pq}(y) \left[\frac{P_z(x,y,t)}{\rho.h.Q_{pq}} \right] dx dy
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Dengan menyederhanakan persamaan (3.65) akan diperoleh :

$$\ddot{T}_{pq}(t) + 2.\xi.\omega_{pq} \dot{T}_{pq}(t) + \omega_{pq}^2 T_{pq}(t) = \frac{1}{\rho.h.Q_{pq}} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b X_{pq}(x)Y_{pq}(y)P_z(x,y,t) dx dy \tag{3.66}$$

Persamaan (3.66) adalah persamaan diferensial fungsi waktu yang sudah dinormalisasikan. Sisi kanan dari persamaan (3.66) merupakan fungsi beban luar yang bekerja yang sudah dinormalisasikan dengan faktor Q_{pq} .

Solusi total dari persamaan diferensial (3.60) merupakan penjumlahan dari solusi homogen dan solusi partikuler dari fungsi waktu yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$T_{pq}(t) = \hat{T}_{pq}(t) + T_{pq}^*(t) \tag{3.67}$$

dengan :

$$\hat{T}_{pq}(t) = \text{Solusi homogen fungsi waktu}$$

$$T_{pq}^*(t) = \text{Solusi partikuler fungsi waktu}$$

Dengan demikian solusi homogen dari fungsi waktu adalah :

$$\hat{T}_{pq}(t) = e^{-\zeta \omega_{pq} t} (a_{0[p,q]} \cdot \text{Cos}[\omega_D] \cdot t + b_{0[p,q]} \cdot \text{Sin}[\omega_D] \cdot t) \quad (3.68)$$

Solusi partikuler, dapat diperoleh dengan bantuan integrasi Duhamel dan fungsi Green yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{e^{-\xi \omega_{pq} t}}{\omega_{pq} \sqrt{1-\xi^2}} \text{Sin}(\omega_{pq} \sqrt{1-\xi^2} \cdot t) \\ &= \frac{e^{-\xi \omega_{pq} t}}{\omega_D} \text{Sin}(\omega_D t) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Dengan menggunakan fungsi Green, solusi partikuler persamaan diferensial gerak teredam sesuai dengan persamaan (3.66) dapat diperoleh yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} T_{pq}^*(t) &= \frac{1}{(\rho \cdot h)} \int_0^t F(\tau) \cdot G(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \left[\frac{P_z(x, y, t)}{\rho \cdot h \cdot Q_{pq}} \int_{x=0}^a X_{pq}(x) dx \int_{y=0}^b Y_{pq}(y) dy \left(\frac{e^{-\xi \omega_{pq} (t-\tau)}}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_{pq}} \text{Sin}(\sqrt{1-\xi^2} \omega_{pq} (t-\tau)) \right) \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.70)$$

Solusi homogen $\hat{T}_{pq}(t)$ masih mengandung konstanta yang dapat diperoleh dengan menggunakan kondisi awal. Fungsi ini memperlihatkan kondisi getaran *transient* tanpa beban. Sedangkan solusi partikuler $T_{pq}^*(t)$ menggambarkan keadaan getaran.

Solusi partikuler dari persamaan diferensial merupakan gabungan solusi *spatial* dan solusi partikuler *temporal* sesuai persamaan berikut :

$$w_p = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} X_{pq}(x) \cdot Y_{pq}(y)$$

$$= \left(\int_0^t \left[\frac{P_z(x, y, t)}{\rho \cdot h \cdot Q_{pq}} \int_{x=0}^a X_{pq}(x) dx \int_{y=0}^b Y_{pq}(y) dy \left(\frac{e^{-\xi \cdot \omega_{pq}(t-\tau)}}{\sqrt{1-\xi^2} \cdot \omega_{pq}} \text{Sin}(\sqrt{1-\xi^2} \omega_{pq}(t-\tau)) \right) \right] dt. \right) \quad (3.71)$$

3.5 Solusi Total

Solusi total sistem dapat dinyatakan sebagai $w = w_h + w_p$ di mana w_h adalah sesuai dengan persamaan (3.57) dan w_p adalah sesuai dengan persamaan (3.71) yang secara lengkap dapat dinyatakan sebagai :

$$w(x, y, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} [X_{pq}(x) Y_{pq}(y)] e^{-\xi \cdot \omega_{pq} t} \left(a_{0[p,q]} \cdot \text{Cos}[\sqrt{1-\xi^2} \omega_{pq}] t + b_{0[p,q]} \cdot \text{Sin}[\sqrt{1-\xi^2} \omega_{pq}] t \right) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} [X_{pq}(x) Y_{pq}(y)] \left(\int_0^t \left[\frac{P_z(x, y, t)}{\rho \cdot h \cdot Q_{pq}} \int_{x=0}^a X_{pq}(x) dx \int_{y=0}^b Y_{pq}(y) dy \left(\frac{e^{\xi \cdot \omega_{pq} \tau}}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_{pq}} \text{Sin}(\omega_{pq} \sqrt{1-\xi^2}(t-\tau)) \right) d\tau \right] \right) \quad (3.72)$$

3.6 Fungsi Beban Dinamik

Sebelum mendapatkan solusi total sistem, harus terlebih dahulu mendefinisikan fungsi beban yang bekerja pada sistem tersebut. Fungsi beban dengan gerak sembarang dan amplitudo yang bervariasi dapat dinyatakan dengan fungsi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} p(x, y, t) &= p[x(t), y(t), t] \\ &= p(t) \delta[x - x(t)] \delta[y - y(t)] \end{aligned} \quad (3.73)$$

dengan :

$$\begin{aligned} P(t) &= \text{beban dinamik yang bekerja pada pelat dalam fungsi } t \\ &= P_0 + P(t) = P_0 (1 + \alpha \cdot \text{Cos}[\omega t]) \end{aligned} \quad (3.74)$$

P_0 = beban tengah rata-rata dan merupakan beban ekuivalen roda kendaraan (*equivalent single axle load, ESAL*)

α = koefisien Jenis kendaraan beban (diambil 0,5)

ω = frekuensi harmonis dari amplitudo beban transversal

$x(t)$ = fungsi posisi beban di arah x sebagai fungsi t

$$= v_0 \cdot t$$

v_0 = kecepatan beban transversal

$y(t)$ = fungsi posisi beban di arah y sebagai fungsi t

$$= b/2$$

$\delta[.]$ = Dirac's delta function yang diperlukan untuk penyelesaian persamaan gerak

Fungsi gerak ini dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan $T^*(t)$ pada solusi partikuler dengan menggunakan sifat dari *diract delta function* sebagai berikut :

$$\int_a^b F(t)\delta(t-c)dt = 0 \quad (3.75)$$

Kemudian dengan menggunakan sifat dari Diract Delta Function diatas dan fungsi beban pada persamaan (3.83) maka integral spatial dalam persamaan (3.79) $T^*(t)$ dapat disederhanakan menjadi :

$$T^*(t) = \frac{e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot t}}{\rho \cdot h \cdot Q_{pq} \sqrt{1 - \xi^2 \omega_{pq}^2}} \int_0^t \left[p(\tau) e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot \tau} \sin\{\omega_D(t - \tau)\} \int_0^a X(x)\delta(x - x(\tau))dx \int_0^a Y(y)\delta(y - y(\tau))dy \right] d\tau \quad (3.76)$$

Beban yang ditinjau pada penelitian ini adalah beban transversal berjalan dengan kecepatan konstan sesuai dengan fungsi waktu pada arah x . Sedangkan untuk arah y , beban bersifat konstan. Berdasarkan jenis beban ini, maka persamaan (3.79) di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$T^*(t) = \frac{e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot t}}{\rho \cdot h \cdot Q_{pq} \sqrt{1 - \xi^2 \omega_{pq}^2}} \int_0^t \left[p(\tau) e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot \tau} \sin\{\omega_D(t - \tau)\} \int_0^a X(x)\delta(x - x(v_0 \tau))dx \int_0^a Y(y)\delta(y - y_0)dy \right] d\tau \quad (3.77)$$

Dengan menggunakan sifat Dirac Delta Function pada persamaan (3.75) maka persamaan (3.77) menjadi :

$$T^*(t) = \frac{e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot t}}{(\rho \cdot h) \cdot Q_{pq} \sqrt{1 - \xi^2 \omega_{pq}^2}} \int_0^t \left[p(\tau) e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot \tau} \sin\{\omega_D(t - \tau)\} X(v_0 \tau) Y(y_0) \right] d\tau \quad (3.78)$$

Solusi total yang diperoleh dengan mensubtitusikan persamaan (3.74) ke persamaan (3.77) adalah sebagai berikut :

$$w(x, y, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} [X_{pq}(x) Y_{pq}(y)] e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot t} \left[a_{0[p,q]} \cdot \text{Cos}\left(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_{pq} t\right) + b_{0[p,q]} \cdot \text{Sin}\left(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_{pq} t\right) \right] +$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} [X_{pq}(x)Y_{pq}(y)] \int_0^t \left[\frac{P(\tau)e^{-\xi\omega_{pq}(t-\tau)}}{\rho h \cdot Q_{pq} \sqrt{1-\xi^2} \omega_{pq}} \int_{x=0}^a X_{pq}(v_o\tau) dx \cdot \int_{y=0}^b Y_{pq}(y) dy \cdot \text{Sin}(\omega_{pq} \sqrt{1-\xi^2} (t-\tau)) d\tau \right] \quad (3.79)$$

Bila kondisi awal $w(x,y,t) = 0$ pada $t = 0$ dan $v(x,y,t)=0$ pada $t=0$ dimana $v(x,y,t)=d[w(x,y,t)]/dt$ maka $a_0 = b_0 = 0$.

3.7 Respons Dinamik Pelat

Respons dinamik sistem pelat dapat dibagi menjadi dua buah interval waktu sebagai berikut :

1. Untuk waktu $0 \leq t \leq t_0$

Selama interval waktu ini, beban transversal masih berada di atas pelat yang ditinjau dan berlaku kondisi awal (*initial condition*) pada saat $t=0$, yaitu :

a. Lendutan : $w(x,y,t) = 0$ (3.80)

b. Kecepatan : $v(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t} w(x,y,t) = 0$ (3.81)

Dengan demikian koefisien a_{pq} dan b_{pq} pada persamaan (3.79) dapat dinyatakan sebagai :

$$a_{pq} = 0 \text{ dan } b_{pq} = 0 \quad (3.82)$$

Maka respons dinamik pelat pada saat beban masih berada di atas pelat adalah :

$$w(x, y, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} [X_{pq}(x) \cdot Y_{pq}(y) \cdot T^*_{pq}] \quad (3.83)$$

dengan:

$$T^*_{pq} = \int_0^t \left[\frac{P_0(1+\alpha \cos[\omega\tau])e^{-\xi\omega_{pq}(t-\tau)} X(v_o\tau)Y(y_0)}{\rho h \cdot Q_{pq} \sqrt{1-\xi^2} \omega_{pq}} \sin\{\sqrt{1-\xi^2} \omega_{pq}(t-\tau)\} \right] d\tau \quad (3.84)$$

2. Untuk interval waktu $t > t_0$

Selama interval waktu $t > t_0$, beban transversal sudah berada di luar pelat yang

ditinjau. Beban transversal telah keluar dari pelat yang ditinjau dan bergerak terus di atas pelat berikutnya yang bersebelahan dengan pelat pertama. Pada kondisi ini berlaku kondisi awal pada $t = t_0$, yaitu :

$$a. \text{ Lendutan : } w(x,y,t) = a_{pq} \quad (3.85)$$

$$b. \text{ Kecepatan : } v(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t} w(x,y,t) = 0 \\ = (\xi \omega_{pq}) a_{pq} + b_{pq} \quad (3.86)$$

Dengan demikian koefisien a_{pq} dan b_{pq} untuk interval waktu $t > t_0$ dapat dinyatakan sebagai :

$$a_{pq} = w_{0,pq} \quad (3.87)$$

$$b_{pq} = \frac{(\xi \omega_{pq}) w_{0,pq} + v_{0,pq}}{(\omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2})} \quad (3.88)$$

dengan :

$w_{0,pq}$ = Defleksi awal pada saat $t = t_0$

$v_{0,pq}$ = Kecepatan awal pada saat $t = t_0$

Respons dinamik pelat pada saat beban telah keluar meninggalkan pelat dapat dinyatakan sebagai :

$$\hat{w}_{pq} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[X_{pq} Y_{pq} \hat{T}_{pq} \right] \quad (3.89)$$

dengan:

$$\hat{T}_{pq} = e^{-\xi \omega_{pq}(t)} \left(w_{0,pq} \text{Cos} \left[\omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2} \cdot (t) \right] + \frac{(\xi \omega_{pq}) w_{0,pq} + v_{0,pq}}{(\omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2})} \sin \left\{ \sqrt{1 - \xi^2} \omega_{pq} (t) \right\} \right) d\tau \quad (3.90)$$

Bila persamaan (3.84) disubsitusikan ke dalam persamaan (3.83), akan dihasilkan respons dinamik sistem untuk interval waktu $0 \leq t \leq t_0$ yang dapat dinyatakan sebagai:

$$w(x, y, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} [X_{pq}(x) \cdot Y_{pq}(y)] \left[\int_0^t \left[\frac{P_0(1 + \alpha \cdot \cos[\omega\tau]) \cdot e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot (t-\tau)} X(v_o \tau) Y(y_o)}{\rho \cdot h \cdot Q_{pq} \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \omega_{pq}} \sin\{\sqrt{1 - \xi^2} \omega_{pq} (t - \tau)\} \right] d\tau \right] \quad (3.91)$$

Bila persamaan (3.90) disubsitusikan ke dalam persamaan (3.89), akan dihasilkan respons dinamik sistem untuk interval waktu $t > t_0$ yang dapat dinyatakan sebagai:

$$w(x, y, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[X_{pq}(x) \cdot Y_{pq}(y) \right] e^{-\xi \cdot \omega_{pq} \cdot (t)} (w_{0,pq} \text{Cos}[\omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2} \cdot (t)] + \frac{(\xi \omega_{pq}) w_{0,pq} + v_{0,pq}}{(\omega_{pq} \sqrt{1 - \xi^2})} \sin\{\sqrt{1 - \xi^2} \omega_{pq} (t)\}) \quad (3.92)$$

BAB 4

ANALISIS NUMERIK

4.1 Asumsi Perhitungan dan Beban yang Bekerja

Analisis dilakukan pada pelat yang terbuat dari beton untuk memperoleh nilai defleksi dinamik serta gaya-gaya dalam pelat yang meliputi momen dan geser. Selain itu, analisis juga dilakukan untuk membandingkan pengaruh nilai kekakuan rotasi pada perletakan terhadap nilai defleksi dan gaya-gaya dalam pelat tersebut. Pelat lantai dalam analisis ini dimodelkan sebagai pelat bersifat elastis dan isotropik, yaitu memiliki kekakuan yang sama pada arah x dan y.

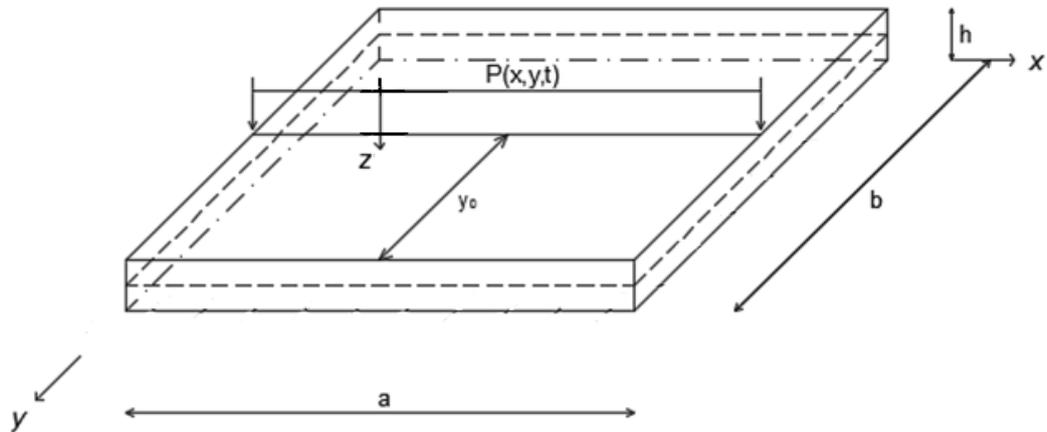
Defleksi dinamik maksimum absolut pelat lantai di tengah bentang akibat beban transversal yang bergerak dengan kecepatan konstan dihitung dengan mengikutsertakan 5 buah ragam getar masing-masing untuk arah x dan y. Pelat dimodelkan dengan ketebalan 15 cm. Beban yang diberikan adalah berupa beban kendaraan yang bergerak dengan kecepatan konstan dengan fungsi $P[1+0,5(\cos(\omega t))]$.

4.2 Parameter dan Properti Pelat Beton

Pelat beton yang dianalisis ini diasumsikan merupakan pelat daerah parkir bagi kendaraan bus pariwisata. Beberapa parameter yang digunakan dalam analisis ini adalah sebagai berikut:

1. Pelat beton bersifat elastis, homogen, dan isotropik serta dianalisis dengan menggunakan nilai kekakuan rotasi pada perletakan (\bar{k}) yang berbeda-beda. Nilai yang diambil adalah 0,3 (untuk kondisi *semi rigid* mendekati sendi), 0,5 (untuk kondisi *semi rigid* antara jepit dan sendi), dan 0,7 (untuk kondisi *semi rigid* mendekati jepit).
2. Beban transversal pada pelat dimodelkan sebagai beban harmonis yang bergerak dengan kecepatan konstan di arah sumbu x (y bersifat konstan).

Dimensi pelat beton yang digunakan untuk analisis adalah berdasarkan ukuran pelat yang digunakan pada pelat parkir untuk bus pariwisata. Ukuran pelat beton dapat dilihat pada Gambar 4.1 serta untuk karakteristik pelat dapat dilihat pada Tabel 4.1.



Gambar 4.1 Pemodelan Pelat

Tabel 4.1 Data Pelat

Notasi	Keterangan	Nilai	Satuan
a	Panjang Pelat	5	m
s	Perbandingan Panjang dan Lebar Pelat	1	
h	Tebal Pelat	0.15	m
ρ	Massa Jenis Beton	2400	kg/m ³
E_x	Modulus Elastisitas arah x	$2,35 \times 10^{10}$	N/m ²
E_y	Modulus Elastisitas arah y	$2,35 \times 10^{10}$	N/m ²
ν_x	<i>Poisson Ratio</i> arah x	0.3	-
ν_y	<i>Poisson Ratio</i> arah y	0.3	-
D_x	Kekakuan lentur arah x	$7,26305 \times 10^6$	Nm
D_y	Kekakuan lentur arah y	$7,26305 \times 10^6$	Nm

4.3 Beban Dinamik Transversal

Beban roda kendaraan yang bergerak pada permukaan pelat beton merupakan beban roda bus pariwisata $P_z(x,y,t)$ dan bekerja membebani permukaan pelat. Asumsi-asumsi yang digunakan dalam analisis ini adalah sebagai berikut:

1. Beban dinamik dianggap selalu bekerja dan menempel pada bidang tengah pelat sebagai beban resultan terpusat P_0 (*single point load*).

2. Besarnya beban terpusat P_0 yang digunakan sebagai beban tengah rata-rata adalah resultan beban sumbu standar roda ganda atau roda kendaraan sumbu tunggal (*equivalent single axle load*, ESAL) yang besarnya adalah 100 kN.
3. Arah gerak beban adalah searah dengan sumbu x.
4. Besarnya kecepatan kendaraan diambil sebesar 30 km/jam dengan nilai frekuensi beban sebesar 80 rad/s.
5. Rasio redaman untuk pelat beton diambil sebesar 5%.

4.4 Frekuensi Alami Sistem

Analisis numerik dilakukan dengan menggunakan program Mathematica 10.2 dengan memasukkan data-data pelat dan beban dinamik seperti yang telah disebutkan sebelumnya. Variasi yang dilakukan pada penelitian ini adalah pada nilai koefisien kekakuan rotasi, yang diambil sebesar 0,3, 0,5, dan 0,7 serta variasi kecepatan beban dinamik dan rasio redaman. Rasio redaman diambil sebesar 5% untuk analisis utama. Sedangkan untuk analisis pembandingan rasio redaman diambil sebesar 0% dan 10%. Hasil analisis kemudian akan disajikan dalam bentuk tabel, grafik, dan gambar tiga dimensi.

Frekuensi alami sistem diperhitungkan untuk 5 mode ragam getar pertama (Alisjahbana, 2002). Nilai p dan q diperoleh berdasarkan persamaan yang telah diturunkan pada Bab 3 sebelumnya. Nilai p dan q menyatakan mode di arah x dan y dan berupa bilangan riil yang dihitung berdasarkan persamaan tak bersatuan (*non-dimensional*). Nilai ragam getar dan frekuensi alami sistem berdasarkan variasi koefisien kekakuan rotasi akan disajikan pada Tabel 4.2. Dapat dilihat bahwa semakin mendekati kondisi sendi, maka nilai p, q, dan frekuensi alami sistem akan semakin besar.

Tabel 4.2 Nilai Ragam Getar dan Frekuensi Alami Sistem dengan Variasi Nilai \bar{k}

m	n	$\bar{k} = 0,3$			$\bar{k} = 0,5$			$\bar{k} = 0,7$		
		p	q	ω	p	q	ω	p	q	ω
1	1	0,99937	0,99937	19,714	0,99823	0,99823	19,669	0,99650	0,99650	19,601
	2	0,99983	1,99972	49,333	0,99952	1,99921	49,307	0,99905	1,99845	49,268
	3	0,99994	2,99986	98,686	0,99982	2,99960	98,669	0,99966	2,99921	98,643
	4	0,99997	3,99991	167,776	0,99992	3,99976	167,763	0,99984	3,99954	167,744
	5	0,99999	4,99994	256,604	0,99996	4,99985	256,594	0,99992	4,99970	256,578
2	1	1,99972	0,99983	49,333	1,99921	0,99952	49,307	1,99845	0,99905	49,268
	2	1,99984	1,99984	78,944	1,99956	1,99956	78,922	1,99914	1,99914	78,889
	3	1,99992	2,99989	128,295	1,99978	2,99970	128,279	1,99956	2,99942	128,253
	4	1,99996	3,99993	197,385	1,99988	3,99980	197,372	1,99976	3,99961	197,352
	5	1,99997	4,99995	286,213	1,99993	4,99986	286,202	1,99986	4,99973	286,186
3	1	2,99986	0,99994	98,686	2,99960	0,99982	98,669	2,99921	0,99966	98,643
	2	2,99989	1,99992	128,295	2,99970	1,99978	128,279	2,99942	1,99956	128,253
	3	2,99993	2,99993	177,645	2,99981	2,99981	177,630	2,99962	2,99962	177,608
	4	2,99996	3,99995	246,733	2,99988	3,99985	246,721	2,99976	3,99970	246,702
	5	2,99997	4,99996	335,561	2,99992	4,99989	335,551	2,99984	4,99978	335,535
4	1	3,99991	0,99997	167,776	3,99976	0,99992	167,763	3,99954	0,99984	167,744
	2	3,99993	1,99996	197,385	3,99980	1,99988	197,372	3,99961	1,99976	197,352
	3	3,99995	2,99996	246,733	3,99985	2,99988	246,721	3,99970	2,99976	246,702
	4	3,99996	3,99996	315,821	3,99989	3,99989	315,810	3,99979	3,99979	315,794
	5	3,99997	4,99997	404,648	3,99992	4,99991	404,639	3,99985	4,99982	404,624
5	1	4,99994	0,99999	256,604	4,99985	0,99996	256,594	4,99970	0,99992	256,578
	2	4,99995	1,99997	286,213	4,99986	1,99993	286,202	4,99973	1,99986	286,186
	3	4,99996	2,99997	335,561	4,99989	2,99992	335,551	4,99978	2,99984	335,535
	4	4,99997	3,99997	404,648	4,99991	3,99992	404,639	4,99982	3,99985	404,624
	5	4,99997	4,99997	493,475	4,99993	4,99993	493,466	4,99986	4,99986	493,453

Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, untuk perhitungan p, q, dan frekuensi alami sistem masih dilakukan secara tak bersatuan (*analisis free vibration*). Kemudian untuk perhitungan *force vibration* dengan adanya beban dinamik, frekuensi natural sistem kemudian diubah ke dalam bentuk bersatuan sesuai dengan persamaan 3.9 pada bab sebelumnya. Nilai frekuensi alami sistem yang bersatuan dapat dilihat pada Tabel 4.3 berikut.

Tabel 4.3 Nilai Frekuensi Alami Sistem dengan Satuan rad/s

m	n	$\bar{k} = 0,3$	$\bar{k} = 0,5$	$\bar{k} = 0,7$
		ω (rad/s)	ω (rad/s)	ω (rad/s)
1	1	112,007	111,752	111,366
	2	280,291	280,143	279,920
	3	560,693	560,594	560,445
	4	953,231	953,157	953,046
	5	1457,910	1457,850	1457,770
2	1	280,291	280,143	279,920
	2	448,528	448,403	448,214
	3	728,919	728,823	728,680
	4	1121,450	1121,380	1121,270
	5	1626,140	1626,080	1625,990
3	1	560,693	560,594	560,445
	2	728,919	728,823	728,680
	3	1009,300	1009,220	1009,090
	4	1401,830	1401,760	1401,660
	5	1906,510	1906,450	1906,370
4	1	953,231	953,157	953,046
	2	1121,450	1121,380	1121,270
	3	1401,830	1401,760	1401,660
	4	1794,360	1794,300	1794,200
	5	2299,040	2298,980	2298,900
5	1	1457,910	1457,850	1457,770
	2	1626,140	1626,080	1625,990
	3	1906,510	1906,450	1906,370
	4	2299,040	2298,980	2298,900
	5	2803,710	2803,660	2803,590

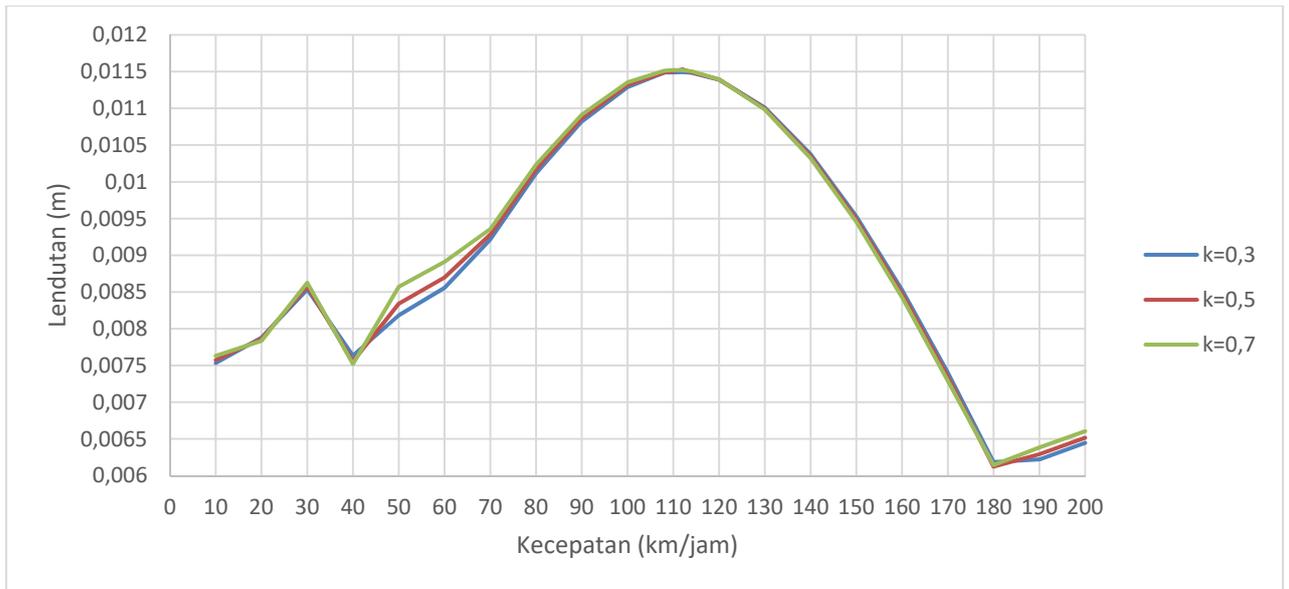
4.5 Kecepatan Kritis

Kecepatan kritis merupakan kecepatan gerak beban yang diperlukan untuk menyebabkan respons maksimum pada pelat. Untuk mencari kecepatan kritis ini, maka analisis respons akan dilakukan dengan *running* program berdasarkan properti pelat yang telah disebutkan sebelumnya. *Increment* kecepatan ditetapkan sebesar 10 km/jam. Analisis untuk mendapatkan kecepatan kritis ini dilakukan juga pada variasi koefisien kekakuan rotasi yaitu 0,3, 0,5, dan 0,7. Lendutan absolut kecepatan kritis untuk masing-masing studi kasus pada kondisi $0 < t < t_0$ dapat dilihat pada Tabel 4.4 dan Gambar 4.2. Terlihat bahwa setiap nilai koefisien kekakuan rotasi memiliki kecepatan kritis sistem

yang berbeda-beda pula. *Increment* diperkecil pada kecepatan sekitar 110 km/jam untuk mendapatkan angka akurat kecepatan kritis sistem sehingga diperoleh kecepatan kritis untuk nilai $\bar{k} = 0,3$ dan $0,5$ adalah pada 112 km/jam sedangkan untuk nilai $\bar{k} = 0,7$ kecepatan kritis sistem berada pada 110 km/jam.

Tabel 4.4 Lendutan dengan Berbagai Variasi Kecepatan

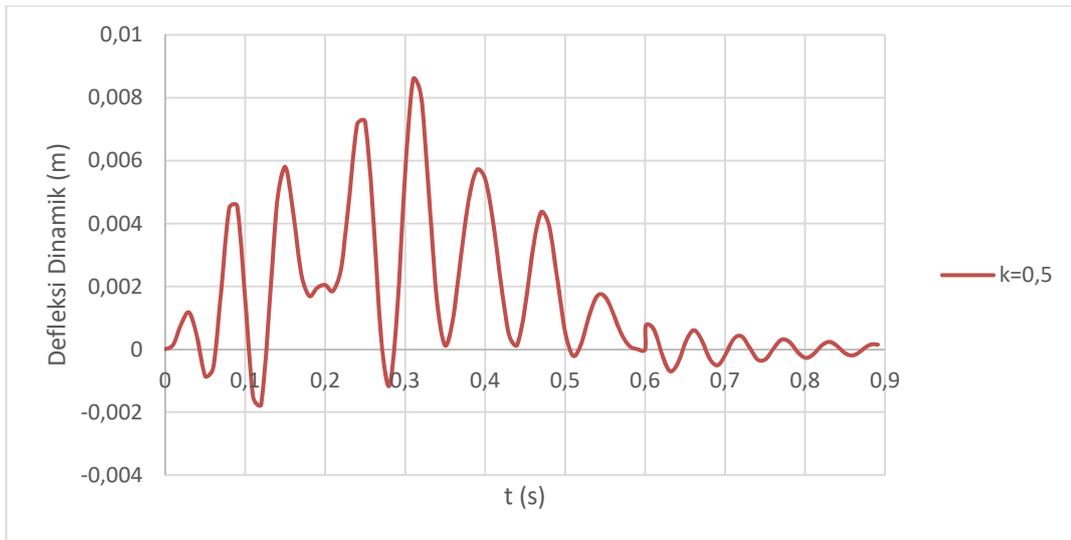
Kecepatan (km/jam)	Lendutan (m)		
	$\bar{k} = 0,3$	$\bar{k} = 0,5$	$\bar{k} = 0,7$
10	0,007533	0,0075739	0,0076301
20	0,0078787	0,0078637	0,0078354
30	0,0085348	0,0085756	0,0086252
40	0,007636	0,0075551	0,0075199
50	0,0081834	0,0083419	0,0085712
60	0,0085563	0,0086977	0,0089104
70	0,0092159	0,0092849	0,0093582
80	0,0101134	0,0101714	0,0102334
90	0,0108203	0,0108653	0,010914
100	0,0112904	0,011321	0,011355
108	0,0114863	0,011488	0,0115106
110	0,0114863	0,0115018	0,0115205
112	0,0114906	0,0115301	0,0115186
114	0,0114831	0,0114925	0,011505
120	0,0113903	0,0113906	0,0113938
130	0,0110096	0,0109951	0,0109835
140	0,0103746	0,0103464	0,0103211
150	0,0095306	0,0094903	0,0094529
160	0,0085257	0,0084755	0,0084282
170	0,0074008	0,0073436	0,0072892
180	0,0061844	0,0061238	0,0061443
190	0,0062204	0,0062926	0,0063831
200	0,0064465	0,0065168	0,0066058



Gambar 4.2 Grafik Kecepatan Kritis

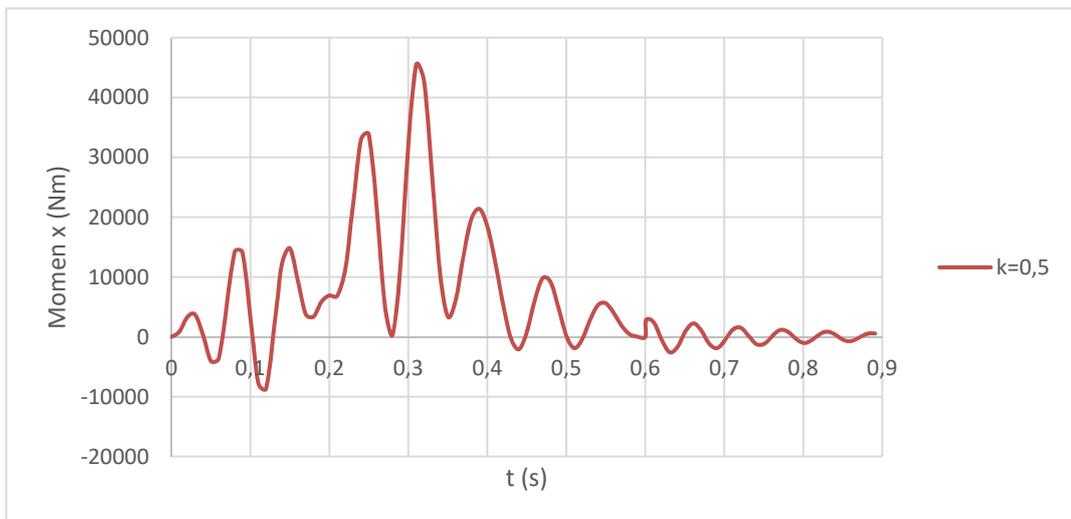
4.6 Riwayat Waktu (*Time History*) Defleksi Dinamik dan Gaya Dalam Pelat

Grafik yang menunjukkan respons pelat terhadap waktu disebut “Riwayat Waktu”. Riwayat waktu respon sistem diperoleh dengan memasukkan harga defleksi terhadap waktu pada kondisi beban berada di dalam pelat ($0 < t < t_0$) dan pada kondisi beban telah meninggalkan pelat ($t > t_0$) dengan t_0 adalah waktu saat beban transversal meninggalkan pelat. Nilai t_0 diperoleh dari lebar pelat pada arah yang ditinjau dibagi dengan kecepatan beban kendaraan. Beban pada analisis ini bergerak di arah x, maka diambil lebar pelat = 5 m dan kecepatan beban pada 30 km/jam. Dengan demikian diperoleh $t_0 = 0,6$ detik. Beban kendaraan ini bergerak di arah x pada posisi tengah bentang pelat yaitu $y_0 = b/2$. Riwayat waktu defleksi dinamik pada pusat pelat untuk kondisi *semi rigid* dengan $\bar{k} = 0,5$ ditunjukkan pada Gambar 4.3. Berdasarkan gambar tersebut, dapat dilihat bahwa lendutan pelat cenderung mengecil menuju nol saat posisi beban di luar pelat ($t > 0,6$ s). Hal ini dapat terjadi karena terdapat rasio redaman sebesar 5% pada pelat beton tersebut.

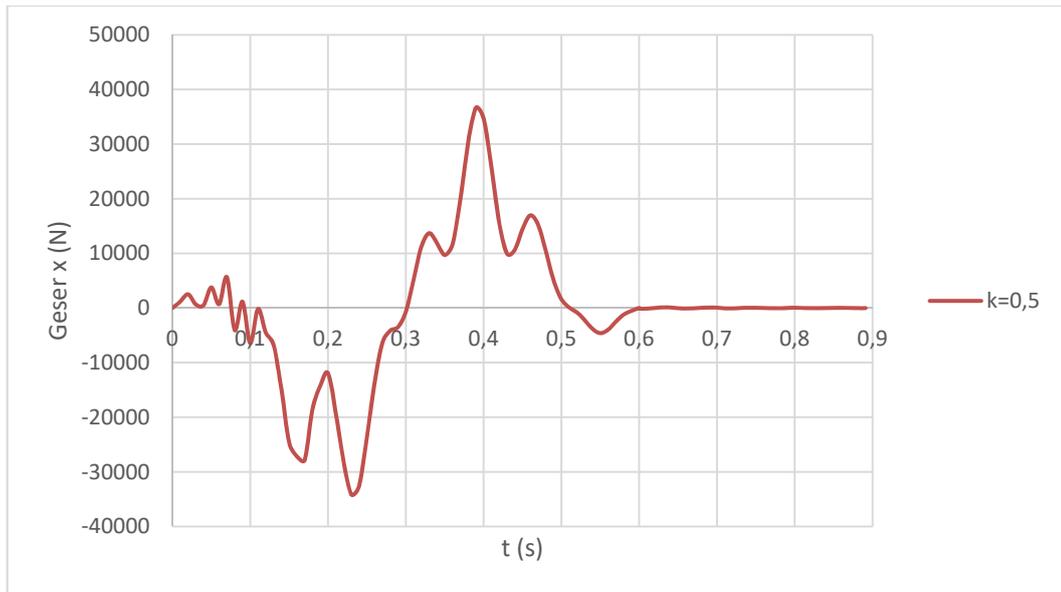


Gambar 4.3 Riwayat Waktu Defleksi Dinamik

Selain riwayat waktu untuk defleksi dinamik, dapat dilihat pula riwayat waktu untuk momen x di tengah bentang dengan nilai $\bar{k} = 0,5$ pada Gambar 4.4 dan riwayat waktu untuk geser arah x pada Gambar 4.5.



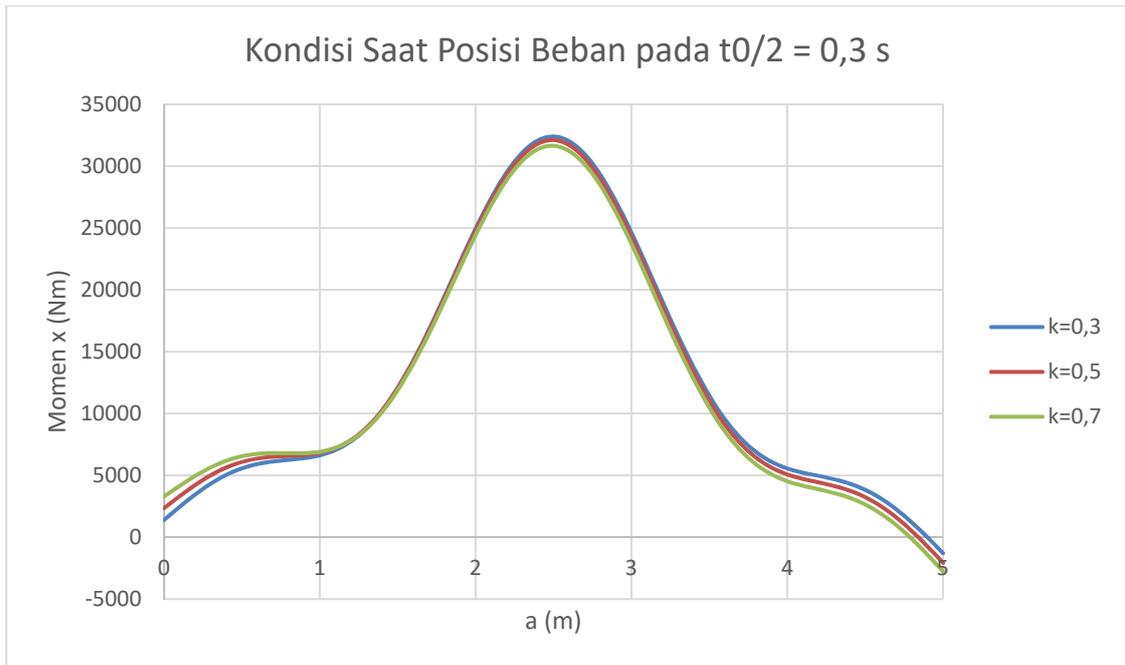
Gambar 4.4 Riwayat Waktu Momen Arah X



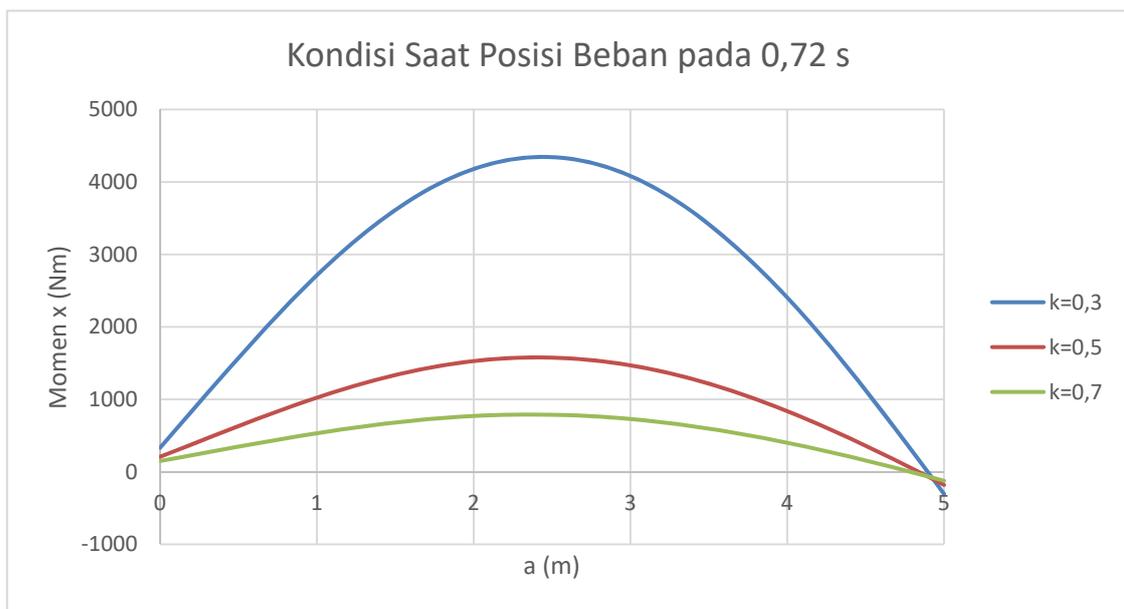
Gambar 4.5 Riwayat Waktu Gaya Geser Arah X

4.7 Perhitungan Defleksi Dinamik dan Gaya Dalam Pelat pada Saat Posisi Beban $t=0,3$ s dan $t=0,72$ s

Perhitungan gaya-gaya dalam juga dilakukan pada kondisi beban transversal ketika $t=0,3$ s yaitu saat beban berada pada tengah bentang dan ketika $t=0,72$ s yaitu saat beban transversal telah meninggalkan pelat. Momen pada pelat dapat diperoleh dari turunan kedua dari fungsi lendutan sedangkan gaya geser pada pelat diperoleh dari turunan ketiga fungsi lendutan. Gambar 4.6 dan Gambar 4.7 menunjukkan grafik momen arah x pelat dalam kondisi berbagai jenis perletakan saat posisi beban di dalam dan di luar pelat.

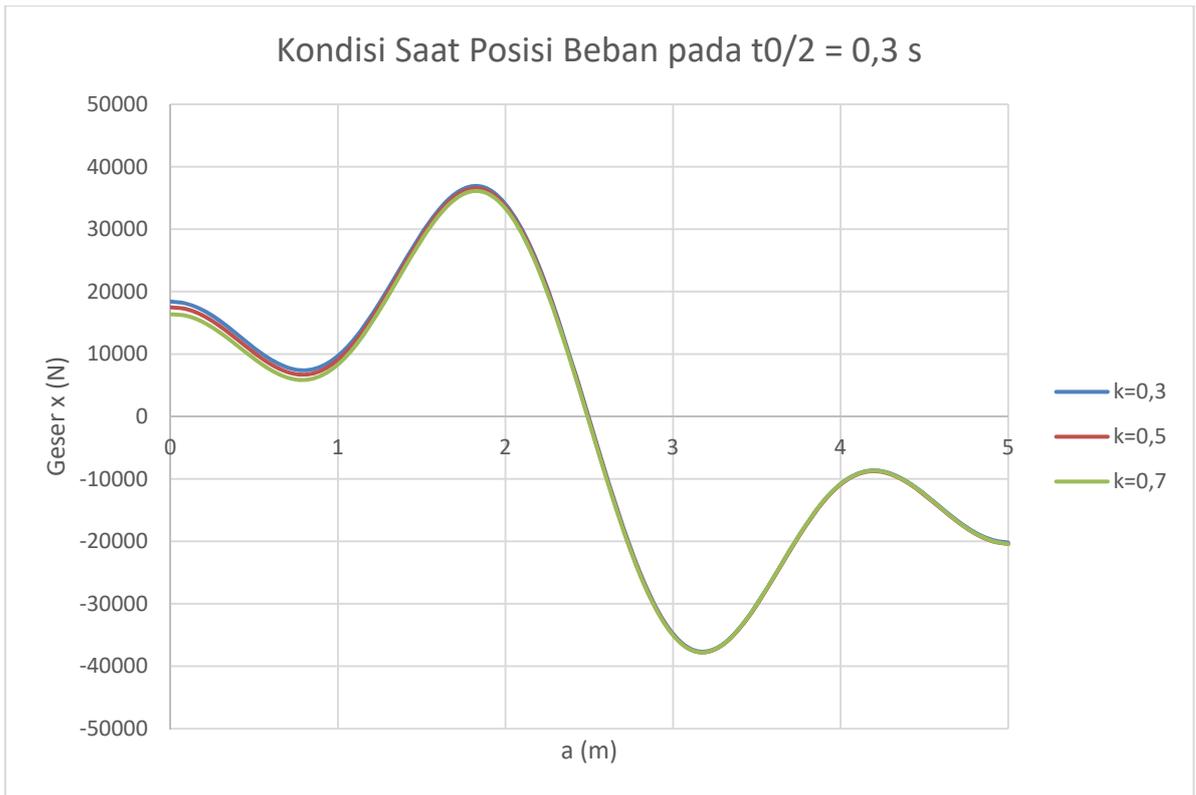


Gambar 4.6 Grafik Momen Arah X Saat Posisi Beban pada $t = 0,3$ s

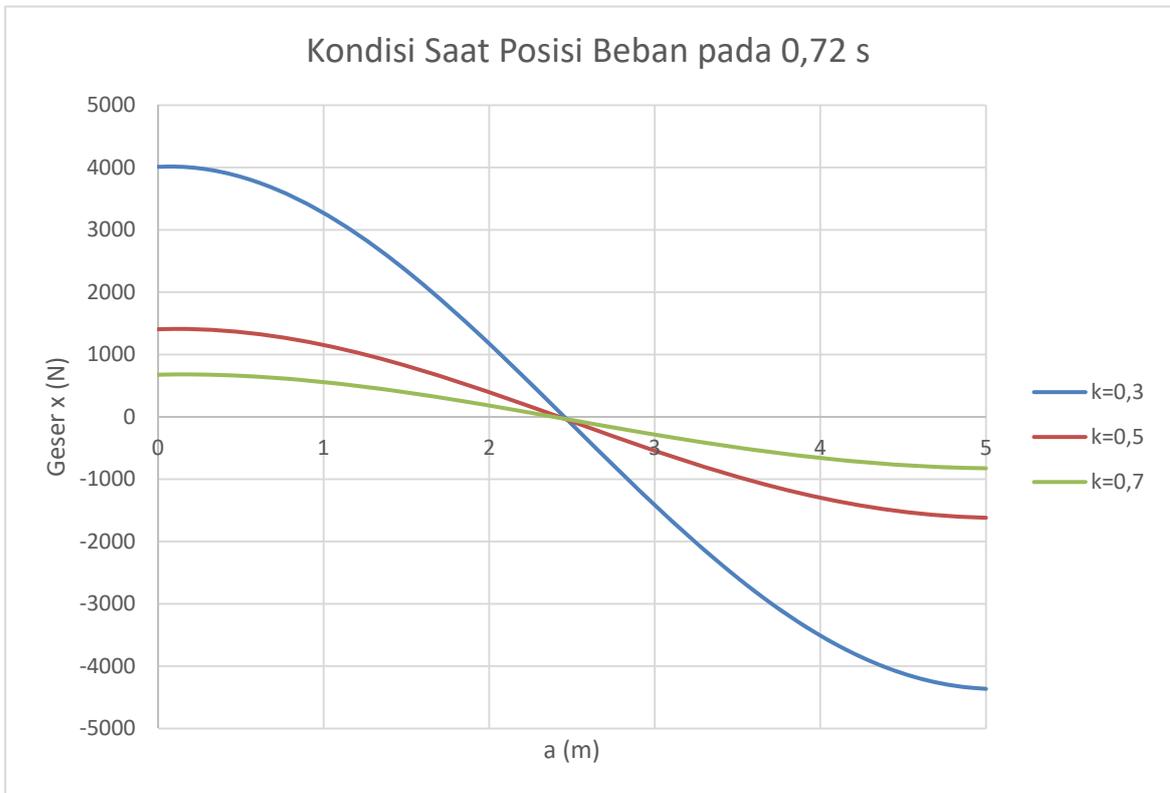


Gambar 4.7 Grafik Momen Arah X Saat Posisi Beban pada $t = 0,72$ s

Gambar 4.8 dan Gambar 4.9 menunjukkan grafik gaya geser pelat yang diperoleh dari turunan ketiga fungsi lendutan. Gaya geser ini pun dihitung saat beban berada di dalam dan di luar pelat dengan kondisi koefisien rotasi perletakan yang beragam. Perbedaan gaya geser yang dihasilkan terlihat cukup signifikan saat kondisi beban berada di luar pelat.



Gambar 4.8 Grafik Gaya Geser Arah X Saat Posisi Beban pada $t = 0,3$ s



Gambar 4.9 Grafik Gaya Geser Arah X Saat Posisi Beban pada $t = 0,72$ s

Rangkuman besarnya nilai gaya-gaya dalam pada pelat untuk kondisi beban pada $t = 0,3$ s dan pada $t = 0,72$ s disajikan pada Tabel 4.5 dan Tabel 4.6. Berdasarkan perbandingan hasil defleksi dinamik pada $\bar{k} = 0,3$ dan $\bar{k} = 0,7$, diperoleh persentase perbedaan nilai defleksi untuk kedua nilai k tersebut adalah sebesar 3,32% untuk kondisi beban di dalam pelat dan sebesar 69,45% untuk kondisi beban setelah meninggalkan pelat. Sedangkan untuk persentase perbedaan nilai momen untuk kedua nilai \bar{k} tersebut adalah sebesar 2,3% untuk kondisi beban di dalam pelat dan 59,8% untuk kondisi beban setelah meninggalkan pelat. Persentase perbedaan nilai gaya geser untuk kedua nilai \bar{k} adalah mencapai 2,19% untuk kondisi beban di dalam pelat dan mencapai 83,06% untuk kondisi beban setelah meninggalkan pelat.

Dari tabel tersebut juga terlihat bahwa semakin besar nilai \bar{k} (semakin mendekati kondisi jepit) maka defleksi dan momen tengah bentang yang dihasilkan akan semakin kecil. Sedangkan untuk momen tumpuan, semakin besar nilai \bar{k} maka momen tumpuan yang dihasilkan akan semakin besar. Hal ini juga berbanding lurus dengan gaya geser yang dihasilkan. Gaya geser yang dihasilkan pada daerah lapangan (maks.) akan mengecil seiring dengan kondisi perletakan mendekati jepit. Sedangkan gaya geser pada daerah tumpuan (min.) semakin besar bila kondisi perletakan mendekati jepit. Besarnya momen arah x dan y serta gaya geser arah x dan y adalah sama pada Tabel 4.5 karena gaya dalam tersebut ditinjau saat posisi beban pada tengah bentang dan sifat pelat adalah isotropik yaitu memiliki kekakuan yang sama pada arah x dan y .

Tabel 4.5 Defleksi dan Gaya Dalam Saat Posisi Beban pada $t = 0,3$ s

		Nilai \bar{k}		
		0,3	0,5	0,7
Defleksi (m)		0,005658	0,005587	0,00547
Momen X (Nm)	maks.	32393,7	32109,9	31648,4
	min.	-1289,94	-2067,02	-2756,12
Momen Y (Nm)	maks.	32393,7	32109,9	31648,4
	min.	-1289,94	-2067,02	-2756,12
Geser X (N)	maks.	36927,8	36554,7	36120,9
	min.	-37677,4	-37782,4	-37790,9
Geser Y (N)	maks.	36297,8	36554,7	36120,9
	min.	-37677,4	-37782,4	-37790,9

Tabel 4.6 Defleksi dan Gaya Dalam Saat Posisi Beban pada $t = 0,72$ s

		Nilai \bar{k}		
		0,3	0,5	0,7
Defleksi (m)		0,001166	0,000424	0,000356
Momen X (Nm)	maks.	4345,49	1578,08	790,215
	min.	-306,312	-180,442	-123,144
Momen Y (Nm)	maks.	4345,49	1578,09	790,224
	min.	-306,312	-180,432	-123,138
Geser X (N)	maks.	4016,31	1410,28	680,43
	min.	-4363,43	-1618,85	-825,701
Geser Y (N)	maks.	4016,78	1410,49	680,513
	min.	-4362,94	-1618,62	-825,609

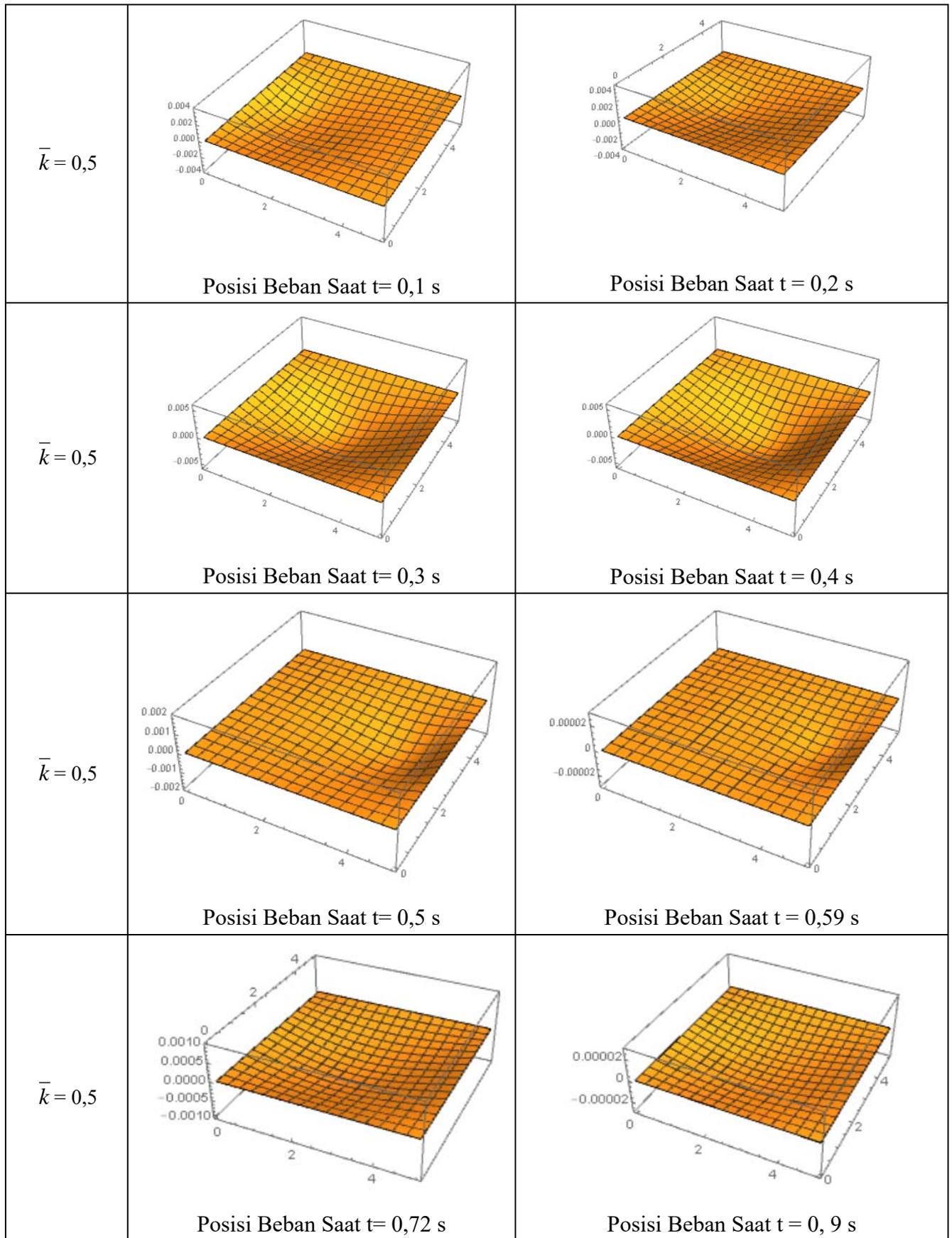
Sesuai dengan teori lendutan kecil, maka lendutan pelat dibatasi tidak boleh melebihi $1/10$ dari dimensi terkecil pelat, dalam hal ini adalah tebal pelat. Pada Tabel 4.7 disajikan pengecekan defleksi yang terjadi pada setiap kondisi perletakan pelat terhadap lendutan ijinnya.

Tabel 4.7 Pengecekan Defleksi Pelat Terhadap Defleksi Ijin

\bar{k}	Defleksi yang Terjadi (m)		Defleksi Ijin (m)	Keterangan
	Saat $0 < t < t_0$	Saat $t > t_0$		
0,3	0,005658	0,001166	0,015	OK
0,5	0,005587	0,000424	0,015	OK
0,7	0,00547	0,000356	0,015	OK

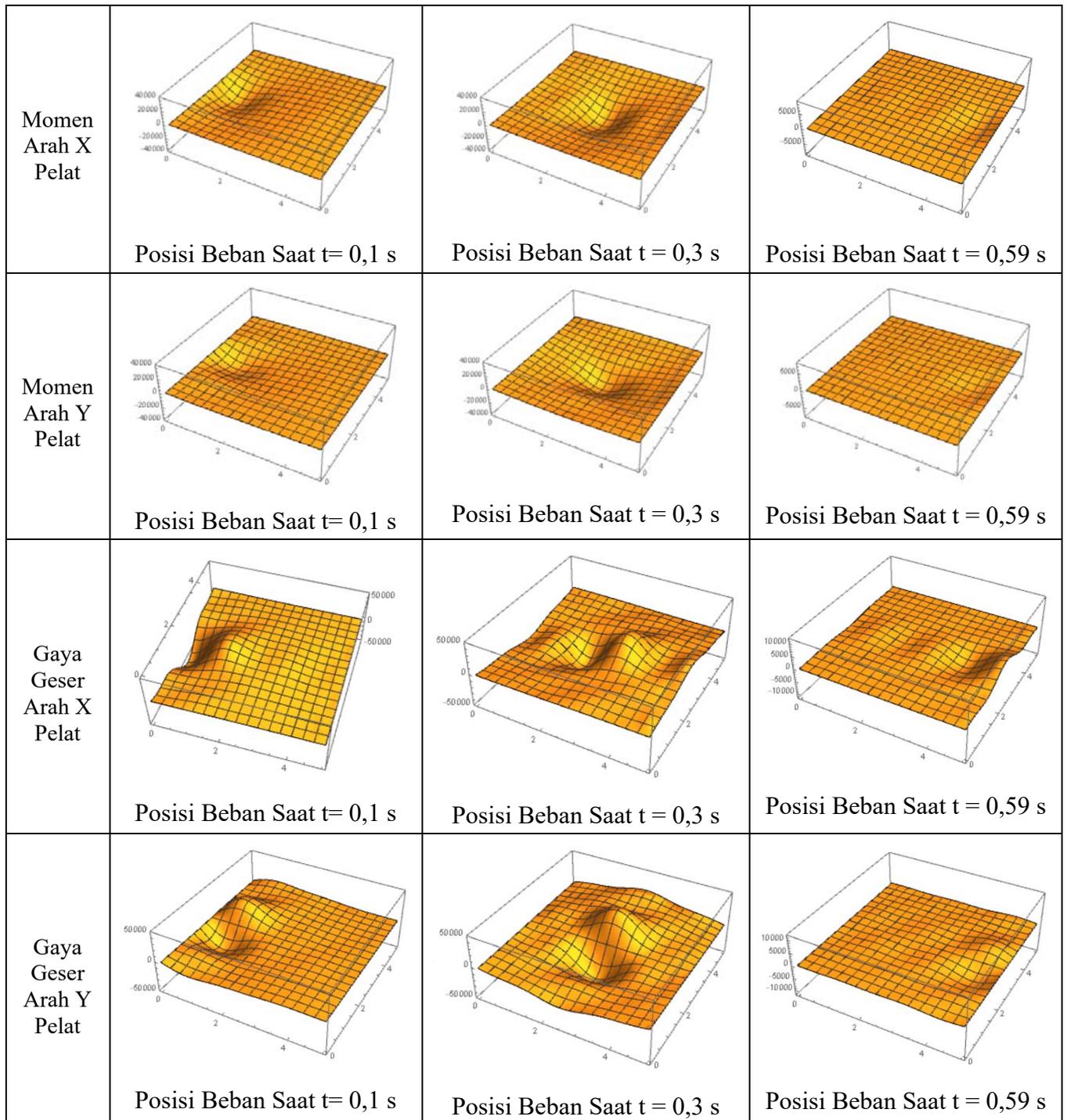
4.8 Perilaku Pelat Saat Posisi Beban di dalam Pelat ($0 < t < t_0$) dan Saat Beban Diluar Pelat ($t > t_0$)

Gambar 4.10 menunjukkan defleksi dinamik pada setiap posisi beban yang bergerak di arah x dan konstan pada posisi $y/2$ untuk nilai $\bar{k} = 0,5$. Dari gambar tersebut terlihat bahwa defleksi maksimum terjadi saat beban berada di sekitar tengah bentang.



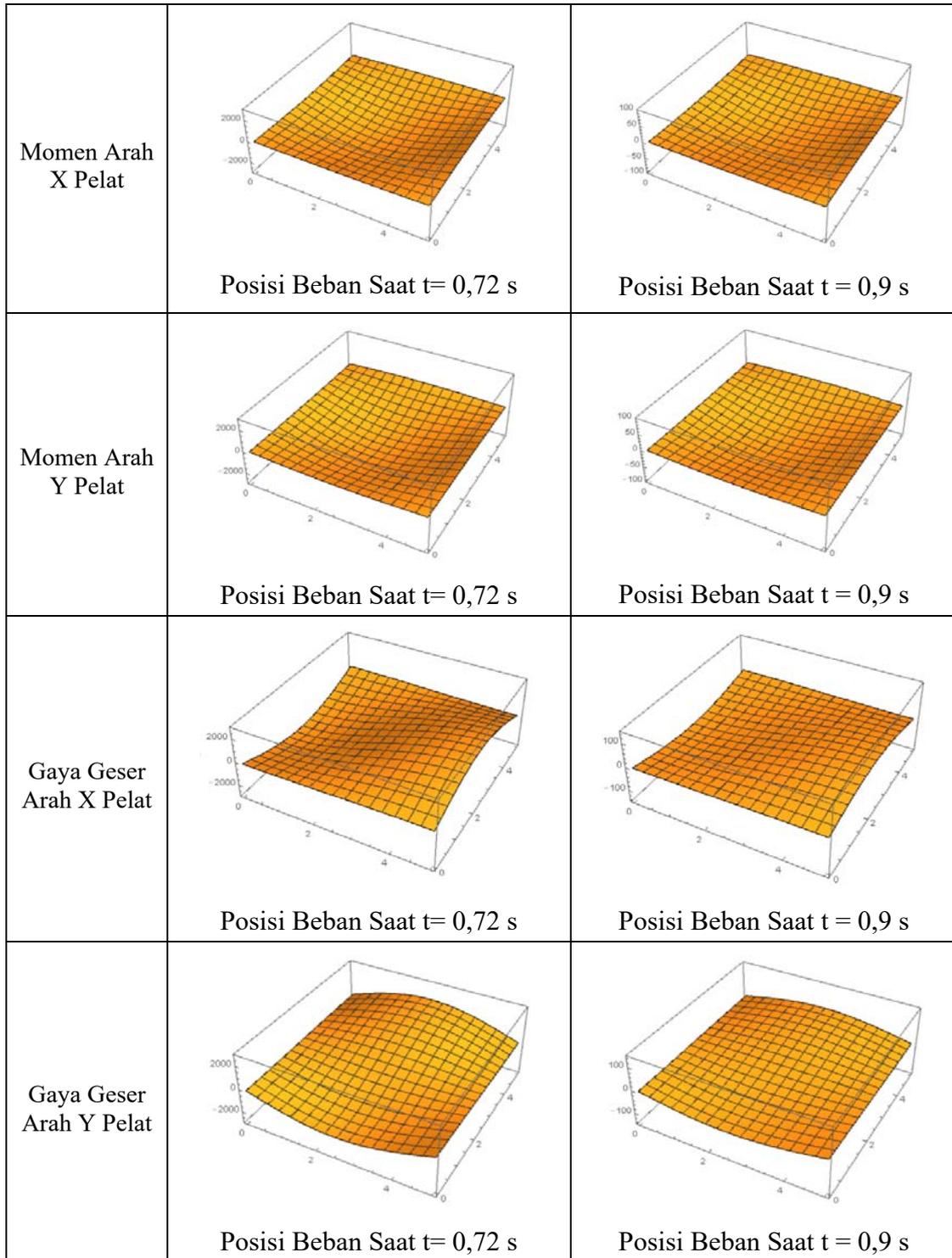
Gambar 4.10 Defleksi Dinamik Tengah Bentang Pelat pada Setiap Posisi Beban

Gambar 4.11 menunjukkan momen dan gaya geser arah x dan arah y pelat untuk setiap posisi beban di dalam pelat dengan $\bar{k} = 0,5$. Dari gambar tersebut juga terlihat bahwa respons dinamik maksimum terjadi pada saat posisi beban berada di sekitar tengah pelat.



Gambar 4.11 Momen dan Gaya Geser Arah X dan Arah Y dalam 3D Saat Posisi Beban dalam Pelat ($0 < t < t_0$)

Gambar 4.12 menunjukkan momen dan gaya geser arah x dan arah y pelat untuk setiap posisi beban diluar pelat dengan $\bar{k} = 0,5$. Pada gambar ditunjukkan diagram gaya dalam pelat saat beban pada posisi $t = 0,72$ s dan $t = 0,9$ s.



Gambar 4.12 Momen dan Gaya Geser Arah X dan Arah Y dalam 3D Saat Posisi Beban Diluar Pelat ($t > t_0$)

4.9 Perhitungan Defleksi Dinamik dan Gaya Dalam Pelat pada Saat Posisi Beban di Tengah Pelat dengan $v= 50$ km/jam

Analisis juga dilakukan saat kecepatan beban sebesar 50 km/jam sebagai pembandingan dari analisis utama sebelumnya. Berdasarkan tabel defleksi dengan variasi kecepatan, dengan kecepatan beban sebesar 50 km/jam akan diperoleh respons dinamik yang lebih kecil dibandingkan dengan kecepatan beban sebesar 30 km/jam.

Pada Tabel 4.8 ditunjukkan defleksi dan gaya-gaya dalam pelat saat beban berada di tengah bentang pelat. Dari tabel tersebut terlihat bahwa defleksi dan gaya dalam pelat saat beban di tengah bentang dengan kecepatan 50 km/jam benar cenderung lebih kecil bila dibandingkan dengan defleksi dan gaya dalam pelat dengan kecepatan beban sebesar 30 km/jam. Hal ini menunjukkan bahwa kecepatan beban juga sangat berpengaruh terhadap respons dinamik pelat.

Tabel 4.8 Defleksi dan Gaya Dalam Pelat dengan $v= 50$ km/jam Saat Beban di Tengah Pelat ($t= 0,18$ s)

		Nilai \bar{k}		
		0,3	0,5	0,7
Defleksi (m)		0,002487	0,00238	0,002219
Momen X (Nm)	maks.	17391,34	16985,74	16378,51
	min.	-511,842	-787,539	-983,973
Momen Y (Nm)	maks.	17391,34	16985,74	16378,51
	min.	-511,842	-787,539	-983,973
Geser X (N)	maks.	24388,8	24161,5	23882,5
	min.	-24637,4	-24539,8	-24335,8
Geser Y (N)	maks.	24388,8	-255,382	23882,5
	min.	-24637,4	-24539,8	-24335,8

Berdasarkan analisis dari kecepatan beban 30 km/jam dan 50 km/jam dapat diperoleh persentase perbedaan defleksi dan gaya dalam yang dihasilkan. Persentase perbedaan yang dihasilkan ditunjukkan pada Tabel 4.9. Dapat dilihat untuk defleksi, perbedaannya berkisar antara 56,05% sampai dengan 59,53%. Untuk momen, perbedaannya berkisar antara 33,88% sampai dengan 35,60%. Sedangkan untuk gaya geser, perbedaannya berkisar antara 32,81% sampai dengan 35,50%. Nilai ini akan beragam sesuai dengan kecepatan beban yang digunakan.

Tabel 4.9 Rangkuman Persentase Perbedaan Respons Dinamik Pelat dengan Kecepatan Beban 30 km/jam dan 50 km/jam

		Nilai \bar{k}		
		0,3	0,5	0,7
Defleksi (%)		56,05	57,40	59,43
Momen X (%)	maks.	46,31	47,10	48,25
	min.	60,32	61,90	64,30
Momen Y (%)	maks.	46,31	47,10	48,25
	min.	60,32	61,90	64,30
Geser X (%)	maks.	33,96	33,90	33,88
	min.	34,61	35,05	35,60
Geser Y (%)	maks.	32,81	33,90	33,88
	min.	34,61	35,05	35,60

4.10 Respons Dinamik Pelat dengan Rasio Redaman 10%

Penelitian juga dilakukan untuk kondisi redaman sebesar 10%. Respons dinamik yang dihasilkan ternyata lebih kecil dibandingkan dengan kondisi redaman sebesar 5%. Perbandingan antara hasil respons dinamik pada kedua rasio redaman ini disajikan pada Tabel 4.10 dan Tabel 4.11. Pada tabel ini terlihat pula persentase perbedaan hasil respons dinamik pelat akibat rasio redaman yang meningkat. Hasil yang dibandingkan adalah pada saat kondisi beban di dalam pelat, yaitu pada $t = 0,3$ s (di tengah bentang) dan pada saat kondisi beban di luar pelat, yaitu pada $t = 0,72$ s. Analisis ini dilakukan dengan kecepatan beban sebesar 30 km/jam.

Tabel 4.10 Perbandingan Respons Dinamik Pelat dengan Variasi Rasio Redaman Saat Beban Berada pada $t = 0,3$ s

		Rasio Redaman 5%			Rasio Redaman 10%			% perbedaan		
		Nilai \bar{k}			Nilai \bar{k}			Nilai \bar{k}		
		0,3	0,5	0,7	0,3	0,5	0,7	0,3	0,5	0,7
Defleksi (m)		0,005658	0,005587	0,00547	0,004613	0,004604	0,00459	18,48	17,59	16,09
Momen X (Nm)	maks.	32393,7	32109,9	31648,4	28457,9	28411,6	28336,8	12,15	11,52	10,46
	min.	-1289,94	-2067,02	-2756,12	-1016,29	-1649,81	-2246,97	21,21	20,18	18,47
Momen Y (Nm)	maks.	32393,7	32109,9	31648,4	28457,9	28411,6	28336,8	12,15	11,52	10,46
	min.	-1289,94	-2067,02	-2756,12	-1016,29	-1649,81	-2246,97	21,21	20,18	18,47
Geser X (N)	maks.	36927,8	36554,7	36120,9	35399,5	35186	34954,6	4,14	3,74	3,23
	min.	-37677,4	-37782,4	-37790,9	-35941,8	-36088,8	-36215,9	4,61	4,48	4,17
Geser Y (N)	maks.	36297,8	36554,7	36120,9	35399,5	35186	34954,6	2,47	3,74	3,23
	min.	-37677,4	-37782,4	-37790,9	-35941,8	-36088,8	-36215,9	4,61	4,48	4,17

Tabel 4.11 Perbandingan Respons Dinamik Pelat dengan Variasi Rasio Redaman Saat
Beban Berada pada $t = 0,72$ s

		Rasio Redaman 5%			Rasio Redaman 10%			% perbedaan		
		Nilai \bar{k}			Nilai \bar{k}			Nilai \bar{k}		
		0,3	0,5	0,7	0,3	0,5	0,7	0,3	0,5	0,7
Defleksi (m)		0,001166	0,000424	0,000356	0,0000151	0,0000050	0,0000022	98,70	98,81	99,38
Momen X (Nm)	maks.	4345,49	1578,08	790,215	56,3629	19,7157	8,24902	98,70	98,75	98,96
	min.	-306,312	-180,442	-123,144	-3,97279	-2,13986	-1,28542	98,70	98,81	98,96
Momen Y (Nm)	maks.	4345,49	1578,09	790,224	56,3629	19,7157	8,24902	98,70	98,75	98,96
	min.	-306,312	-180,432	-123,138	-3,97279	-2,13986	-1,28542	98,70	98,81	98,96
Geser X (N)	maks.	4016,31	1410,28	680,43	52,0992	16,728	7,10379	98,70	98,81	98,96
	min.	-4363,43	-1618,85	-825,701	-56,5889	-19,1963	-8,61836	98,70	98,81	98,96
Geser Y (N)	maks.	4016,78	1410,49	680,513	52,0992	16,728	7,10379	98,70	98,81	98,96
	min.	-4362,94	-1618,62	-825,609	-56,5889	-19,1963	-8,61836	98,70	98,81	98,96

Berdasarkan Tabel 4.10 dan Tabel 4.11 tersebut dapat terlihat bahwa rasio redaman akan berpengaruh cukup besar pada saat kondisi beban telah meninggalkan pelat ($t > t_0$) yaitu perbedaannya mencapai 98,96%. Sedangkan untuk kondisi beban berada dalam pelat ($0 < t < t_0$) perbedaan yang dihasilkan mencapai 21,21%.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis yang dilakukan pada penelitian ini dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Nilai koefisien kekakuan rotasi pada pelat sangat mempengaruhi respons dinamik dari pelat. Semakin kecil koefisien kekakuan rotasi pelat (semakin mendekati kondisi sendi), maka defleksi yang dihasilkan akan semakin besar. Persentase peningkatan nilai defleksi bila membandingkan antara $\bar{k} = 0,3$ dan $\bar{k} = 0,7$ mencapai 3,32% untuk kondisi beban di dalam pelat ($0 < t < t_0$) dan mencapai 69,45% untuk kondisi beban telah meninggalkan pelat ($t > t_0$).
2. Semakin kecil koefisien kekakuan rotasi pelat akan menghasilkan momen tengah bentang (momen lapangan) yang semakin besar. Persentase peningkatan momen tengah bentang ini adalah sebesar 2,3% untuk kondisi beban di dalam pelat dan sebesar 59,8% untuk kondisi beban setelah meninggalkan pelat.
3. Nilai gaya geser pada tengah bentang pelat akan semakin besar seiring dengan semakin kecilnya koefisien kekakuan rotasi pelat. Persentase peningkatan gaya geser pada kondisi beban masih di dalam pelat mencapai 2,19% dan 83,06% untuk kondisi beban setelah meninggalkan pelat.
4. Pelat dengan nilai koefisien kekakuan rotasi yang berbeda akan memiliki sistem struktur yang berbeda pula sehingga memiliki kecepatan kritis yang berbeda-beda. Untuk pelat dengan koefisien kekakuan rotasi 0,3 dan 0,5 memiliki kecepatan kritis sebesar 112 km/jam. Sedangkan untuk pelat dengan koefisien kekakuan rotasi sebesar 0,7 memiliki kecepatan kritis sebesar 110 km/jam.
5. Respons dinamik pelat dipengaruhi juga oleh kecepatan beban pada pelat. Respons dinamik yang dihasilkan akan berbeda-beda sesuai dengan pengaruh sistem struktur dan kecepatan kritis pelat. Analisis dilakukan dengan kecepatan sistem sebesar 30 km/jam dan 50 km/jam. Pada pelat dengan kecepatan beban sebesar 50 km/jam ternyata memberikan respons dinamik yang lebih kecil dibandingkan dengan pelat dengan kecepatan beban sebesar 30 km/jam. Defleksi yang dihasilkan untuk setiap

nilai \bar{k} berbeda antara 56,05% sampai 59,53%. Momen yang dihasilkan juga berbeda sekitar 33,88% sampai 35,6%. Sedangkan untuk gaya geser yang terjadi, perbedaannya berkisar antara 32,81% sampai 35,5%.

6. Seiring dengan meningkatnya rasio redaman pada pelat akan mengakibatkan respons dinamik pelat mengecil. Untuk kenaikan rasio redaman dari 5% ke 10% dapat menurunkan nilai respons dinamik pelat mencapai 21,21% untuk kondisi beban di dalam pelat dan mencapai 98,96% untuk kondisi beban di luar pelat. Dengan demikian, variasi rasio redaman berpengaruh signifikan pada respons dinamik pelat untuk kondisi beban di luar pelat.

5.2 Saran

Penelitian lebih lanjut mengenai perilaku respons dinamik pelat akibat beban transversal dapat dilakukan dengan:

1. Memvariasikan besarnya amplitudo beban transversal dinamik.
2. Memberikan nilai percepatan pada beban transversal.
3. Analisis pelat disertai dengan beban *in-plane*.
4. Menambah pengaruh kekakuan pondasi untuk respons dinamik pelat.

DAFTAR PUSTAKA

- Alisjahbana, S. W. (2002). "Dinamika Struktur Pelat." Universitas Tarumanagara, Jakarta.
- Alisjahbana, S. W. dan Wangsadinata, W. (2006). "Dynamic Response of Rectangular Orthotropic Plate Supported by Pasternak Foundation Subjected to Dynamic Load." *First International Structural Specialty Conference*, Calgary, Alberta, Canada.
- Alisjahbana, S. W. (2011). "Dinamika Struktur Pelat II." B Press, Universitas Bakrie, Jakarta.
- Alisjahbana, S. W., Wangsadinata, W., dan Alisjahbana, I. (2017). "Analytical Behaviour of Rectangular Plates Under In-Plane and Lateral Dynamic Loads." *International Conference on Advances in Computational Mechanics (ACOME)*, Vietnam (to be presented)
- Chopra, Anil K. (2012). "Dynamics of Structures Theory and Applications to Earthquake Engineering." Prentice Hall International, Inc., Singapore (*Fourth Edition*).
- Elishakoff, I. B. (1974). "Vibration Analysis of Clamped Square Orthotropic Plate." *AIAA Journal*, Vol. 12, No. 7, July 1974.
- King, W.W., and Lin, C.C. (1973). "Applications of Bolotin's Method to Vibrations of Plates." *AIAA Journal*, Vol. 12, No. 3, September 1973.
- Paz, Mario. (1985). "Structural Dynamics : Theory and Computation Second Edition." Chapman & Hall, New York.
- Pevzner, P., Weller, T., dan Berkovits, A. (2000). "Further Modification of Bolotin Method in Vibration Analysis of Rectangular Plate." *AIAA Journal* Vol. 38, No. 9.
- Popov, E. P. (1984). "Mekanika Teknik." Erlangga, Jakarta.
- Szilard, R. (1974). "Theory and Analysis of Plates : Classical and Numerical Methods." Prentice Hall, Inc., New Jersey.
- Szilard, R. (2004). "Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods." John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

- Timoshenko, S. P., and Goodier. J. N. (1951). "Theory of Elasticity." *Engineering Societies Library*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- Vijayakumar, K. (1971). "A New Method for Analysis of Flexural Vibration of Rectangular Orthotropic Plates." *Journal of The Aeronautical Society of India*, Vol. 23, No. 4, February 1971.
- Wangsadinata, S.M. (1992). "Rotating Annular Plate Response to Arbitrary Moving Load." University of Wisconsin, Madison, USA.