

SURAT KETERANGAN No. 017 - Perpust TDI/UNTAR/IX/2021

Kepala Perpustakaan Teknik, Desain dan Informatika Universitas Tarumanagara menerangkan bahwa buku dengan Judul:

1. Analisis Tegangan pada Pelat Kirchoff-Love dengan Bukaan Persegi, Mei 2019

Oleh: Hendy Wijaya, M.T.

Staf Pengajar Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik

Universitas Tarumanagara

2. Analisis Lendutan dan Tegangan Pelat Lingkaran Kirchoff-Love dengan Bukaan Lingkaran, Mei 2020

Oleh: Hendy Wijaya, M.T.

Staf Pengajar Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik

Universitas Tarumanagara

Disimpan sebagai Koleksi Perpustakaan TDI Universitas Tarumanagara Jakarta. Demikian Surat Keterangan ini dibuat, agar dapat digunakan sesuai dengan keperluannya.

Jakarta, 21 September 2021

Kepala Perpustakaan,



ANALISIS LENDUTAN DAN TEGANGAN PELAT LINGKARAN KIRCHOFF-LOVE DENGAN BUKAAN LINGKARAN



SEMESTER GENAP 2019/2020

Oleh: Hendy Wijaya, M.T.

Anggota:

Program Studi Sarjana Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Tarumanagara Jakarta Mei 2020

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan penyertaan-Nya, penulis dapat menyelesaikan penelitian dengan judul "ANALISIS LENDUTAN DAN TEGANGAN PELAT LINGKARAN KIRCHOFF-LOVE DENGAN BUKAAN LINGKARAN". Kegiatan penelitian ini dilakukan sebagai salah satu bentuk tanggung jawab Tridharma Perguruan Tinggi dalam upaya mendukung pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Terima kasih kami ucapkan kepada Pimpinan Fakultas Teknik Universitas Tarumanagara dan Pimpinan Program Studi Sarjana Teknik Sipil, yang telah memberi kesempatan kepada penulis untuk melaksanakan kegiatan penelitian ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan dosen yang telah memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan penelitian ini.

Jakarta, Mei 2020

Penulis

Abstrak

Pelat merupakan elemen struktural yang tebalnya jauh lebih kecil dibanding dengan dimensi lainnya. Asumsi-asumsi yang digunakan pada teori pelat Kirchhoff-Love berlaku pada pelat tipis dimana deformasi geser transversal dapat diabaikan. Jika suatu pelat memikul beban luar, maka pelat akan berdeformasi dan timbul gayagaya dalam, serta akan terjadi juga reaksi perletakan pada setiap sisi perletakan pelat. Salah satu kemungkinan beban luar yang bekerja adalah beban merata.

Pada penelitian ini menganalisis lendutan, gaya dalam, dan tegangan yang terjadi pada pelat lingkaran. Dilakukan diskritisasi yang berulang-ulang dengan tujuan mendapatkan hasil yang lebih akurat. Setelah menganalisis pelat lingkaran, hasil analisis yang ada dibandingkan dengan hasil analisis pada pelat cincin. Hasil analisis menunjukkan bahwa terjadi peningkatan hasil baik lendutan sebanyak 9 %, gaya dalam 118 %, dan tegangan 57 % pada struktur pelat cincin. Dari hasil analisis yang ada dapat terlihat perilaku dari struktur pelat murni.

Kata kunci: pelat, pelat lingkaran, teori pelat, metode elemen hingga

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	i
Abstrak	ii
Daftar Isi	iii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA	3
BAB 3 METODE ANALISIS	11
BAB 4 HASIL ANALISIS DAN PEMBAHASAN	12
BAB 5 KESIMPULAN	17
DAFTAR REFERENSI	18
LAMPIRAN	

BAB 1

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Pelat merupakan suatu struktur solid tiga dimensi dengan bidang (permukaan) yang lurus, (datar atau tidak melengkung) yang tebalnya jauh lebih kecil dibanding dengan dimensinya yang lain. Fungsi umum dari pelat adalah menyebarkan jumlah beban pada luas yang lebih besar. Struktur pelat banyak digunakan dalam semua bidang teknik seperti pada struktur arsitektural, jembatan, struktur hidrolik, perkerasan jalan, struktur lantai pada konstruksi bangunan kapal laut, dan sebagainya.

Ketebalan suatu pelat memegang peranan yang cukup penting untuk menentukan sifat kelenturannya dibandingkan dengan dimensi lainnya. Berdasarkan hal tersebut, pelat dibedakan menjadi dua macam, yaitu pelat tipis dan pelat tebal. Terdapat dua macam teori yang menjadi dasar dalam analisis struktur antara kedua jenis pelat tersebut, yakni teori pelat Kirchhoff-Love, yang berlaku pada pelat tipis (perbandingan bentang terpanjang dengan tebal pelat > 20) dengan mengabaikan deformasi geser transversal dan teori pelat Reissner-Mindlin yang berlaku pada pelat tebal (perbandingan bentang terpanjang dengan tebal pelat antara 4-20) dengan memperhitungkan deformasi geser transversal. Teori yang dikemukakan oleh Kirchhoff-Love mengasumsikan bahwa:

- a. Material pelat bersifat elastis, homogen, dan isotropik.
- b. Lendutan pada bidang tengah pelat dianggap kecil dibandingkan dengan ketebalan pelat.
- c. Tebal pelat sebelum dan sesudah deformasi tidak berubah.
- d. Tegangan normal pada arah tegak lurus bidang tengah pelat dapat diabaikan.
- e. Titik-titik yang semula terletak pada suatu garis normal dan tegak lurus terhadap bidang tengah pelat, setelah berdeformasi akan tetap berada pada garis normal dan tetap tegak lurus terhadap bidang tengah pelat

Perhitungan gaya-gaya dalam pada struktur pelat akibat gaya-gaya luar yang bekerja umumnya dilakukan secara analitis (eksak). Metode perhitungan dengan cara analitis dianggap dapat memberikan hasil perhitungan yang paling akurat, tetapi perhitungan dengan metode ini memerlukan penyelesaian persamaan diferensial orde tinggi yang relatif rumit. Oleh karena itu, muncul alternatif perhitungan dengan pendekatan secara numerik untuk memecahkan masalah ini. Salah satu perhitungan dengan metode numerik yang dikenal adalah metode elemen hingga. Metode elemen hingga merupakan metode pendekatan yang dilakukan dengan melakukan

modelisasi struktur dari struktur yang sebenarnya menjadi model matematis yang dapat mewakili struktur sebenarnya. Model matematis ini dibuat dengan mendiskritisasi struktur kontinum menjadi elemen-elemen yang titik nodalnya berhubungan antara satu dengan yang lain yang membentuk suatu jaringan (*mesh*) yang sesuai dengan bentuk struktur aslinya.

Pelat dengan tumpuan tepi secara umum berbentuk persegi, namun dapat juga berupa berbagai bentuk seperti segitiga, trapesium, lingkaran, dan bentuk lainnya. Bentuk pelat segitiga, trapesium, dan lingkaran memang jarang dipakai, tetapi bentuk-bentuk ini dapat digunakan pada kasus tertentu. Pelat berbentuk segitiga dan trapesium biasanya dipakai pada bangunan yang memiliki bentuk struktur gedung tidak beraturan. Pelat berbentuk lingkaran umum digunakan di atas pondasi bangunan silo dan tangki penyimpanan bahan cair. Kasus pelat lingkaran merupakan salah satu kasus yang menarik untuk dianalisis.

Maksud dan Tujuan Penelitian

Maksud dari penelitian ini adalah untuk untuk menghitung deformasi, gaya-gaya dalam dan tegangan yang terjadi pada struktur pelat lingkaran dengan metode elemen hingga dan kemudian membandingkannya dengan deformasi, gaya-gaya dalam dan tegangan pada struktur pelat cincin. Setelah dilakukan analisis, dilakukan desain penulangan pada kedua bentuk struktur pelat tersebut. Tujuannya dari penulisan ini adalah memberikan gambaran dan informasi kepada pembaca mengenai perbandingan hasil analisis dari kedua struktur tersebut.

Ruang Lingkup Penelitian

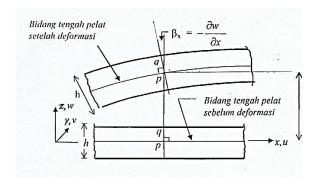
Ruang lingkup dari penelitian ini adalah analisis struktur pelat lingkaran dengan keadaan terjepit di seluruh sisinya menggunakan metode elemen hingga berdasarkan teori pelat Kirchhoff-Love. Penelitian dibatasi untuk kasus pelat yang terbuat dari bahan yang elastis linier, homogen, dan isotropik dengan ketebalan konstan dan beban statis yang berkerja pada pelat tersebut.

BAB 2 KAJIAN PUSTAKA

Teori Pelat Kirchhoff-Love

Ketebalan pada suatu struktur pelat memegang peranan yang cukup penting untuk menentukan sifat kelenturannya dibandingkan dengan dimensi lainnya. Berdasarkan ketebalannya, pelat dibedakan menjadi dua macam, yaitu pelat tipis dan pelat tebal. Dalam pembahasan ini, terdapat dua macam teori pelat yang menjadi dasar dalam klasifikasi analisis struktur antara pelat tipis dan pelat tebal.

Pada semua kasus pelat tipis (L/h > 20), berlaku hipotesis Kirchhoff (hipotesis normal bidang). Kirchhoff mengemukakan bahwa titik-titik yang semula terletak pada suatu garis normal dan tegak lurus terhadap bidang tengah pelat, setelah berdeformasi akan tetap berada pada garis normal dan tetap tegak lurus terhadap bidang tengah pelat (Gambar 2.1). Dari hipotesis tersebut, maka deformasi akibat gaya geser transversal, γ_{xz} dan γ_{yz} , sama dengan nol.



Gambar 2.1. Perpindahan pelat tanpa deformasi geser pada bidang X-Z (Katili, 2000:29)

Persamaan Diferensial Pelat Lingkaran

Penurunan persamaan diferensial dari pelat lingkaran dilakukan berdasarkan teori pelat Kirchhoff-Love, atau seringkali disebut teori pelat dengan lendutan kecil. Dengan menggunakan metode keseimbangan gaya, maka akan didapat persamaan diferensial pelat tersebut. Teori pelat dengan lendutan kecil seringkali disebut teori Kirchhoff-Love, didasarkan pada asumsi-asumsi berikut ini:

- 1. Bahan pelat bersifat elastis, homogen, dan isotropis.
- 2. Pelat pada mulanya datar.
- 3. Tebal pelat relatif kecil dibandingkan dengan dimensi lainnya. Dimensi lateral terkecil pada pelat paling sedikit sepuluh kali lebih besar daripada ketebalannya.

- 4. Lendutan sangat kecil jika dibandingkan dengan tebal pelat. Lendutan maksimum sebesar $\frac{1}{10}$ sampai $\frac{1}{5}$ tebal pelat dianggap sebagai batasan untuk teori lendutan yang kecil. Batasan ini juga dapat dinyatakan dalam panjang pelat, misalnya, lendutan maksimum lebih kecil dari $\frac{1}{50}$ panjang bentang yang terkecil.
- 5. Kemiringan bidang pusat yang melendut jauh lebih kecil dari satu.
- 6. Perubahan bentuk pelat bersifat sedemikian rupa sehingga garis lurus, yang semula tegak lurus bidang pusat pelat, tetap berupa garis lurus dan tetap tegak lurus bidang. Perubahan bentuk akibat gaya geser transversal diabaikan.
- 7. Lendutan pelat diakibatkan oleh perpindahan titik-titik bidang pusat yang tegak lurus bidang awalnya.
- 8. Besarnya tegangan yang tegak lurus bidang pusat sangat kecil sehingga bisa diabaikan.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, maka semua komponen tegangan dapat diketahui. Lendutan pelat harus memenuhi suatu persamaan diferensial parsial linier. Dengan bantuan kondisi syarat batas maka lendutan pelat tersebut dapat diketahui.

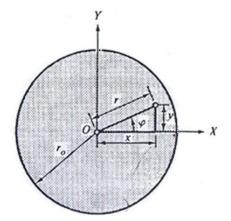
Dalam analisis pelat lingkaran, akan lebih mudah jika persamaan diferensial dinyatakan dalam sistem koordinat polar seperti yang diperlihatkan pada Gambar 2.2. Hal ini dapat dilakukan dengan transformasi koordinat. Jika menggunakan teknik transformasi koordinat, hubungan geometris antara koordinat Cartesius dan koordinat polar dapat diterapkan, yaitu

$$x = r \cos \varphi \qquad (2.1)$$

$$y = r \sin \varphi \qquad (2.2)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2.3)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) \qquad (2.4)$$



Gambar 2.2. Hubungan antara koordinat Cartesius dan koordinat polar (Szilard, 1989:80)

Hubungan geometris antara koordinat Cartesius dan koordinat polar dapat digunakan untuk menurunkan persamaan gaya dalam pelat lingkaran, yakni sebagai berikut

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r}{x} = \cos \varphi \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{r}{y} = \sin \varphi \tag{2.6}$$

sehingga

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{r}\sin\varphi \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r} \cos \varphi \qquad (2.8)$$

Persamaan-persamaan di atas menunjukkan bahwa x merupakan suatu fungsi dari r dan φ . Hal ini berarti bahwa turunan lendutan $w(r,\varphi)$ terhadap x dapat ditransformasikan menjadi turunan terhadap r dan φ . Transformasi tersebut dapat dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (2.10)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (2.5) dan (2.7) ke dalam Persamaan (2.9), maka akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] w \quad \dots (2.11)$$

Apabila Persamaan (2.11) didiferensialkan sekali terhadap x, maka akan diperoleh:

$$\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)
= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)
= \cos^{2} \varphi \frac{\partial^{2}w}{\partial r^{2}} + \frac{1}{r^{2}} \sin^{2} \varphi \frac{\partial^{2}w}{\partial \varphi^{2}} + \frac{1}{r} \sin^{2} \varphi \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin 2\varphi \frac{\partial^{2}w}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^{2}} \sin 2\varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi}
= \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\cos \varphi \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \dots (2.12)$$

Demikian pula halnya bila Persamaan (2.6) dan (2.8) disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.10) dan kemudian didiferensialkan sekali, maka akan diperoleh persamaan diferensial

lendutan pangkat satu dan persamaan diferensial lendutan pangkat dua terhadap y sebagai berikut:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] w \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin 2\varphi \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \sin 2\varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

$$(2.14)$$

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (2.13) dan (2.14), akan dihasilkan persamaan diferensial lendutan pangkat dua terhadap *x* dan *y* yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \, \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cos 2\varphi \, \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{1}{2r^2} \sin 2\varphi \, \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{2r} \sin 2\varphi \, \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos 2\varphi \, \frac{\partial^2 w}{\partial r \, \partial \varphi}$$
.....(2.15)

Dalam peninjauan suatu elemen kecil dari pelat lingkaran dengan menggunakan sistem koordinat polar, maka dapat dikatakan bahwa sudut φ dari elemen tersebut sangat kecil dan dapat digunakan asumsi bahwa $\sin \varphi$ mendekati nol dan $\cos \varphi$ mendekati 1. Dengan asumsi tersebut dan dengan menggabungkan ketiga persamaan di atas (2.12, 2.14, 2.15), maka akan didapatkan **operator Laplace** ∇^2 yang dinyatakan dalam koordinat polar sebagai berikut:

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \qquad (2.16)$$

Sehingga didapatkan persamaan pelat dalam koordinat polar sebagai berikut:

$$\nabla_r^2 \nabla_r^2 w = \frac{p_z(r, \varphi)}{D} \qquad (2.17)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \tag{2.18}$$

dengan E = modulus elastisitas bahan; h = tebal pelat; v = nilai poisson's ratio.

Gaya Dalam yang Bekerja Pada Pelat Lingkaran

Persamaan gaya dalam yang bekerja pada suatu elemen kecil dari pelat lingkaran dapat dinyatakan berdasarkan persamaan diferensial. Persamaan gaya dalam momen yang bekerja pada pelat lingkaran juga dapat ditransformasikan ke koordinat polar, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{split} m_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + v \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \qquad (2.19) \\ m_\varphi &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \qquad (2.20) \\ m_{r\varphi} &= m_{\varphi r} = -(1 - v) D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ &= -(1 - v) D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] \qquad (2.21) \end{split}$$

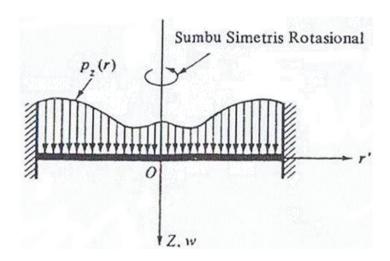
Persamaan gaya dalam lintang atau gaya geser yang bekerja pada pelat lingkaran dapat dituliskan sebagai berikut:

$$q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}\nabla_r^2 w \qquad (2.22)$$

$$q_{\varphi} = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla_{\mathbf{r}}^{2} \mathbf{w} \qquad (2.23)$$

Penyelesaian Eksak Untuk Pelat Lingkaran yang Memikul Pembebanan Simetris Rotasional

Jika suatu pelat lingkaran memikul aksi beban lateral yang simetris secara radial terhadap sumbu sistem koordinat polarnya, permukaan lendutannya juga akan simetris rotasional (Gambar 2.3) asalkan tumpuannya simetris rotasional.



Gambar 2.3. Sumbu simetris rotasional (Szilard, 1989:83)

Dalam hal ini, w tidak tergantung pada φ . Dengan demikian operator Laplace [Persamaan (2.16)] menjadi

$$\nabla_r^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \tag{2.24}$$

sehingga persamaan diferensial pelat lingkaran dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\nabla_r^2 \nabla_r^2 w(r) = \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p_z(r)}{p}$$
(2.25)

dengan D adalah ketegaran (rigidity) lentur pelat yang ditentukan oleh Persamaan (2.18).

Oleh karena lendutan pelat lingkaran yang memikul beban simetris secara radial tidak tergantung pada φ , persamaan gaya dalam yang diberikan pada Persamaan (2.19), (2.20), (2.21), (2.22) dan (2.23) menjadi

$$m_r = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) \qquad (2.26)$$

$$m_{\varphi} = -D\left(v\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) \qquad (2.27)$$

$$m_{r\varphi} = m_{\varphi r} = 0 \tag{2.28}$$

$$q_r = -D\left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right)$$
 (2.29)

$$q_{\varphi} = 0 \tag{2.30}$$

Penyelesaian eksak Persamaan (2.25) diperoleh sebagai jumlah penyelesaian persamaan diferensial homogen dan satu penyelesaian khusus. Jadi dapat kita tuliskan

$$w = w_H + w_P \qquad (2.31)$$

Penyelesaian persamaan diferensial homogen $\nabla_r^2 \nabla_r^2 w_H = 0$ dapat dituliskan sebagai

$$w_H = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln \frac{r}{r_o} + C_4 r^2 \ln \frac{r}{r_o}$$
 (2.32)

dengan C_1 , C_2 , C_3 , dan C_4 adalah konstanta yang dapat ditentukan dari kondisi tepi. Jika besarnya lendutan di pusat pelat berhingga, C_3 dan C_4 harus sama dengan nol, dan Persamaan (2.32) menjadi

$$w_H = C_1 + C_2 r^2 (2.33)$$

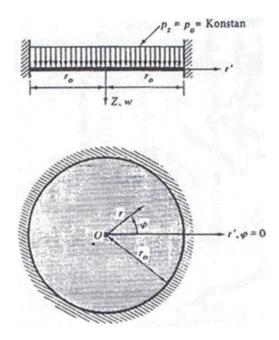
Jumlah momen dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$$\mathfrak{M} = -\int \frac{dr}{d} \int p_z(r) r \, dr.$$
 (2.34)

Penyelesaian khusus dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$$w_P = -\frac{1}{D} \int \frac{d}{dr} \int \mathfrak{M}_r \, dr \qquad (2.35)$$

Sebagai contoh, kita ambil kasus suatu pelat lingkaran yang dijepit di tepinya dan memikul beban terbagi rata seperti Gambar 2.4.



Gambar 2.4. Pelat lingkaran dengan beban merata yang dijepit di tepinya (Szilard, 1989:85)

Jumlah momen ditentukan dari Persamaan (2.34) menjadi

$$\mathfrak{M} = -p_0 \int \frac{dr}{d} \int r \, dr = -\frac{p_0 r^2}{4} \, \dots \tag{2.36}$$

Persamaan (2.5.12) menghasilkan penyelesaian khusus sebagai berikut:

$$w_P = \frac{p_0}{4D} \int \frac{dr}{r} \int r^3 dr = \frac{p_0 r^4}{64D}$$
 (2.37)

Sehingga penyelesaian umumnya dapat kita tuliskan

$$w = w_H + w_P = C_1 + C_2 r^2 + \frac{p_0 r^4}{64D}$$
 (2.38)

Persamaan (2.38) harus memenuhi kondisi tepi

$$[w(r)]_{r=r_0} = 0$$
 dan $\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=r_0} = 0$ (2.39)

Persamaan kondisi tepi yang pertama menyatakan bahwa lendutan di tepi sama dengan nol, yakni

$$[w(r)]_{r=r_0} = 0 = C_1 + C_2 r_0^2 + \frac{p_0 r_0^4}{64D}$$
 (2.40)

Dari persamaan kondisi tepi yang kedua akan diperoleh

$$\left[\frac{dw(r)}{dr}\right]_{r=r_0} = 0 = 2C_2r_0 + \frac{p_0r_0^3}{16D}$$
 (2.41)

sehingga,

$$C_2 = -\frac{p_0 r_0^2}{32D} \tag{2.42}$$

Substitusi Persamaan (2.42) ke Persamaan (2.40) menghasilkan

$$C_1 = \frac{p_0 r_0^4}{64D} \tag{2.43}$$

Jadi, persamaan lendutan permukaan pelat ini dapat dituliskan sebagai

$$w(r) = \frac{1}{D} \left(\frac{p_0 r_0^4}{64} - \frac{p_0 r_0^2 r^2}{32} + \frac{p_0 r^4}{64} \right) = \frac{p_0}{64D} (r_0^2 - r^2)^2 \quad(2.44)$$

Lendutan maksimum di pusat pelat adalah

$$(w_{maks})_{r=0} = \frac{p_0 r_0^4}{64D} \tag{2.45}$$

Gaya-gaya dalam yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$m_r = \frac{p_0}{16} [(1+v)r_0^2 - (3+v)r^2]$$
(2.46)

$$m_{\varphi} = \frac{p_0}{16} [(1+v)r_0^2 - (1+3v)r^2] \qquad (2.47)$$

$$q_r = -\frac{p_0 r_0^2}{2r} \tag{2.48}$$

BAB 3

METODE ANALISIS

Analisis dilakukan terhadap tiga macam tipe pelat, yakni pelat segiempat, pelat lingkaran, dan pelat cincin. Ukuran pelat segiempat yang dianalisis sebesar $8 \times 8 \text{ m}^2$, pelat lingkaran dengan diameter 4 m, pelat cincin dengan diameter 4 m dan ukuran lubang berdiameter 0.8 m. Seluruh struktur pelat tersebut dianalisis dengan bahan dan perlakuan beban yang sama. Adapun data yang digunakan adalah ketebalan pelat 0.12 m, menggunakan material beton mutu f'c 25 MPa, Poisson's ratio 0.25, dan dibebani transversal 6000 N/m^2 .

Analisis pada pelat segiempat dilakukan dengan metode elemen hingga dengan bantuan program Mathematica 8.0 untuk perhitungan manual dan untuk analisis dengan jumlah elemen yang lebih banyak digunakan program MIDAS Civil 2006 dan SAP 2000. Sedangkan analisis pelat lingkaran dan pelat cincin menggunakan bantuan program MIDAS Civil 2006. Pengolahan data dilakukan dengan program Microsoft Excel. Untuk desain penulangan pelat lingkaran maupun pelat cincin didasarkan pada besarnya momen-momen yang terjadi dengan mengacu pada ketentuan SNI 03-2847-2002.

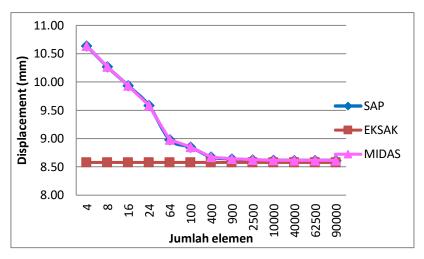
BAB 4 HASIL ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada studi kasus pertama, dilakukan analisis pelat segiempat dengan perhitungan manual metode elemen hingga menggunakan 4 elemen segiempat. Dengan menggunakan metode eksak, diperoleh nilai *displacement* pada pusat lingkaran sebesar 8.5787 mm. Persentase kesalahan antara analisis manual metode elemen hingga dengan metode eksak adalah sebesar 16.99%, sedangkan persentase kesalahan antara hasil dari program MIDAS dengan metode eksak adalah sebesar 24.01%. Hasil yang diperoleh pada kasus ini dengan keadaan material, beban, perletakan yang sama menunjukkan bahwa hasil analisis dari program MIDAS sama dengan hasil analisis program SAP.

Perbandingan hasil nilai *displacement* yang didapat pada pusat pelat dapat dilihat pada Tabel 1. Grafik pada Gambar 4.1 menunjukkan bahwa semakin banyak dilakukan diskritisasi ukuran pada elemen maka nilai *displacement* yang didapat akan semakin mendekati nilai eksak.

Tabel 1. Perbandingan nilai displacement di pusat pelat

No.	Jumlah	MANUAL	MIDAS	SAP	EKSAK	% kesalahan	% kesalahan
	Elemen	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	MANUAL	MIDAS
1	4	10.0361	10.6383	10.6383	8.5787	16.9886	24.0083
2	8		10.2682	10.2682	8.5787		19.6941
3	16		9.9357	9.9357	8.5787		15.8182
4	24		9.5862	9.5862	8.5787		11.7442
5	64		8.9812	8.9812	8.5787		4.6919
6	100		8.8518	8.8518	8.5787		3.1835
7	400		8.6750	8.6750	8.5787		1.1225
8	900		8.6417	8.6417	8.5787		0.7344
9	2500		8.6246	8.6246	8.5787		0.5350
10	10000		8.6174	8.6174	8.5787		0.4511
11	40000		8.6155	8.6155	8.5787		0.4290
12	62500		8.6153	8.6153	8.5787		0.4266
13	90000		8.6152	8.6152	8.5787		0.4255



Gambar 4.1. Grafik perbandingan nilai displacement di pusat lingkaran

Pada studi kasus kedua dan ketiga, yaitu analisis pelat lingkaran dan pelat cincin, didapat hasil *displacement*, momen, dan tegangan yang terjadi. Perbandingan nilai displacement yang terjadi pada pusat lingkaran ditunjukkan pada Tabel 2, sedangkan Tabel 3 menunjukkan perbandingan *displacement* dan tegangan pada daerah lubang untuk pelat cincin.

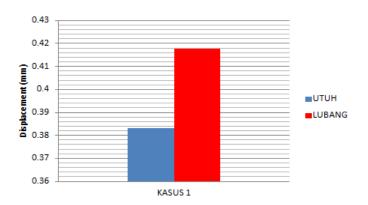
Tabel 2. Perbandingan nilai *displacement* di pusat pelat lingkaran

No.	Jumlah	MIDAS	SAP	EKSAK	% kesalahan
	Elemen	(mm)	(mm)	(mm)	MIDAS
1	200	0.49250	0.49250	0.41556	18.5148
2	600	0.47188	0.47188	0.41556	13.5528
3	1000	0.44456	0.44456	0.41556	6.9785
4	1800	0.42680	0.42680	0.41556	2.7048
5	3800	0.41840	0.41840	0.41556	0.6834
6	7800	0.41622	0.41622	0.41556	0.1588
7	19800	0.41564	0.41564	0.41556	0.0193

Tabel 3. Perbandingan *displacement* dan tegangan pada pelat cincin

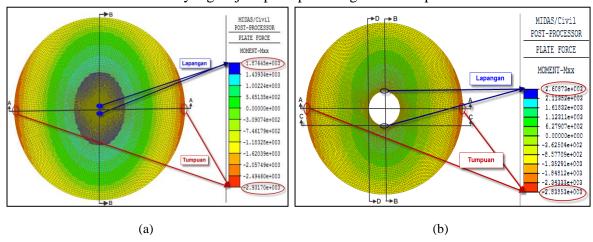
No.	Jumlah elemen	MIDAS		Eksak		% kesalahan	
		Displacement	σ_{maks}	Displacement	σ_{maks}	Displacement	σ_{maks}
		(mm)	(N/mm ²)	(mm)	(N/mm ²)	(%)	(%)
1	16000	0.41761	1.1827	0.4137	1.2167	0.9451	2.7944
2	28600	0.41766	1.1827	0.4137	1.2167	0.9572	2.7944
3	43800	0.41770	1.1827	0.4137	1.2167	0.9669	2.7944

Dari perbandingan antara struktur pelat lingkaran dengan struktur pelat cincin dengan lubang berukuran 0.8 m, terjadi peningkatan hasil *displacement* sebesar 9% pada titik peninjauan yang sama pada kedua struktur. Pada pelat lingkaran, *displacement* yang terjadi sebesar 0.383 mm, sedangkan pada pelat cincin sebesar 0.4176 mm. Peningkatan hasil *displacement* ditunjukkan oleh Gambar 4.2 di bawah ini.

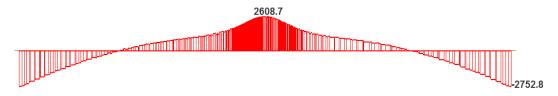


Gambar 4.2. Perbandingan displacement pada pelat lingkaran sebelum dan sesudah dilubangi

Sedangkan bila ditinjau dari hasil momen yang terjadi, terdapat peningkatan nilai momen sebesar 118% pada titik peninjauan yang sama pada kedua struktur. Pada Gambar 4.3 dapat dilihat kontur momen arah *X* yang terjadi pada pelat lingkaran dan pelat cincin.

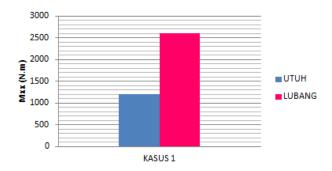


Gambar 4.3. Kontur momen arah *X*. (a) pelat lingkaran (b) pelat cincin



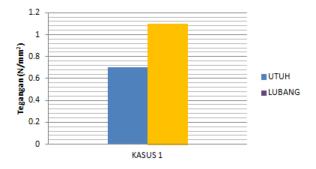
Gambar 4.4. Diagram momen potongan C-C arah X yang terjadi pada pelat cincin

Sedangkan Gambar 4.4 di atas menunjukkan bahwa terdapat peningkatan momen di daerah lubang pada struktur pelat cincin. Pada titik peninjauan yang sama, momen yang terjadi pada pelat lingkaran sebesar 1196.4267 N.m, sedangkan pada pelat cincin sebesar 2608.7287 N.m. Peningkatan hasil momen ditunjukkan pada Gambar 4.5.



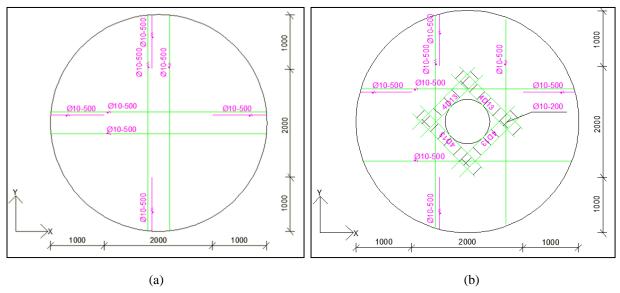
Gambar 4.5. Perbandingan momen pada pelat lingkaran sebelum dan sesudah dilubangi

Hasil analisis menunjukkan terdapat juga peningkatan hasil tegangan sebesar 57%. Pada titik peninjauan yang sama, tegangan yang terjadi pada pelat lingkaran sebesar 0.77 N/mm² dan pada pelat cincin sebesar 1.1 N/mm². Peningkatan hasil tegangan ditunjukkan pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6. Perbandingan tegangan pada pelat lingkaran sebelum dan sesudah dilubangi

Dari hasil analisis yang ada, dilakukan desain penulangan baik pada struktur pelat lingkaran maupun struktur pelat cincin. Denah penulangan pada kedua struktur dapat dilihat pada Gambar 4.7. di bawah ini.



Gambar 4.7. Denah Penulangan. (a) pelat lingkaran (b) pelat cincin

BAB 5

KESIMPULAN

Dari analisis yang sudah dilakukan, dapat dilihat bahwa hasil yang diperoleh dengan memperhitungkan keadaan material, beban, perletakan yang sama menunjukkan bahwa hasil analisis dari program MIDAS sama dengan hasil yang didapat dari analisis program SAP. Metode elemen hingga terbukti dapat digunakan untuk menganalisis struktur pelat dengan cukup baik, hal ini ditunjukkan pada hasil perhitungan lendutan di pusat pelat dengan persentase kesalahan yang sangat kecil, dan memenuhi prinsip dari metode ini, yaitu semakin banyak dilakukan diskritisasi ukuran pada elemen, maka nilai displacement yang didapat akan semakin mendekati nilai eksak. Perbandingan pelat lingkaran sebelum dan sesudah dilubangi menunjukkan peningkatan hasil analisis, baik displacement, momen, maupun tegangannya pada titik acuan yang sama.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Budynas, R.G.. Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd Ed. Singapore: McGraw Hill, 1999.
- [2] Cook, Robert D.. Konsep dan Aplikasi Metode Elemen Hingga. Bandung: PT. Eresco, 1990.
- [3] Hadipratomo, Winarni, dan Paulus P. Raharjo. *Pengenalan Metode Elemen Hingga pada Teknik Sipil*. Bandung: NOVA, 1985.
- [4] Katili, Irwan. *Aplikasi Metode Elemen Hingga pada Pelat Lentur*. Depok: Fakultas Teknik Universitas Indonesia, 2000.
- [5] Logan, Daryl L.. A First Course in the Finite Element Method. Boston: PWS Publishers, 1986.
- [6] SNI 03-2847. *Tata Cara Perhitungan Struktur Beton Untuk Bangunan Gedung*. Bandung, 2002.
- [7] Szilard, Rudolph. *Teori dan Analisi Pelat Metode Klasik dan Numerik*. Jakarta: Erlangga, 1989.
- [8] Tedianto, Leo S.. Catatan Kuliah Metode Elemen Hingga.
- [9] Tedianto, Leo S.. Estimasi Error Akibat Proses Diskretisasi h dan p Pada Analisis Tegangan Bidang dengan Metode Elemen Hingga. Tesis Magister Teknik Sipil, Universitas Tarumanagara, 2010.
- [10] Timoshenko, S., S. Woinowsky and Krieger. *Teori Pelat dan Cangkang, Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga, 1988.
- [11] Weaver Jr., William, and Paul R. Johnson. *Elemen Hingga untuk Analisis Struktur*. Bandung: PT. Eresco, 1989.