Matematika Ekonomi

Buku II

IG. Adiputra

Jakarta 2021

KATA PENGANTAR

Metematika mempunyai peranan penting dalam studi ilmu ekonomi dan bisnis sehingga harus dikuasai oleh setiap mahasiswa, dan praktisi ekonomi dan bisnis. Matematika dapat secara sistematis dan turut menyederhanakan pengungkapan dan pemahaman masalah. Dengan pendekatan (*Approach*) matematika maka suatu masalah ekonomi dan bisnis dapat dipahami, ditampilkan kemudian dianalisis untuk mendapat pemecahan terbaiknya dengan lebih sederhana.

Matematika untuk bisnis dan ekonomi dirancang untuk memahami dan menerapkan konsep matematika dalam bisnis dan ekonomi. Setiap bab dalam buku ini secara bertahap dan sistematis membahas konsep matematika murninya, logika ekonominya, dan kemudian bagaimana penerapannya dalam bidang bisnis dan ekonomi, dengan disertai contoh soal, dan penyelesaiannya serta soal-soal latihan.

Penyusunan buku ini tidak akan dapat saya selesaikan sendiri. Banyak pihak telah secara langsung meupun tidak langsung turut memungkinkan tersusunnya buku ini. Saya ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada teman-teman yang telah membantu dan mendorong moril dari istri dan anak-anak tercinta. Akhirnya penulis menyadari bahwa masih banyak lagi kelemahan dan kekurangan dalam buku ini. Saya harap buku ini dapat berguna bagi kita semua.

Jakarta,   Maret 2021

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
DIFERENSIAL FUNGSI MAJEMUK

Dalam bab ini kita akan membahas diferensiasi untuk fungsi-fungsi yang mengandung lebih dari satu macam variable bebas. Pada dasarnya prinsip diferensialnya tidak berbeda dengan prinsip diferensial untuk fungsi bervariabel bebas tunggal. Hanya saja disini nanti kita bertemu dengan konsep diferensiasi parsial (diferensi secara bagian demi bagian) dan konsep diferensial total. Mengingat pada umumnya suatu variable ekonomi behubungan fungsional terhadap tidak hanya satu macam variable lain, tetapi justru terhadap beberapa macam variable sekaligus, pengetahuan akan diferensiasi untuk fungsi majemuk sangat penad (*relevant*) dimiliki.

A. DIFERENSIAL PARSIAL

Sebuah fungsi hanya mengandung satu vriabel bebas hanya akan memiliki satu macam turunan. Apabila $y = f(x)$ maka turunannya hanyalah turunan y terhadap kata lain $y' = dy/dx$.

Sedangkan jika sebuah fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas maka turunannya kan lebih dari satu macam pula, sesuai dengan jumlah macam variabel bebasnya. Jadi, jika sebuah fungsui mempunyai n macam variabel bebas maka ia akan memiliki n macm turunan. Jika $Z = f(x,y)$ maka akan terdapat dua macam turunan yaitu turunan z terhadap x atau $\partial Z/\partial x$ dan turunan y terhadap y atau $\partial z / \partial y$.

Dengan demikian

1. $Z = f(x,y)$

$$y' \begin{cases} \text{a) } f_x\ (x,y) = \dfrac{\partial z}{\partial x} \\[2ex] \text{b) } f_y\ (x,y) = \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

2. $p = f(q,r,s)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } f_q\ (q,r,s)\ = \dfrac{\partial y}{\partial x} \\[2ex] \text{b) } f_r\ (q,r,s)\ = \dfrac{\partial p}{\partial r} \\[2ex] \text{c) } f_s\ (q,r,s)\ = \dfrac{\partial p}{\partial s} \end{array}\right\} P'$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial q}dq + \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial s}ds$$

$\partial z/\partial x$ dan $\partial z/\partial y$ dalam butir 1 serta $\partial p/\partial q$, $\partial p/\partial r$ dan $\partial p/\partial s$ dalam butir 2 masing-masing dinamakan derivatif parsial. Sedangkan $(\partial z/\partial x)dx$, $(\partial z/\partial y)dy$, $(\partial p/\partial q)dq$, $(\partial p/\partial r)dr$, $(\partial p/\partial s)ds$ dinamakan diferensial parsial. Adapun *dz* dan *dp* dinamakan diferensial total.

Dalam menurunkan *z* terhadap *x* yang dilambangkan dengan $\partial z/\partial x$ hanya suku-suku yang mengandung vriabel *x* yang diperhitungkan, sedangkan suku-suku yang tidak mengandung variabel *x* dianggap sebagai kostanta dan dilambangkan dengan $\partial z/\partial y$ hanya suku-suku yang mengandung variabel *z* yang diperhitungkan, sedangkan suku-suku yang tidak mengandung variabel *z* dianggap kostanta dan turunannya adalah nol. Sesungguhnya $\partial z/\partial x$ dari $z = f(x,y)$ adalah turunan dari $f(x,y)$ terhadap x dengan anggapan hal-hal lain tetap atau kostanta (dalam ekonomi dikenal dengan sebutan asumsi *ceteris paribus*). Oleh karena itu dalam menurunkan $z = f(x,y)$ terhadap x hanya suku-suku yang mengandung variabel x saja yang diturunkan.

B. DERIVATIF DARI DERIVATIF PARSIAL

Seperti hanya fungsi dengan satu variabel bebas, fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas pun dapat diturunkan lebih dari satu kali. Dengan kata lain masing-masing turunan parsialnya masih mungkin diturunkan lagi. Turunan berikut dari turunan parsial tadi sudah barang tentu bisa sangat bervariasi, tertgantung dari bentuk turunan parsial tersebut. Apabila suatu turunan parsial berbentuk suatu fungsi yang tinggal mengandung satu macam variabel bebas, maka turunan berikutnya hanya ada satu macam. Akan tetapi bila suatu turunan parsial berbentuk suatu fungsi yang masih mengandung beberapa macam variabel bebas maka turunan berikutnya masih dapat dipecah-pecah lagi menjadi beberapa turunan parsial pula.

Contoh : $Z = x^3 + 5y^2 - 4x^2y - 6xy^2 + 8y - 7$

1. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 3x^2 - 8xy - 6y^2$

2. $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = 10y - 4x^2 - 12xy + 8$

Dalam contoh ini baik $\partial z/\partial x$ maupun $\partial z/\partial y$ masih dapat diturunkan secara parsial lagi baik terhadap x maupun terhadap y.

1a. $\frac{\partial Z}{\partial x}$ terhadap $x: \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 6x - 8y$

1b. $\frac{\partial Z}{\partial x}$ terhadap $z: \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z} = -8x - 12y$

2a. $\frac{\partial Z}{\partial y}$ terhadap $x: \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = -8x - 12y$

2b. $\frac{\partial Z}{\partial y}$ terhadap $x: \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 10 - 12x$

Ternyata turunan parsial kedua (1a), (1b), 2(a) dan (2b) masih dapat diturunkan secara parsial lagi baik terhadap x maupun terhadap z.

(1a.1) $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ terhadap $x: \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} = 6$

(1a.2) $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ terhadap $z: \frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial y} = -8$

(1b.1) $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ terhadap $x: \frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial y} = -8$

(1b.2) $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ terhadap $z: \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y^2} = -12$

(2a.1) $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$ terhadap $x: \frac{\partial^3 Z}{\partial y \partial x^2} = -8$

(2a.2) $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$ terhadap $x: \frac{\partial^3 Z}{\partial y^2 \partial x} = -12$

(2b.1) $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ terhadap $x: \frac{\partial^3 Z}{\partial y^2 \partial x} = -12$

(2b.2) $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ terhadap $x: \frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} = 0$

Sekarang turunan-turunan parsial ketiga ini tidak dapat lagi diturunkan secara parsial, karena masing-masing hanya tinggal mengandung kostanta.

C. NILAI EKSTRIM : MAKSIMUM DAN MINIMUM

Nilai-nilai ekstrim (optimum) dari sebuah fungsi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas dapat dicari dengan pengujian sampai derivatif keduanya :

Untuk $z = f(x,y)$

Maka z akan mencapai titikl ekstrimnya jika :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

Syarat diatas adalah yang diperlukan agar fungsinya mencapai titik ekstrim. Guna mengetahui apakah titik ekstrim itu berupa titik maksimum ataukah titik minimum dibutuhkan syarat yang mencangkupkan (*sufficient condition*) yakni :

Maksimum bila $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} < 0 \text{ dan } \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} < 0$

Minimum bila $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} > 0 \text{ dan } \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} > 0$

Dalam hal $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ = 0, tak bisa ditegaskan mengenai nilai ekstrimnya. Untuk kasus semacam ini diperlukan penyelidikan dan pengujian lebih lanjut.

Contoh

1. Selidiki apakah titik ekstrim dari fungsi berikut ini merupakan titik maksimum ataukah titik minimum : $z = -x^2 + 12x - y^2 + 10y - 45$.

   $\frac{\partial Z}{\partial x} = -2x + 12$ $\qquad\qquad$ $\frac{\partial Z}{\partial y} = -2y + 10$

   $-2x + 12 = 0, \quad x = 6$ $\qquad\qquad$ $-2z + 10 = 0 \quad z = 5$

   $z = -(6) + 12(6) - (5)^2 + 10(5) - 45 = -36 + 72 - 25 + 500 - 40 = 16$

$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -2 < 0$ $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = -2 < 0$

karena $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ < 0, maka titik ekstrimnya adalah titik maksimum dengan $y_{maks} = 16$

2. Selidiki apakah titik estrim dari fungsi $p=3q^2 - 18q + r^2 - 8r + 50$ merupakan titik maksimum ataukah titik minimum

   $\frac{\partial p}{\partial q} = 6q - 18$ $\frac{\partial p}{\partial r} = 2r - 8$

   $6q - 18 = 0, \; q = 3$ $2r - 8 = 0, \quad r = 4$

   $p = 3(3)^2 - 18(3) + (4)^2 - 8(4) + 50$

   $= 27 - 54 + 16 - 32 + 50 = 7$

   $\frac{\partial^2 p}{\partial q^2} = 6 > 0$ $\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = 2 > 0$

   karena $\frac{\partial^2 p}{\partial q^2}$ dan $\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}$ > 0, titik ekstrimnya adalah titik minimum dengan $p_{min} = 7$.

D. OPTIMASI BERSYARAT

Dalam kenyataan seringkali harus mengesktrimkan atau mengoptimumkan suatu fungsi, yakni mencari nilai maksimum atau nilai minimumnya tetapi terkekang oleh suatu fungsi yang hendak duoptimumkan tadi mengadapi suatu kendala (*constrain*). Kasus optimasi bersyarat semacam ini banyak dijumpai dalam bidang ekonomi. Misalnya seseorang handak memaksimumkan utilitas, atau tingkat kepuasannya, tetapi terikat pada fungsi pendapatan atau sebuah perusahaan ingin memaksimumkan labanya, namun terikat pada fungsi produksi.

1. Pengganda Lagrange

Perhitungan nilai ekstrim sebuah fungsi yang menghadapi kendala berupa sebuah fungsi lain, dapat diselesaikan dengan metoda lagrange. Caranya adalah dengan membentuk sebuah fungsi baru disebut fungsi lagrange, yang merupakan penjumlahan dari fungsi yang hendak dioptimumkan ditambah hasil kali pengganda lagrange λ dengan fungsi kendalanya.

Misalkan hendak dioptimumkan $z = f(x,y)$

Dengan syarat terpenuhi $u = g(x,y)$

Maka fungsi Lagrangenya : $F\ (x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$

Nilai ekstrim $F\ (x,y,\lambda)$ dapat dicari dengan memfokuskan masing-masing derivatif-parsial pertamanya sama dengan nol.

$$F_x\ (x,y,\lambda) = f_x + \lambda g_x = 0$$

$$F_y\ (x,y,\lambda) = f_y + \lambda g_y = 0$$

Pengganda Lagrange λ adalah suatu *variabel tak-tentu* yang hanya bersifat sebgai pembantu. Syarat diatas merupakan syarat yang diperlukan untuk menghitung nilai ekstrim dari fungsi yang baru yang dibentuk, dan karenanya disebut sebagai syarat yang diperlukan atau *necessary condition*. Akan tetapi untuk mengetahui jenis nilai ekstrim tersebut maksimum atau minimum, masih harus disidik melalui derivatif-parsial keduanya, yang merupakan syarat yang mencukupkan atau *sufficient condition*. Dalam hal ini nilai ekstrim tadi adalah :

Maksimum bila $F_{xx} < 0$ *dan* $F_{yy} < 0$

Minimum bila $F_{xx} > 0$ *dan* $F_{yy} > 0$

Contoh :

1. Tentukan nilai ekstrim z dari fungsi $z = 2x + 2y$ dengan syarat $x^2 + y^2 = 8$. Jelaskan jenis nilai ekstrimnya.

   Fungsi Lagraange : $F = 2x + 2y + \lambda(x^2+y^2 - 8)*)$

   $= 2x + 2y + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 8\lambda$

   Agar ekstrimnya, $F' = 0$

   $F_x = 2+2\lambda x = 0$, diperoleh $\lambda = -\frac{1}{x}$ ....(1)

   $F_y = 2+2\lambda y = 0$, diperoleh $\lambda = -\frac{1}{y}$ ....(2)

   Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh : $-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y}$, atau $x = y$

   Menurut fungsi kendala : $x^2+y^2=8$

   $y^2+y^2=8$

   $2y^2 = 8, y^2=4, y = \pm 2$

   Karena $y = \pm 2, x = \pm 2$.

   $Z = 2x + 2y = \pm 8$

   Penyidikan nilai ekstrimnya :

   Untuk $x = 2$ dan $y = 2, \lambda = -\frac{1}{2}$

   $F_{xx} = 2\lambda = -1<0$

   $F_{yy} = 2\lambda = -1<0$

   Karena F_{xx} dan F_{yy} <0, nilai ekstrimnya adalah nilai maksimum dengan $z_{maks} = 8$.

   Untuk x = -2 dan $y = -2, \lambda = \frac{1}{2}$

   $F_{xx} = 2\lambda = 1>0$

   $F_{yy} = 2\lambda = 1>0$

Karena F_{xx} dan F_{yy} >0, nilai ekstrimnya adalah nilai minimum dengan $z_{min} = -8$.

2. Optimumkan $z = xy$ dengan syarat $x+2y = 10$

$F = xy + \lambda(x+2y-10)$

$= xy + \lambda x + 2\lambda y - 10\lambda$

syarat yang dipergunakan agar F optimum, $F' = 0$

$F_x = y + \lambda = 0,$ diperoleh $\lambda = -y$

$F_y = x + 2\lambda = 0,$ diperoleh

$-y = -\frac{1}{2}x,$ berarti $2y = x$

$x + 2y = 10$

$2y + 2y = 10,$ diperoleh $y = 2,5$. Selanjutnya $x = 5$

jadi z optimum pada $x = 5$ dan $y = 2,5;$

dengan $z_{opt} = xy = (5)(2,5) = 12,5$

2. Kondisi Kuhn-Tucker

Metoda Khun-Tucker merupakan pengembangan lebih lanjut dari model optimasi bersyarat. Jika dalam metoda pengganda Lagrange kita mengoptimumkan sebuah fungsi terhdap kendala yang berbentuk persamaan, maka dalam metoda Khun-Tucker kita mengoptimumkan sebuah fungsi terhadap sebuah fungsi yang berbentuk pertidaksamaan. Bentuk permasalahannya biasanya berupa :

Maksimumkan fungsi tujuan $f(x,y)$ terhadap kendala $g(z,y)<0$ atau minimumkan fungsi tujuan $f(x,y)$ terhadap kendala $g(x,y)>0$.

Prosedur penyelesaiannya dapat ditempuh melalui dua macam cara, yakni melalaui metoda Lagrange yang dimodifikasikan kemudian diuji dengan kondisi (persyaratan) Khun-Tucker, atau secara langsung dengan menggunakan metoda Khun-Tucker.

Prosedur metoda Khun-Tucker melalaui metode Lagrange yang dimodifikasikan dilakukan sebagai berikut :

1. Anggap kendala pertidaksamaannya sebagai sebuah persamaan. Kemudian selesaikan masalahnya dengan metoda Lagrange yang biasa hingga diperoleh nilai optimum yang dicari [khusus dalam hal ini fungsi baru Lagrange harus dibentuk dengan cara : $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$; jadi tidak boleh : $F(x,y,\lambda) + \lambda g(x,y)$].
2. Lakukan pengujian terhadap nilai λ. Jika $\lambda>0$ berarti nilai optimum yang diperoleh (berdasarkan kendala yang telah dimodifikasikan) tadi juga merupakan nilai optimum berkenaan dengan fungsi kendala yang berbentuk pertidaksamaan. Jika $\lambda \leq 0$ berarti optimasi fungsi tujuan $f(x,y)$ tanpa menyertakan fungsi kendala $g(x,y)$ sudah dengan sendirinya akan memenuhi kendalanya. [Dalam hal $\lambda \leq 0$ kendala yang bersangkutan dikatakan bersifat tidak mengikat (*non-binding*), oleh karenanya dapat diabaikan dalam hal $\lambda>0$ kendalanya disebut mengikat (*binding*).

Sedangkan prosedur metoda Khun-Tucker secara langsung dilakukan sebagai berikut:

1. Rumuskan pemasalahannya misalnya maksimumkan $f(x,y)$ terhdap $g(x,y) \leq 0$, atau minimumkan $f(x,y)$ terhadap $g(x,y) \geq 0$.*)
2. Tetapkan kondisi Khun-Tucker :

   a. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0$

   b. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0$

   c. $\lambda g(x,y) = 0$ dimana $g(x,y) \leq 0$ *atau* $g(x,y) \geq 0$.

3. Ujilah (2c) masing-masing untuk $\lambda=0$ dan $g(x,y) = 0$ guna menentukan mana diantaranya yang memenuhi persamaan-persamaan (2a) dan (2b) serta pertidaksamaan kendala $g(x,y)$. nilai-nilai x dan y yang memenuhi ketiga kondisi ini merupakan nilai-nilai yang mengoptimumkan fungsi tujuan $f(x,y)$.

Contoh:

1. Maksimumkan $f(x,y) = 10xy-2,5x^2-y^2$ terhadap kendala x+y<9.

   Dengan menganggap kendala pertidaksamaan berlaku sebagai sebuah persamaan (x+y<9 menjadi x+y = 9), maka berdasarkan metoda Lagrange:

$$\left.\begin{aligned} &F(x,y,\lambda = 10xy - 2{,}5x^2 - y^2 - \lambda(x+y-9) \\ &F_x = 0 \rightarrow 10y - 5x - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 10y - 5x \\ &F_y = 0 \rightarrow 10x - 2y - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 10x - 2y \end{aligned}\right\} \quad x = 0{,}8y$$

   menurut kendala: $x + y = 9 \rightarrow 0{,}8y + y = 9 \rightarrow y = 5$

$$y = 5 \rightarrow x = 0{,}8(5) = 4 \rightarrow sehingga f(x,y)_{maks} = 135$$
$$\lambda = 10(5) - 5(4) = 10(4) - 2(5) = 30$$

   karena $\lambda>0$ berarti x = 4 dan y = 5, yang memaksimumkan $f(x,y)$ terhadap kendala yang (dianggap) berbentuk persamaan, berlaku juga terhadap kendala yang berbentuk pertidaksamaan.

   Dengan metoda kondisi Kuhn-Tucker langsung di mana $g(x,y)= x+y-9<0$:

a. $\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \rightarrow 10y - 5x - \lambda = 0$

b. $\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \rightarrow 10x - 2y - \lambda = 0$

c. $\lambda g = 0 \rightarrow \lambda(x+y-9) = 0$ dimana $g= x+y-9<0$

jika $\lambda=0$, maka x=y=0 agar persamaan (a) dan (b) terpenuhi, dan kendala x+y< juga terpenuhi; dalam hal ini $f(0,0)=0$.

Jika *x+y-9=0, maka x-9-y, sehingga:*

$$\left.\begin{aligned}&(a)10y-5x-\lambda=0\rightarrow 10y-45+5y-\lambda=0\\&(b)10x-2y-\lambda=0\rightarrow 90-10y-2y-\lambda=0\end{aligned}\right\}\quad y=5 \text{ dan } \lambda=30$$

dengan memasukkan y=5 dan λ= 30 ke dalam (a) dan (b), diperoleh x=4. Untuk x=4 dan y=5 (f(x,y)= 10(4)(5)-2,5$(4)^2$-$(5)^2$=135. jadi, sesuai dengan penyelesaian melalui metoda Lagrange sebelumnya, x dan y yang memaksimumkan f(x,y) terhadap kendala pertidaksamaan x+y<9 dalah x=4 dan y=5.

2. Memaksimumkan *f(x,y)* = $\frac{20x}{x+5}+\frac{10y}{y+10}-x-y terhadap x+y<15$

Dengan demikian menganggap kendala pertidaksamaan berlaku sebagai sebuah persamaan. Maka menurut metoda Lagrange:

$$F(x,y,\lambda)=\frac{20x}{x+5}+\frac{10y}{y+10}-x-y-\lambda(x+y-15)$$

$$F_x=0\rightarrow\frac{(x+5)20-20x}{(x-5)^2}-1-\lambda=0\rightarrow\lambda=\frac{100}{(x+5)^2}-1.........................(i)$$

$$F_y=0\rightarrow\frac{(y+10)10-10x}{(y+10)^2}-1-\lambda=0\rightarrow\lambda=\frac{100}{(x+10)^2}-1.........................(ii)$$

menurut (i) dan (ii): *(x+5)²=(y+10)²*
menurut kendala : *x+y=15,y=15-x* *diperoleh x=10 dan y=5*

x=10 *nilai maksimum f(x,y)=1,67*
y= 5 *nilai λ=-4/9*

karena λ<0 berarti x = 10 dan y = 5 tidak berlaku untuk maksimilisasi *f(x,y)* terhadap kendala yang berbentuk pertidaksamaan. Dalam hal ini persoalan cukup diselesaikan dengan memaksimumkan *f(x,y)* tanpa memperhatikan *g(x,y)*, mengingat kendala ini tidak mengikat.

$$f_x = 0 \rightarrow \frac{(x+5)20-20x}{(x+5)^2} - 1 = 0 \rightarrow \frac{100}{(x+5)^2} - 1 = 0 \rightarrow x = 5$$

$$F_y = 0 \rightarrow \frac{(y+10)10-10y}{(x-10)^2} - 1 = 0 \rightarrow \frac{100}{(y+10)^2} - 1 = 0 \rightarrow y = 0$$

jadi, untuk *g(x,y) =x+y<15, f(x,y)maksimum pada x=5 dn y=0; nilai maksimum f(x,y)=5.*

Prosedur penyelesaian langsung dengan kondisi Kuhn-Tucker:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{100}{(x+5)^2} - 1 - \lambda = 0$

(b) $\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{100}{(y+10)^2} - 1 - \lambda = 0$

(c) $\lambda g = 0 \rightarrow \lambda(x+y-15) = 0$ dimana *g=x+y-15<0*

jika λ=0, maka menurut (a): 100= $(x+5)^2$, sehingga x = 5; sedangkan menurut (b):100 = $(y+10)^2$, sehingga y=0. Dengan x = 5 dan y = 0 ii kendala x + y < 15 terpenuhi; adapun *f(x,y) =5.*

Jika x+y-15=0, maka y = 15-x, sehingga berdasarkan (a) dan (b) diperoleh x = 10 dan y = 5 (lihat penyelesaian sebelumnya melalui metoda Lagrange); adapun *f(x,y)=1,67.* dalam hal ini kendala x+y<15 juga terpenuhi. Namun mengingat *f(5,0)>f(10,5)*, sedangkan masalah kita di sini adalah maksimisasi, maka yang paling memenuhi syarat ialah kedudukan x = 5 dan y = 0.

E. HOMOGENITAS FUNGSI

Suatu fungsi dikatakan homogen berderajat *n* apabila hasilkali setiap variabel bebasnya dengan sembarang bilangan λ menyebabkan nilai fungsinya menjadi λ^n kali. Dengan demikian, Z=(*f(x,y)* dikatakan homogen apabila:

$$\lambda^n Z = f(\lambda x, \lambda y)$$

Contoh:

1) $Z = F(x,y) = 2x^3 - 4\,x^2 y + y^3$

   Adalah fungsi homogen berderajat 3, karena

   $$\begin{aligned} F(\lambda x,\lambda y) &= 2\lambda^3\, x^3 - 4\lambda^3\, y + \lambda^3\, y^3 \\ &= \lambda^3\, (2x^3 - 4\lambda^3\, y + y^3) \\ &= \lambda^3\, f(x,y) \\ &= \lambda^3\, Z \end{aligned}$$

2) $Z = f(x,y) = 5x^2 + xy - 3y^2$

   Adalah fungsi homogen berderajat 2, karena

   $$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y) &= 5\lambda^2\, x^2 + \lambda^2\, xy - 3\lambda^2\, y^2 \\ &= \lambda^2\, (5x^2 + x\,y - 3\,y^2) \\ &= \lambda^2\, f(x,y) \\ &= \lambda^2\, Z \end{aligned}$$

3) $Z = f(x,y) = 9\,x - 7y$

   Adalah fungsi homogen berderajat 1, karena

$$f(\lambda x,\lambda y) \qquad = 9\lambda\, x - 7\,\lambda\, y = \lambda(9x - 7\,y) = \lambda z.$$

Fungsi homogen berderajat satu disebut juga fungsi homogen linear. Perihal homogenitas fungsi merupakan bahasan penting dalam teori produksi. Dengan diketahuinya derajat homogenitas suatu fungsi produksi, akan dapat diketahui pula tingkat penambahan hasil produksi atas penambahan faktor produksi yang digunakan.

Latihan Diferensial Parsial

1. Untuk fungsi $y = f(x,z) = 4x^2 – 6x^2 z + 3xz^2 +3z^2 +5$, tentukanlah :
   a. Derivatif parsial
   b. Diferensial parsial dan
   c. Diferensial totalnya.
2. Tentukan sampai dengan derivatif-parsial kedua untuk fungsi-fungsi :
   a. $y = 3x^2 – 5z^2 + 2x^2z – 4xz^2 – 9z$
   b. $y = 6x^2$
3. Hitunglah y ekstrim dari fungsi $y = 2x^2 – 20x + z^2 – 8z +78$, dan selidiki apakah nilai y ekstrim tersebut merupakan nilai maksimum ataukah nilai minimum.
4. Hitunglah p ekstrim dari fungsi $p= -q^2 – 3r^2 + 6q + 24r – 50$, dan selidiki apakah nilai p ekstrim tersebut merupkan nilai maksimum aataukah minimum.
5. Optimumkan $z = 4x – 2y$ dengan syarat $x^2 – y^2= 20$. Jelaskan apakah z maksimum ataukah minimum.
6. Maksimukan $f(r,s) = r^2 – 10s^2$ terhadap $r – s = 18$.
7. Maksimumkan $f(x,y) = 10 xy – 5x^2 – 7y^2 + 40x$ jika $x + y \leq 13$.
8. Mininumkan $f(x,y) = 4x^2 + 5y^2 – 6y$ jika $x + 2y \geq 18$.
9. Minimumkan $f(x,y) = 6 x^2 + 3y^2$ jika:
   a. $x + y = 18$
   b. $x + y \geq 18$
10. maksimumkan $f(x,y) = 5xy + x^2 – 4y^2$ jika :
    a. $2x + 3 y =74$ b. $2x+ 3 y \leq 74$

F. PENERAPAN EKONOMI

Pendekatan diferensial sangat bermanfaat untuk diterapkan pada model-model ekonomi yang mengandung lebih dari satu vaariabel bebas, dalam hal kita hendak menelaah secara parsial pengaruh dari salah satu variabel bebas tadi terhadap variabel berikutnya.

1. Permintaan Marjinal dan Elastisitas Permintaan Parsial

Apabila dua macam barang mempunyai hubungan dalam penggunaannya, maka permintaan akan masing-masing barang akan fungsional terhadap harga kedua macaam barang tersebut. Dengan perkataan lain jika barang A daan barang B mempunyai hubungan penggunaan, maka :

$$Q_{da} = f(P_a, P_b) \text{ dan } Q_{db} = f(P_a, P_b)$$

Derivatif pertama dari Q_{da} dan Q_{db} adalah fungsi-fungsi permintaan marjinalnya, dimana:

$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a}$ adalah permintaan marjinal akan A berkenaan dengan P_a

$\frac{\partial Q_{da}}{\partial Pb}$ adalah permintaan marjinal akan A berkenaan dengan P_b

$\frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a}$ adalah permintaan marjinal akan B berkenaan dengan P_a

$\frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b}$ adalah permintaan marjinal akan B berkenaan dengan P_b

Dengan dapat diturunkannya fungsi permintaan marjinal tersebut dapatlah dihitung elastisitas permintaan parsialnya. Dalam hal ini terdapat dua macam elastisitas permintaan yaitu parsial yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu brang berkenaan perubahan harga barang itu sendiri (*elastisitas harga-pemintaan*) dan elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu brang berkenaan perubahan harga barang lain (*elastisitas silang-permintaan*).

$$\eta_{da} = \frac{\%\Delta Q_{da}}{\%\Delta P_a} = \frac{EQ_{da}}{EP_a} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{da}}$$

$$\eta_{db} = \frac{\%\Delta Q_{db}}{\%\Delta P_b} = \frac{EQ_{da}}{EP_b} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{db}}$$

$$\eta_{ab} = \frac{\%\Delta Q_{da}}{\%\Delta P_b} = \frac{EQ_{da}}{EP_b} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{da}}$$

$$\eta_{ba} = \frac{\%\Delta Q_{db}}{\%\Delta P_a} = \frac{EQ_{db}}{EP_a} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{db}}$$

η_{da} dan η_{db} keduanya merupakaan elastisitas harga permintaan. Sedangkan η_{da} dan η_{db} keduanya adalah elastisitas silang permintaan. Jika η_{ab} maupun η_{ba} keduanya nehatif ($\eta_{ab}<0$ dan $\eta_{ba}<0$) untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara brang A dan barang B adalah komplementer atau saling melengkapi; sebab penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas keduanya. Sedangkan jika baik η_{ab} maupun η_{ba} keduanya positif ($\eta_{ab}>0$ dan $\eta_{ba}>0$) untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang A dan barang B adalah kompetitif/substitutif atau saling menggantikan sebab penurunan harga salaah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas barang tersebut dan penurunan permintaan atas barang lainnya.

Contoh 1:

Fungsi permintaan akan barang A dan barang B masing-masing ditunjukkan oleh $Q_{da} .P^2{}_a . P^3{}_b – 1 = 0$ *dan* $Q_{db} .P^3{}_a . P_b – 1 = 0$.

Berapa elastisitas permintaan masing-masing barang dan bagaimana hubungan antara kedua barang tersebut?

$Q_{da} . P^2{}_a . P^3{}_b - 1 = 0$ $\qquad$ $Q_{db} . P^3{}_a . P_b - 1 = 0.$

$$Q_{da} = \frac{1}{P^2{}_a . P^3{}_b} \qquad Q_{db} = \frac{1}{P^3{}_a . P{}_b}$$

$$Q_{da} = P^{-2}{}_a . P^{-3}{}_b \qquad Q_{db} = P^{-3}{}_a . P^{-1}{}_b$$

$$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a} = -2P^{-3}{}_a . P^{-3}{}_b \qquad \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b} = -P^{-3}{}_a . P^{-2}{}_b$$

$$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b} = -3P^{-2}{}_a . P^{-4}{}_b \qquad \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a} = -3P^{-4}{}_a . P^{-1}{}_b$$

$$\eta_{da} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a} . \frac{P_a}{Q_{da}} = -2P^{-3}{}_a . P^{-3}{}_b . \frac{P_a}{P^{-2}{}_a . P^{-3}{}_b} = -2$$

$$\eta_{db} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b} . \frac{P_b}{Q_{db}} = -P^{-3}{}_a . P^{-2}{}_b . \frac{P_b}{P^{-3}{}_a . P^{-1}{}_b} = -1$$

$$\eta_{ab} = \frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b} . \frac{P_b}{Q_{da}} = -3P^{-2}{}_a . P^{-4}{}_b . \frac{P_b}{P^{-2}{}_a . P^{-3}{}_b} = -3$$

$$\eta_{ba} = \frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a} . \frac{P_a}{Q_{db}} = -3P^{-4}{}_a . P^{-1}{}_b . \frac{P_a}{P^{-3}{}_a . P^{-1}{}_b} = -3$$

Barang A adalah barang elastis karena $\eta_{da} > 1$. sedangkan B adalah barang yang *unitary-elastic* karena $\eta_{db} = 1$. (Ingat: dalam menafsirkan elastisitas harga-permintaan cukup dengan m,elihat besarnya angka hasil perhitungan. Tandanya tak perlu dihiraukan). Adapun hubungan antara A dan B adalah bersifat komplementer karena $\eta_{ab} < 0$ dan $\eta_{ba} < 0$.

Contoh 2:

Permintaan dua macam barang A dan B sebagai berikut:

$Q_a . P_a^2 P_b - 1 = 0$ $\qquad$ dan $Q_b P_a P_b - 1 = 0$

Tentukan elistisitas permintaan masing-masing barang dan jelaskan hubungan antara kedua barang itu!

$$Q_a P_a{}^2 P_b = 1 \qquad Q_b P_a \; P_b = 1$$

$$Q_a = \frac{1}{P_a{}^2 P_b} \qquad Q_b = \frac{1}{P_a \; P_b}$$

$$Q_a = P_a{}^{-2} P_b{}^{-1} \qquad Q_b = P_a{}^{-1} P_b{}^{-1}$$

$$\frac{\partial Q_a}{\partial P_a} = -2P_a^{-3}P_b^{-1}$$

$$\frac{\partial Q_a}{\partial P_b} = -P_a^{-2}P_b^{-2}$$

$$\frac{\partial Q_b}{\partial P_a} = -P_a^{-2}P_b^{-1}$$

$$\frac{\partial Q_b}{\partial P_b} = -P_a^{-1}P_b^{-2}$$

$$\eta_{da} = \frac{\partial Q_a}{\partial P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_a} = \frac{-2}{P_a^{3}P_b^{1}} .P_a .P_a^{2} P_b^{1} = -2$$

$$\eta_{db} = \frac{\partial Q_b}{\partial P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_b} = \frac{-1}{P_a^{1}P_b^{2}} .P_b .P_a^{1} P_b^{1} = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \eta_{ab} = \dfrac{\partial Q_a}{\partial P_b} \cdot \dfrac{P_b}{Q_a} = \dfrac{-1}{P_a^{2}P_b^{2}} .P_b .P_a^{2} P_b^{1} = -1 \\[2ex] \eta_{ba} = \dfrac{\partial Q_b}{\partial P_a} \cdot \dfrac{P_a}{Q_b} = \dfrac{-1}{P_a^{2}P_b} .P_a .P_a \; P_b \; = -1 \end{array}\right\} \quad \text{Barang komplementer}$$

2. Perusahaan dengan Dua Macam Produk dan Biaya Produksi Gabungan

Apabila sebuah perusahaan dua macam uotput, dan baiya yang dikeluarkannya untuk memproduksi kedua produk itu merupakan biaya produksi gabungan (*joint production cost*), maka perhitungan keuntungan maksimal yang diperolehnya dapat diselesaikan dengan pendekatan diferensial parssial. Dengn metoda serupa pendekatan ini dapat pula digunakan untuk menganalisa kasus perusahaan yang menghasilkan lebih dari dua macam produk yang biaya produksinya juga merupakan biaya produksi gabungan.

Andaikan sebuah perusahaan memproduksi dua macam barang, A dan B dimana fungsi permintaan akan masing-masing barang diverminkan oleh Q_a dan Q_b serta biaya produksinya $C = f(Q_a,Q_b)$ maka

Penerimaan dari memproduksi A : $R_a = Q_a.P_a = f(Q_a)$

Penerimaan dari memproduksi B : $R_b = Q_b.P_b = f(Q_b)$

Penerimaan total : $R = R_a+R_b = f(Q_a)+f(Q_b)$

Dengan biaya total $c = f(Q_a,Q_b)$, fungsi keuntungannya :

$\pi = R - C = f(Q_a)+f(Q_b) - f(Q_a,Q_b) = g(Q_a,Q_b)$

π maksimum bila $\pi' = 0$

1. $\pi_{Q_a} = \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_a} = 0$

2. $\pi_{Q_b} = \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_b} = 0$

dari (1) dn (2) nilai Q_a dan nilai Q_b dapat diperoleh. Selanjutnya nilai π maksimum bisa dihitung.

Contoh 1:

Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan yang memproduksi dua macam barang A dan B ditunjukkan oleh $C = Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a.Q_b$. harga jual masing-masing barang perunit adalah $P_a = 7$ sedangkan $P_b = 20$. Hitunglah berapa unit masing-masing barang harus diproduksi agar keuntunganny maksimum dan besarnya keuntungan maksimum tersebut.

$$\left.\begin{array}{l} R_a = Q_a.P_a = 7\ Q_a \\ \\ R_b = Q_b.P_b = 20Q_b \end{array}\right\} R = R_a+R_b = 7Q_a+20Q_b$$

$\pi = R - C = 7Q_a+20Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_a.Q_b$

agar π maksimum, $\pi' = 0$

1. $\frac{\partial \pi}{\partial Q_a} = 0 \rightarrow 7 - 2Q_a - Q_b = 0$

2. $\frac{\partial \pi}{\partial Q_b} = 0 \rightarrow 20 - 6Q_b - Q_a = 0$

Dari (1) dan (2) diperoleh $Q_a = 2$ dan $Q_b = 3$

π maksimum $= 7Q_a + 20Q_b - Q_a^2 - 3Q^2_b - Q_a.Q_b$

$= 7(2) + 20(3) - (2)^2 - 3(3)^2 - (2)(3) = 37$

Jadi agar keuntungan maksimum, perusahaan harus memproduksi 2 unit A dan 3 unit B dengan keuntungan sebesar 37.

Kasus ini dimana perusahaan memproduksi lebih dari satu macam barang dengan biaya produksi gabungan, dapat pula diselesaikan melalui nilai-nilai marjinalnya; yakni dengan memformulasikan penerimaan marjinal masing-masing barang sama dengan biaya marjinal barang yang bersangkutan, $MR = MC$

Berkenaan dengan sola tadi, π maksimum akan diperoleh bila :

$$MR_a = MC_a \text{ dan } MR_b = MC_b$$

$R = 7Q_a+20Q_b$ $\qquad$ $C = Q_a^2+3Q_b^2+Q_a.Q_b$

$MR_a = R_{a1} = 7$ $\qquad$ $MC_a = C_{a1}=2Q_a+Q_b$

$MR_b=R_b=20$ $\qquad$ $MC_b=C_b=6Q_b+Q_a$

$MR_a = MC_a \rightarrow 7=2Q_{a+}Q_b \rightarrow 7 - 2Q_a - Q_b=0$……………………………………(1)

$MR_b = MC_b \rightarrow 20=6Q_b+Q_a \rightarrow 20 - 6Q_b - Q_a=0$……..……………………………(2)

Dari (1) dan (2), $Q_a=2$ dan $Q_b=3$, selanjutnya $\pi = 37$

Contoh 2:

Seorang produsen mempunyai kemungkinan untuk melakukan diskriminasi antara pasar dalam negeri (satu) dan pasar luar negeri (dua) untuk suatu produknya. Adapun fungsi permintaan masing-masing:

$Q_1 = 21\text{-}0{,}1\ P_1$

$Q_2 = 50\text{-}0{,}4\ P_2$

Biaya totalnya $C = 2000 + 10Q$ dimana $Q = Q_1 + Q_2$

Jika dikehendaki laba maksimum, tentukan tingkat harga yang ditetapkan:

a. Dengan diskriminasi harga pasar dalam dan luar negeri
b. Tanpa diskriminasi harga
c. Bandingkan perbedaan laba antara dengan diskriminasi dan tanpa diskriminasi.

Diketahui:

$Q_1 = 21\text{-}0{,}1\ P_1 = P_1 = 210\text{-}10Q_1$

$Q_2 = 50\text{-}0{,}4\ P_2 = P_2 = 125\text{-}2{,}5Q_2$

$C = 2000 + 10Q$

$Q = Q_1 + Q_2$

Ditanya P_1 dan P_2

Jawab:

$C = 2000 + 10\ (Q_1 + Q_2)$

$C = 2000 + 10Q_1 + 10Q_2$

$R_1 = P_1\ Q_1$ $\qquad\qquad$ $R_2 = P_2\ Q_2$

$\quad = 210Q_1\text{-}10Q_1^2$ $\qquad\qquad$ $= 125Q_2\text{-}2{,}5Q_2^2$

$R = R_1 + R_2$

$R = 210Q_1\text{-}10Q_1^2 + 125Q_2\text{-}2{,}5Q_2^2$

$\pi = R\text{-}C$

$\quad = 210Q_1\text{-}10Q_1^2 + 125Q_2\text{-}2{,}5Q_2^2 - 2000 + 10Q_1 + 10Q_2$

π = -10Q_1^2-2,5Q_2^2 +200Q_1+115Q_2 - 2000

a). Dengan diskriminasi harga

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = -20Q_1 + 200 = 0 \rightarrow Q_1 = 10$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = -5Q_{21} + 115 = 0 \rightarrow Q_2 = 23$$

P_1 = 210-10(10) = 110

P_2 = 125-2,5 (21) = 67,5

b). Tanpa diskriminasi harga, P_1 = P_2

210-10Q_1 = 125-2,5Q_2

2,5Q_2-10Q_1 = -85 (F. Kendala)

F (Q_1, Q_2, λ) = -10Q_1^2-2,5 Q_2^2 +200Q_1 + 115 Q_2-2000+λ (2,5Q_2-10Q_1+85)

$$\frac{\partial F}{\partial Q_1} = -20Q_1 + 200 - -10\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -2Q_1 + 20$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q_2} = -5Q_2 + 115 + 2,5\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2Q_2 - 46$$

$\lambda = \lambda$

-2Q_1+20 = 2Q_2 = 46 2,5Q_2-10Q_1 = -85

-2Q_1 – 2Q_2 +66 = 0 2,5Q_2 – 10 (33-Q_2) = -85

Q_1 + Q_2 – 33 = 0 2,5Q_2 –330+ 10Q_2 = -85

Q_1 = 33-Q_2 12,5Q_2 = 245

Q_2 = 19,6

2,5 (19,6) – 10Q_1 = -85

49 – 10Q_1 = -85

– 10Q_1 = -134

Q_1 = 134

P_1 = 210-10(13,4) = 76

P_1 = 125-2,5(19,6) = 76

c). Dengan diskriminasi harga $Q_1 = 10$, $Q_2 = 23$

$\pi = -10\,(10)^2 - 2{,}5\,(23)^2 + 200(10) + 115(13) - 2000$

$\quad = -1000 - 1322{,}5 + 2000 + 2645 - 2000$

$\pi_{max} = 322{,}5$

tanpa diskriminasi harga $Q_1 = 13{,}4$, $Q_2 = 19{,}6$

$\pi = -10\,(13{,}4)^2 - 2{,}5\,(19{,}6)^2 + 200(13{,}4) + 115(19{,}6) - 2000$

$\quad = -1795{,}6 - 960{,}4 + 2680 + 2254 - 2000$

$\pi_{max} = 178$

3. Utilitas Marjinal Parsial dan Keseimbangan Konsumsi

Dalam kenyataan sehari-hari, seorang konsumen tidak hanya mengkonsumsi suatu macam barang tetapi berbgai macam. Jika kepuasan konsumen dilambangkan dengan *U* dan barang-barang yang dikonsumsinya dilambangkan dengan q_i *(I = ,2,……,n)*, maka fungsi utilitas dapat dituliskan dengan notasi $U = f(q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_n)$.

Seandainya untuk penyederhanaan dianggap bahwa seorang konsumen hanya mengkonsumsi dua macam barang, katakanlah *X* dan *Y*, maka fungsi utilitasnya adalah:

$$U = f(x,y)$$

Derivatif pertama dari *U* merupakan utilitas marjinal parsialnya.

$\dfrac{\partial U}{\partial x}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang *X*

$\dfrac{\partial U}{\partial y}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang *Y*.

Untuk U = konstanta tertentu, fungsi utilitas $U = f(x,y)$ merupakan suatu persamaan kurva indeferensial (*indeferensial kurva*) yaitu kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi konsumsi barang X dan Y yang memberikan tingkat-tingkat kepuasan yang sama.

4. Keseimbangan Konsumsi.

Keseimbangan konsumsi maksudnya adalah suatu keadaan atau tingkatan kombinasi konsumsi beberapa macam barang yang memberikan kepuasan optimum. Secara geometri keseimbangan konsumen terjadi pada persinggungan kurva indeferensi dengan garis anggaran konsumen (*budget line*). Garis anggaran adalah garis yang mencerminkan kemampuan konsumen membeli berbagai macam barang berkenaan dengan harganya masing-masinmg dan pendapatan konsumen. Jika pendapatan konsumen berjumlah M serta harga barang Y masing-masing P_x dan P_y perunit persamaan budget line-nya dapat dituliskan dengan notasi : $M = x.P_x + y.P_y$.

Tingkat kombinasi konsumsi yang memberikan kepuasan optimum atau keseimbangan konsumsi dapat dicari dengan metoda Lagrange. Dalam hal ini, fungsi utilitas $U = f(x,y)$ dimaksimumkan terhadap fungsi anggaran $M = x.P_x + y.P_y$. analog dengan penyelesaian keseimbangan produksi sebagaimana diuraikan pada seksi sesudah ini, diperoleh fungsi baru Lagrange :

$F(x,y) = f(x,y) + \lambda(x.P_x + y.P_y - M)$

Agar F maksimum

$F_x(x,y) = 0 \rightarrow f_x(x,y) + \lambda P_x = 0$……………………………………..(1)

$F_y(x,y) = 0 \rightarrow f_y(x,y) + \lambda P_y = 0$……………………………………..(2)

Selanjutnya perhatikan :

Utilitas : $U = f(x,y)$

Utilitas marjinal : $MU = U' = f(x,y)$

(i) Utilitas marjinal barang $X : MU_x = f_x(x,y) = \dfrac{\partial U}{\partial x}$

(ii) Utilitas marjinal barang $Y : MU_y = f_y(x,y) = \dfrac{\partial U}{\partial y}$

Menurut (1) : $f_x\ (x,y)\ + \lambda P_x = 0 \rightarrow -\lambda = \dfrac{f_x(x,y)}{P_x}$

Menurut (2) : $f_y\ (x,y)\ + \lambda P_y = 0 \rightarrow -\lambda = \dfrac{f_y(x,y)}{P_y}$

Dari (1) dan (2),

$$\frac{f_x(x,y)}{P_x} = \frac{f_y(x,y)}{P_y}$$

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y}$$

Jadi dalam rumusan lain dapat pula dinyatakan bahwa, keseimbangan konsumsi akan tercapai apabila hasil bagi utilitas marjinal masing-masing barang terhadap harganya bernilai sama.

Contoh:

Kepuasan seorang konsumen dari mengkomsumsi barang X dan Y dicerminkan oleh fungsi utilitas $U = x^2\ y^3$. jumlah pendapatan konsumen 1.000 rupiah, harga X dan Y per unit masing-masing Rp. 25 rupiah dan 50 rupiah.

a. Tentukanlah fungsi utilitas marginal untuk masing-masing barang.
b. Berapa utilitas marjinal tersebut jika konsumen mengkonsumsi 14 unit X dan 13 unit Y ?
c. Jelaskan apakah dengan mengkonsumsi 14 unit X dan 13 unit Y kepuasan konsumen optimal ataukah tidak.

d. Agar terjadi kepuasan konsumen optimal berapa unit kombinasi X dan Y harus dikonsumsi

a) $U = x^2 y^3$

$MU_x = U_x = \frac{\partial U}{\partial X} = 2xy^3$

$MU_Y = U_Y = \frac{\partial U}{\partial Y} = 3x^2 y^2$

b) Jika $x = 14$ dan $y = 13$

$MU_x = 2\ (14)(13)^3 = 61.516$

$MU_Y = 3\ (14)^2\ (13)^2 = 99.372$

c) $\frac{MU_X}{P_x} = \frac{61.516}{25} = 2.460{,}64$

$\frac{MU_Y}{P_Y} = \frac{99.372}{50} = 1.987{,}44$ $\qquad \frac{MU_x}{P_x} \neq \frac{MU_Y}{P_y}$

Berarti kombinasi konsumsi 14 unit dan 13 unit Y tidak memberikan kepuasan optimum, karena tidak terjadi keseimbangan konsumsi.

d) Jawab sendiri

5. Produk Marjinal Parsial dan Keseimbangan Produksi.

Untuk memproduksi sesuatu barang pada dasarnya diperlukan beberapa macam faktor produksi seperti tanah, modal, tenaga kerja, bahan baku, mesin dan sebagainya. Jika jumlah keluaran yang dihasilkan dilambangkan dengan P maka masukan yang digunakan dilambangkan dengan x_i (i= 1,2………, n), maka fungsi produksinya dapat dituliskan dengan notasi $P = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n)$

Sebagian dari masukan yang digunakan sudah barang tentu merupakan masukan tetap, sementara bagian lain adalah masukan vriabel. Selanjutnya jika untuk memproduksi ssuatu barang dianggap hanya ada dua macam masukan variabel (katakanlah K dan L), maka fungsi produksinya secara pasti dapat dinyatakan dengan :

$$P = f(k,l)$$

Derivartif pertama dari P merupakan pruduksi marjinal parsialnya :

$\frac{\partial P}{\partial k}$ adalah produksi marjinal berkenaan dengan masukan K

$\frac{\partial P}{\partial 1}$ adalah produk marjinal berkenaan dengan masukan L

Untuk P = kostanta tertentu, fungsi produksi P = *f(k,l)* merupakan suatu persamaan *isoquant* yaitu kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi penggunaan massukan K dan L yang menghasilkan keluaran dalam jumlah sama.

Keseimbangan produksi. Keseimbangan produksi maksudnya adalah suatu keadaan atau tingkat penggunaan kombinasi faktor-faktor produksi secara optimum, yakni suatu tingkat pencaapain produksi dengan kombinasi biaya terendah (*least cost combination*). Secara geometri, keseimbangan produksi terjadi pada persinggungan *isocost* dengan *isoqquant*. *Isocost* adalah kurva yang mencerminkan kemampuan produsen membeli berbagai macam masukan berkenaan dengan harga masing-masing masukan dan jumlah dan dana yang dimilikinya. Jika jumlah dana yang dianggarkan untuk membeli massukan L adalah sebesar M, serta harga masukan K dan masukan L masing-masing P_k dan P_l persamaan *isocost*-nya dapat dituliskan dengan notasi $M=k.P_k + l.P_l$.

Tingkat kombinasi penggunaan masukan yang optimum atau “least cost combination” dapat dicari dengan metoda Lagrange. Dalam hal ini fungsi produksi $P=f(k,l)$ dimasukkan terhadap fungsi *isocost* $M = k \,.\, P_k + l.P_l$.

Fungsi tujuan yang hendak dioptimumkan : $P = f(k,l)$

Fungsi kendala yang dihadapi : $M = k \,.\, P_k + l.P_l.$

$k.P_k + l.P_l - M = 0$

fungsi baru Lagrange : $F(k,l) = f(k,l) + \lambda\,(k.P_k + l.P_l - M)$

Syarat yang diperlukan agar $F(k,l)$ maksimum :

$F_k\,(k,l) = 0 \rightarrow f_k\,(k,l) + \lambda\, P_k = 0$ ………………………(1)

$F_l(k,l) = 0 \rightarrow f_l(k,l) + \lambda\, P_l = 0$ ………………………...(2)

Dari (1) dan (2) nilai *k* dan nilai *l* dapat diperoleh. Selanjutnya nilai *p* maksimum bisa dihitung.

Sekarang perhatikan :

Produksi total : $P = f(k,l)$

(i) Produksi marjinal masukan $K : MP_x = f(k,l) = \dfrac{\partial P}{\partial k}$

(ii) Produksi marjinal masukan $L : MP_L = f(k,l) = \dfrac{\partial P}{\partial l}$

Pengembangan lebih lanjut persamaan (1) dan (2) diatas tadi akan menghasilkan :

1. $f_k\,(k,l) + \lambda P_k = 0 \rightarrow f_k\,(k,l) = -\,\lambda P_k \text{ - } \lambda = \dfrac{f_k(k,l)}{P_k}$

2. $f_l\,(k,l) + \lambda P_l = 0 \rightarrow f_l\,(k,l) = -\,\lambda P_l \text{ - } \lambda = \dfrac{f_l(k,l)}{P_l}$

Dengan demikian syarat keseimbangan produksi dapat juga dirumuskan :

$$\frac{f_k(k,l)}{P_k} = \frac{f_l(k,l)}{P_l}$$

$$\frac{MP_K}{P_k} = \frac{MP_L}{P_l}$$

Jadi dalam rumusan lain barang dinyatakan dengan bahwa produksi optimum dengan kombinasi biaya terendah akan tercapai apabila hasil bagi produk marjinal masing-masing masukan terhadap harganya bernilai sama.

Contoh:

fungsi produksi barang nyatakan dengan P = 6 $k^{2/3}$ $l^{1/3}$. bentuklah fungsi produk marjinal untuk masing-masing faktor produksi. Berapa produk marjinal tersebut jika digunakan 8 unit K dan 27 unit L ?

$P = 6\, k^{2/3}\, l^{1/3}$

$$MP_k = P_k = \frac{\partial P}{\partial k} = 4k^{-1/3} l^{1/3} = \frac{4l^{1/3}}{k^{1/3}}$$

Jika k = 8 dan l = 27

$$MP_k = \frac{4(27)^{1/3}}{8^{1/3}} = \frac{4\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4(3)}{2} = 6$$

$$MP_L = \frac{2(8)^{2/3}}{27^{2/3}} = \frac{2\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{2\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{2(4)}{9} = \frac{8}{9}$$

Contoh:

Seorang produsen mencadangkan 96 rupiah untuk membeli masukan K dan masukan L. Harga perunit masukan K adalah 4 rupiah dan masukan L adalah 3 rupiah. Fungsi produksinya P = 12 *k/l*. berapa unit masing-masing masukan seharusnya ia gunakan agar produksinya optimum, dan berapa unit keluaran yang dihasilkan dari kombinasi tersebut ?

Fungsi produksi yang hendak dioptimumkan : $P = f(k,l) = 12\, kl$

Fungsi *isocost* yang menjadi kendala : $M = k.P_k + l.P_l$

$$96 = 4\,k + 3\,l$$

$$96 - 4\,k - 3\,l = 0$$

Fungsi Lagrange :

$F(k,l) = 12\,kl + \lambda(96 - 4\,k - 3\,l)$

$\quad\quad\quad = 12\,kl + 96\,\lambda - 4\,\lambda k - 3\lambda l$

Agar F maksimum, $F_k = 0$ dan $F_l = 0$

$$\left.\begin{aligned} F_k\,(k,l) &= 12\,l - 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 3l \\ F_l\,(k,l) &= 12\,k - 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 4k \end{aligned}\right\} \quad 3l = 4k$$

$96 = 4k + 3l$

$96 = 4k + 4k \rightarrow 96 = 8k \rightarrow k = 12$

$l = 4/3\,(12) = 16$

$P = 12\,kl = 12(12)(16) = 2304$

Jadi agar produksinya optimum seharusnya digunakan kombinasi 12 unit K dan 16 unit L, dengan hasil produksi 2304 unit.

Soal-soal Latihan

1. Seorang produsen memproduksi dua macam sprei yaitu polos dan bermotif. Sprei polos dijual dengan harga RP.125.000,-/set sedangkan sprei bermotif dijual dengan harga 40% lebih mahal dari sprei polos. Bila total biaya yang harus dikeluarkan dinyatakan dalam fungsi: $C = 500\ Q_a^2 + 750\ Q_b^2 + 2000\ Q_aQ_b$, dimana Q_a adalah jumlah sprei polos dan Q_b adalah sprei bermotif, tentukanlah berapa masing-masing jumlah sprei yang harus dibuat dan dijualnya agar laba menjadi maksimum!
2. Seorang produsen mempunyai kemungkinan untuk melakukan diskriminasi pasar untuk suatu produk dimana permintaannya masing-masing adalah: $Q_1 = 24 - 0{,}2P_1$ dan $Q_2 = 10 - 0{,}05P_2$. Biaya totalnya adalah $C=35+40Q$ di mana $Q= Q_1 + Q_2$. Jika dikehendaki laba maksimum, tentukan:
   a. Tingkat harga yang ditetapkan jika dilakukan diskriminasi pasar dan tanpa diskriminasi pasar
   b. Bandingkan perbedaan laba antara diskriminasi dan tanpa diskrimiminasi.
3. Ratih seorang pemilik toko di ITC Cempaka Perak menjual berbagai jenis perlengkapan rumah tangga. Karena adanya tambahan permintaan jenis barang dari pelanggannya, maka mulai bulan Januari 2004 ia juga menjual alat pemanas air (*water heater)*. Alat yang dijualnya terdiri dari dari jenis manual dan otomatis. Fungsi permintaan untuk jenis manual dinyatakan dengan:

   $Qa = 8 – 0{,}2\ Pa$, sedangkan untuk jenis otomatis : $Pb = 30 –3Qb$

Biaya yang yang harus ditanggungnya untuk mendapatkan kedua jenis barang tersebut sejak pemesanan sampai tiba ditempat adalah: $C = Qa^2 + QaQb + 3Qb^2 + 120$.

Apabila laba yang diperolehnya maksimum, ia akan menambah jenis barang dagangannya lagi.

Bantulah Ratih untuk menentukan berapa banyak barang dari tiap jenis alat tersebut yang harus dijualnya agar ia dapat menambah variasi barang di tokonya?

4. PT JAT Expres sebuah perusahaan kosmetik terkenal memiliki fungsi produksi $Q = 4 - \frac{2}{K^2 L}$. Perusahaan tersebut dalam produksinya menggunakan 2 bahan baku yaitu cream halus (K) seharga $ 5 dan “scrub” (L) seharga $ 5. jika produk akhir dijual seharga $ 10. Berapakah laba max PT JAT Expres tersebut!
5. Minimumkan biaya total sebuah perusahaan $C = 3X^2 + 5XY + 6Y^2$ apabila perusahan tersebut harus memenuhi kuota produksi (g) yang sama dengan $5X + 7Y = 800$. Gunakan determinan Hess yang dibatasi dengan kendala untuk menguji syarat minimumnya.
6. Kepuasan konsumen dari kegiatan mengkonsumsi dua macam barang ditunjukkan dengan fungsi utilitas $U = 20X^4Y^6$ dimana X dan Y adalah jumlah barang yang dikonsumsikan. Jika konsumen memiliki pendapatan Rp.100.000 sementaraharga barang X dan Y di pasar masing-masing Rp. 2.000 dan Rp. 4.000 per unit.
   a. Tentukanlah berapa banyak barang X dan Y yang harus dikonsumsikan agar konsumen mencapai utilitas maksimum
   b. Hitung besarnya utilitas maksimum yang diperoleh!

7. Jika diketahui fungsi permintaan dari 2 macam produk adalah sebagai berikut:

   $Q_x = \frac{4}{P_x P_y}$ dan $Q_y = \frac{16}{P_x P_y}$

   Dari kedua fungsi tersebut terdapat 4 macam elastisitas permintaan parsial.

   Hitunglah besarnya keempat elastisitas permintaan parsial tersebut dan bagaimana sifat hubungan kedua produk berdasarkan elastisitas silangnya.

8. Kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi barang X dan Y dicerminkan oleh fungsi utilitas $U = 2X^2Y^2$. Jika pendapatan yang dimiliki sebesar Rp6.000,- dengan harga masing-masing barang adalah Rp200,- per unit untuk barang X dan Rp100,- per unit untuk barang Y. Tentukan:
   a. Berapa unit masing-masing barang yang harus dikonsumsi agar tercapai kepuasan maksimum?
   b. Berapa total kepuasan yang diperoleh konsumen tersebut?

9. Sebuah industri rumah tangga memproduksi tiga jenis barang dan mempunyai fungsi permintaan: $Q_x = 60 – 4 P_x^2 + 2P_y^2 – 5 P_y$; $Q_y = 80 + P_x^2 – 3P_y + 2P_z^2$ dan $Q_z = 75 – 2P_x^2 + 6P_y – P_z^2$.

   Dengan menghitung elastisitas silangnya, jelaskan bagaimana bentuk atau sifat hubungan antara barang X dan barang Y, antara barang X dan barang Z , serta antara barang Y dan barang Z, jika harga barang X, Y dan Z masing-masing adalah \$.4; \$.6; \$.5 per unit

BAB II
INTEGRAL

Dalam kalkulus integral dikenal dua macam pengertian integral, mereka adalah integral tak tentu (*indefenite integral*) dan integral tertentu (*defenite integral*). Intergral tak tentu adalah kebalikan dari deferensial, yakni suatu konsep turunan atau derivatif dari fungsinya diketahui. Sedangkan integral tertentu merupakan suatu konsep yang berhubungan dengan proses pencarian luas suatu area yang batas-batas atau limit dari area tersebut sudah tertentu.

A. KAIDAH-KAIDAH INTEGRASI TAK TENTU

Karena integrasi tak tentu pada dasarnya merupakan kebalikan dari diferensiasi, maka kaidah-kaidah integrasi tak tentu akan dapat dipahami berdasarkan pengetahuan tentang kaidah-kaidah diferensiasi.

Kaidah 1. Formula Pangkat

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k} \qquad n \neq -1$$

contoh :

1. $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + k = \frac{x^5}{5} + k = 0{,}2x^5 + k$

   Bukti : $\frac{d}{dx}\left(0{,}2x^5 + k\right) = x^4$

2. $\int 4dx = \frac{4x^{0+1}}{0+1} + k = 4x + k$

   Bukti : $\frac{d}{dx}\left(4x + k\right) = 4$

3. $\int 3x^2 dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + k = x^3 + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}\left(x^3 + k\right) = 3x^2$

4. $\int dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + k = x + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}\left(x + k\right) = 1$

5. $\int (x+1)^2\, dx = \frac{(x+1)^{2+1}}{2+1} + k = \frac{1}{3} + (x+1)^3 + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}\frac{1}{3}\left(x+1\right)^3 + k = (x+1)^2$

Kaidah 2. Formula Logaritmis

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + k}$$

Contoh :

1. $\int \frac{3}{x}\, dx = 3\ln x + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(3\ln x + k) = \frac{3}{x}$

2. $\int \frac{3}{x+1}\, dx = \int \frac{3d(x+1)}{x+1} + k = 3\ln(x+1) + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}\left\{3\ln(x+1) + k\right\} = \frac{3}{x+1}$

Kaidah 3. Formula Eksponensial

$$\boxed{\begin{array}{l} \int e^x dx = e^x + k \\ \int e^u du = e^u + k \Rightarrow u = f(x) \end{array}}$$

Contoh :

1. $\int e^{x+2} dx = \int e^{x+2} d(x+2) = e^{x+2} + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(e^{x+2} + k) = e^{x+2}$

2. $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}e^{2x} + k) = e^{2x}$

3. $\int e^{-3x+2}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x+2}d(-3x+2) = -\frac{1}{3}e^{-3x+2} + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(-\frac{1}{3}e^{-3x+2} + k) = e^{-3x+2}$

Kaidah 4. Formula Penjumlahan

$$\boxed{\begin{array}{l} \int e^{x}dx = e^{x} + k \\ \int e^{u}du = e^{u} + k \Rightarrow u = f(x) \end{array}}$$

Contoh :

1. $\int (x^4 + 3x^2)dx = \int x^4 dx + \int 3x^2 dx = 0{,}2x^5 + x^3 + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(0{,}2x^5 + x^3 + k) = x^4 + 3x^2$

2. $\int (e^x + \frac{1}{x})dx = \int e^x dx + \int \frac{1}{x}dx = e^x + \ln x + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(e^x + \ln x + k) = e^x + \frac{1}{x}$

3. $\int (3x^2 - 10x)dx = \int 3x^2 dx - \int 10x dx = x^3 - 5x^2 + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(x^3 - 5x^2 + k) = 3x^2 - 10x$

Kaidah 5. Formula Perkalian

$$\boxed{\int nf(x)dx = n\int f(x)dx} \qquad n \neq 0$$

contoh :

1. $\int 3x^2 dx = 3\int x^2 dx = -1(\frac{x^{3+1}}{3+1} + k_i) = x^3 + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(x^3 + k) = 3x^2$

2. $\int -x^3 dx = -1\int x^3 dx = -1(\frac{x^{3+1)}}{3+1} + k_i) = -\frac{1}{4}x^4 \pm k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(-\frac{1}{4}x^4 \pm k) = -x$

Kaidah 6. Formula Substitusi

$$\boxed{\int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)du = F(u) + k}$$

Dimana $u = g(x)$, dan $\int du$ merupakan substitusi bagi $\int dx$

Contoh :

1. Selesaikanlah $\int 6x(3x^2 - 10)dx$

   Dengan cara penyelesaian biasa atau langsung :

   $\int 6x(3x^2 - 10)dx = \int (18x^3 - 60x)dx = 4{,}5x^4 - 30x^2 + k$

   Dengan cara substitusi, misalkan $u = 3\ x^2 - 10$, maka $du/dx = 6x$, atau $dx = du/6x$. sehingga :

   $\int 6x(3x^2 - 10)dx = \int (6xu\frac{du}{6x} = \int u du = \frac{u^2}{2} + k_i$

   $= \frac{(3x^2 - 10)^2}{2} + k_i$

   $= \frac{1}{2}(9x^4 - 60x^2 + 100) + k_i$

   $= 4{,}5\ x^4 - 30\ x^2 + 50 + k_i$

   $= 4{,}5\ x^4 - 30\ x^2 + k_i$

   dimana $k = 50 + k_i$

2. Selesaikanlah $\int \frac{x+3}{x^2 + 6x}dx$

   Misalkan $u = x^2 + 6x$, maka $\frac{du}{dx} = 2x + 6$

   Karenanya pembilang $(x+3) = ½\ (du/dx)$, sehingga :

$$\int \frac{x+3}{x^2+6x}\,dx = \int \frac{1/2(du/dx)}{u}\,dx$$

$$= \int \frac{1/2(du/dx)}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln u + k$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+6x) + k$$

Latihan Integrasi Taktentu

Selesaikanlah :

1. $\int x^3 dx$
2. $\int x^4 dx$
3. $\int 9x^2 dx$
4. $\int \frac{5}{x} dx$
5. $\int (x^2 - \sqrt{2+5xdx}$
6. $\int \sqrt{2+5xdx}$
7. $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
8. $\int x^2 e^x dx$
9. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$
10. $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
11. $\int \frac{(1-2x)^2}{\sqrt{2x}} dx$
12. $\int (x\sqrt{x} - 5)^2 dx$
13. $\int x \ln x dx$
14. $\int e^x (x+1)^2 dx$.
15. $\int xe^{-3x} dx$
16. $\int xe^{-x^2} dx$
17. $\int \frac{x^2+3x-2}{x} dx$
18. $\int \frac{(x+1)dx}{(x+1)^2+(a+1)^2} dx$
19. $\int (x^2+3x+4)^3 (2x+3) dx$
20. $\int (x^{1/3} + x^{2/3})^2 dx$

B. PENERAPAN EKONOMI

Pendekatan integral tak tentu dapat diterapkan untuk mencari persamaan fungsi total dari suatu variabel ekonomi apabila persamaan fungsi marjinalnya diketahui. Karena fungsi marjinal pada dasarnya merupakan turunan dari fungsi total, maka dengan proses sebaliknya yakni integrasi dapatlah dicari fungsi asal daro fungsi turunan atau fungsi totalnya.

1. Fungsi Biaya

Biaya total C = f(Q)

Biaya marjinal : MC = C' = $\frac{DC}{DQ} = f'(Q)$

Biaya total tal lain adalah integral dari biaya marjinal

$$\boxed{C = \int MC\ dQ = \int f'(Q)\ dQ}$$

Contc

Biaya marjinal suatu perusahaan ditunjukkan oleh $MC = 3\ Q^2 - 6Q + 4$. Carilah persamaan biaya total dan biaya rata-ratanya.

Biaya total :

$$= \int MCdQ$$
$$= \int (3Q^2 - 6Q + 4)dQ$$
$$= Q^3 - 3Q^2 + 4Q + k$$

Biaya Rata-rata = $AC = \frac{C}{Q} = Q^2 - 3Q + 4 + k/Q$

Kostanta k tak lain adalah biaya tetap. Jika kita ketahui biaya tetap tersebut sebesar 4, maka :

$$C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$$
$$AC = Q^2 - 3Q + 4 + 4/Q$$

2. Fungsi Penerimaan

Penerimaan total : $R = f(Q)$

Penerimaan Marjinal : $MR = R' = \dfrac{dR}{dQ} = f,(Q)$

Penerimaan total tak lain adalah integral dari penerimaan marjinal

$$\boxed{R = \int MRdQ = \int f'(Q)dQ}$$

Contoh :

Carilah persamaan penerimaan total dan penerimaan rata-rata dari suatu perusahaan jika penerimaan marjinalnya $MR = 16 - 4Q$.

Penerimaan total : $R \quad = \int MRdO$

$$= \int (16 - 4Q)dQ$$

$$= 16Q - 2Q^2$$

Penerimaan rata-rata : $AR \quad = \dfrac{R}{Q} = 16 - 2Q$

Dalam persamaan total kostanta $k = 0$, sebab penerimaan tidak akan ada jika ada barang yang dihasilkan terjual.

3. Fungsi Utilitas

Utilitas total : $U = f(Q)$

Utilitas marjinal : $MU = U' = \dfrac{dU}{dQ} = f'(Q)$

Utilitas total tak lain adalah integral dari utilitas marjinal

$$\boxed{U = \int MUdQ = \int f'(Q)dQ}$$

Contoh

Carilah persamaan utilitas total dari seseorang konsumen jika utilitas marjinalnya *MU = 90 – 10 Q*.

Utilitas total : $U = \int MUdQ$

$$= \int (90 - 10Q)dQ$$

$$= 90Q - 5Q^2$$

Seperti halnya produk total dan penerimaan total, disinipun kostanta *k* = 0 sebab tidak akan ada kepuasan atau utilitas yang diperoleh seseorang jika tak ada barang yang dikonsumsi.

C. KAIDAH-KAIDAH INTEGRASI TERTENTU

Untuk *a* < *b* < *c*, berlaku :

1. $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(a) - F(b)$

Contoh : $\int_2^5 x^4 dx = dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]^5 = \frac{1}{5}[x^5]_2^5 = \frac{1}{5}(3125 - 32) = 618{,}6$

$$\int_2^2 x^4 dx = dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^2 = \frac{1}{5}[x5]^2 = \frac{1}{5}(32 - 32) = 0$$

2 $\int_a^a f(x)dx = 0$

Contoh : $\int_2^2 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^2 = \frac{1}{5}[x^5]_2^2 = \frac{1}{5}(32 - 32) = 0$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

contoh : $\int_2^5 x^4 dx = 618{,}6$

$$-\int_5^2 x^4 dx = -\left[\frac{x^5}{5}\right]_5^2 =$$

$$-\frac{1}{5}[x^5]_5^2 = -\frac{1}{5}(32 - 3125) = 618{,}6$$

4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

contoh : $\int_2^5 5x^4 dx = \left[x^5\right]_2^5 = 3125 - 32 = 3093$

$5\int_2^5 x^4 dx = 5(618{,}6) = 3093$

5. $\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

contoh : $\int_2^5 (x^4 + 5x^4)dx = \int_2^5 x^4 dx + \int_2^5 5x^4 dx$

=618,6 + 3093 = 3.711,6

6. $\int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx = \int^b f(x)dx$

contoh : $\int_2^3 x^4 dx + \int_3^5 x^4 dx$

$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^3 + \left[\frac{x^5}{5}\right]_3^5$

$= \frac{1}{5}(243 - 32) + \frac{1}{5}(3125 - 243) = 618{,}6$

Latihan Integrasi Tertentu :

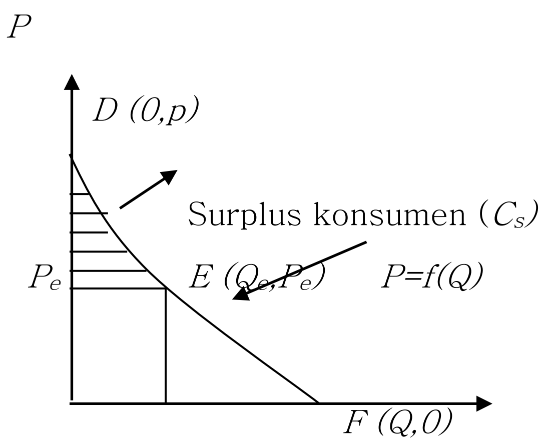
1. $\int_4^6 xdx$
2. $\int_4^6 x^3 dx$
3. $\int_4^6 8x^3 dx$
4. $\int_4^6 (x + 9x^3)dx$
5. $\int_4^6 (3x^2 - 2x)dx$
6. $\int_0^3 (x^2 - 2x + 3)dx$
7. $\int_{-1}^1 (2x + 5)dx$
8. $\int_{-6}^{-4} (3x^2 - 2x)dx$
9. $\int_{-6}^{-4} (3x^2 - 2x)dx$
10. $\int_{-6}^{-4} (x - 9x^3)dx$
11. $\int_{-3}^0 (x^2 - 2x + 3)dx$
12. $\int_{-3}^0 (2x + 1)(x - 3)dx$
13. $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - x\right)^2 dx$
14. $\int_1^8 (x^{1/3} - x^{-1/3})dx$
15. $\int_a^{2a} (a + x)dx$

D. PENERAPAN EKONOMI

1. Surplus Konsumen

Surplus konsumen (Consumer surplus) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh konsumen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar suatu barang.

Fungsi pemintaan $P = f(Q)$ menunjukkan jumlah sesuatu barang yang akan dibeli oleh konsumen pada tingkat harga tertentu. Jika tingkat harga pasar adalah P_e, maka bagi konsumen tertentu yang sebelumnya mampu dan bersedia membayar dengan harga lebih tinggi dari P_e, hal ini merupakan keuntungan baginya sebab ia cukup membayar barang tadi dengan harga P_e. keuntungan lebih semacam inilah yang oleh *Alfred Marshall* disebut surplus konsumen. Secara geometri besarnya surplus konsumen ditunjukkan oleh area dibawah kurva permintaan tetapi diatas tingkat harga pasar.



Surplus konsumen atau C_s (singkatan dari *consumer surplus*) tak lain adalah segitiga P_eDE, dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh $Q = 0$ sebagai batas-bawah dan $Q = Q_e$ sebagai batas atas.

Besarnya surplus konsumen adalah :

$$C_s = \int_0^{Qe} f(Q)dQ - Q_eP_e$$

dalam hal fungsi permintaan berbentuk $P = f(Q)$

atau

$$Cs = \int_{Pe}^{\hat{P}} f(P)dP$$

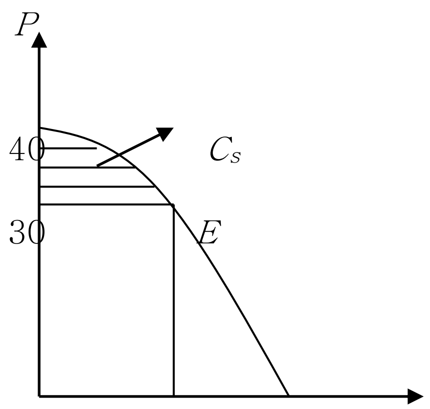
Dalam hal fungsi permintaan berbentuk $Q = f(P)$; $\hat{P}$ adalah nilai P untuk $Q = 0$ atau penggal kurva permintaan pada sumbu harga.

Dengan demikian :

$$Cs = \int_0^{Qe} f(Q)dQ - Q_e P_e = \int_{Pe}^{\hat{P}} f(P)dP$$

Contoh

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q = 48 - 0{,}03\ P^2$. Hitunglah surplus konsumen jika harga pasar adalah 30.



$Q = 48 - 0{,}03\ P^2$

Jika $P = 0,\quad Q = 48$

Jika $Q = 0,\quad P = 40 \equiv \hat{P}$

Jika $P \equiv 0,\quad Q = 48$

$$Cs = \int_{Pe}^{\hat{P}} f(P)dP = \int_{30}^{40} (48 - 0{,}03P^2)dP$$

$$= \left[48P - 0{,}01P^3\right]_{30}^{40}$$

$$= \{48\ (40) - 0{,}01\ (40)^3\} - \{48\ (30) - 0{,}01\ (30)^3\}$$

$$= (1920 - 640) - (1440 - 270) = 110$$

Contoh

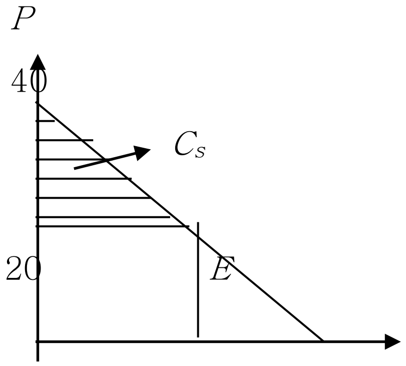
Hitunglah surplus konsumen dengan dua macam cara untuk fungsi permintaan $Q = 40 – 2P$ yang tingkat harga pasarnya 10.

$Q = 40 – 2\,P \rightarrow P = 20 – 0{,}50\,Q$

Jika $P = 0$, $Q = 40$

Jika $Q = 0$, $P = 20 \equiv \hat{P}$

Jika $P_e = 10$, $Q_e = 20$



Cara pertama

$$Cs = \int_0^{Qe} f(Q)dQ - QePe = \int_0^{20} (20 - 00{,}50Q)dQ - (20)(10)$$

$$= \left[20Q - 0{,}25Q^2\right]_0^{20} - 200$$

$$= \{20\,(20) – 0{,}25\,(20)^2\} – \{20\,(0) – 0{,}25\,(0)^2\} – 200$$

$$= 400 – 100 – 200 = 100$$

Cara kedua

$$Cs = \int_{Pe}^{\hat{P}} f(P)dP = \int_{10}^{20} (40 - 2P)dP$$

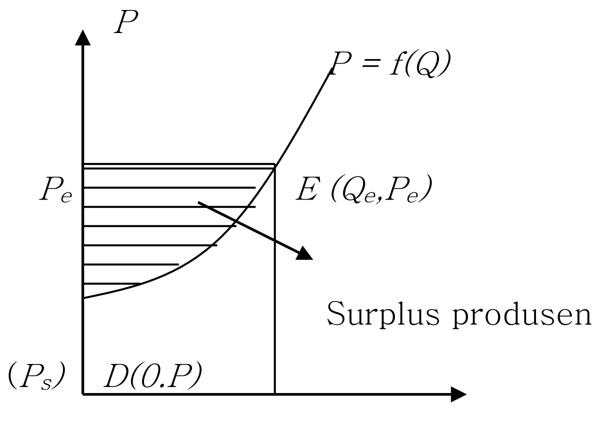
$$= \left[40P - P^2\right]_{10}^{20}$$

$$= \{40\,(20) – (20)^2\} – \{40\,(10) – (10)^2\} = 400 – 300 = 100$$

2. Surplus Produsen

Surplus produsen (*producers surplus*) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh produsen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar dari barang yang ditawarkannya.

Fungsi penawaran $P=f(Q)$ menunjukkan jumlah sesuatu barang yang akan dijual oleh produsen pada tingkat harga tertentu. Jika tingkat harga pasar adalah P_e maka bagi produsen tertentu yang sebetulnya bersedia menjual dengan harga yang lebih rendah dari harga P_e hal ini merupakan keuntungan baginya sebab ia akan dapat menjual barangnya dengan harga P_e (lebih tinggi dari harga jual semula yang direncanakan). Keuntungan lebih semacam ini disebut surplus produsen. Secara geometri, besarnya surplus produsen ditunjukkan oleh luas area diatas kurva penawaran tetapi dibawah tingkat harga pasar.



Surplus produsen atau P_s tak lain adalah segitiga P_eDE,dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh $Q = 0$ sebagai batas bawah dan $Q = Qe$ sebagai batas atas.

Besarnya surplus produsen adalah :

$$Ps = QePe - \int_0^{Qe} f(Q)dQ$$

Dalam fungsi penawaran berbentuk $P = f(Q)$; $\hat{P}$ adalah nilai P untuk $Q = 0$, atau penggal kurva penawaran pada sumbu harga.

Dengan demikian :

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ = \int_{\hat{P}}^{Pe} f(P)dP$$

Contoh

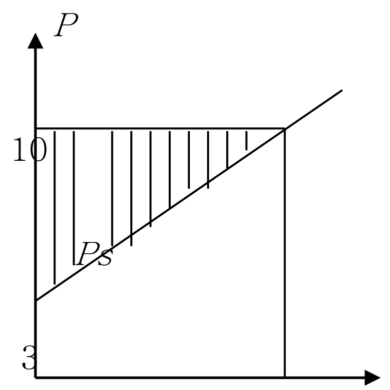
Seorang produsen mempunyai fungsi penawaran $P = 0{,}50Q + 3$. Berapa surplus produsen bila tingkat harga keseimbangan di pasar adalah 10 ? Lakukanlah perhitungan dengan dua cara

$P = 0{,}50\ Q + 3 \rightarrow Q = -6 + 2P$

$P = 0 \rightarrow Q = -6$

$Q = 0 \rightarrow P = 3 \equiv \hat{P}$

$P_e = 10 \rightarrow Q_e = 14$



Cara pertama :

$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Qe} f(Q)dQ = (14)(10) - \int_0^{14} (0{,}50Q + 3)dQ$

$= 140 - \left[0{,}25Q^2 + 3Q\right]_0^{14}$

$= 140 - \{0{,}25\ (14)^2 + 3(14)\} - \{0{,}25(0)^2 + 3(0))$

$= 140 - (-9) = 49$

Cara kedua :

$P_s = \int_{\hat{P}}^{Pe} f(P)dP = \int_3^{10} (-6 + 2P)dP$

$= \left[-6P + P^2\right]_3^{10} = \{-6(10) + 10^2\} - \{-6(3) + 3^2\}$

$= 140 - 91 - 0 = 49$

Contoh

Penawaran dan pemintaan akan suatu barang dipasar masing-masing ditunjukkan oleh $Q = -30 + 5P$ dan $Q = 60 - 4P$.

Hitunglah masing-masing surplus yang diperoleh konsumen dan produsen.

Penawaran :

$Q = -30 + 5P$

$P = 6 + 0{,}20Q$

Permintaan

$Q = 60 - 4P$

$P = 15 - 0{,}25Q$

Keseimbangan pasar

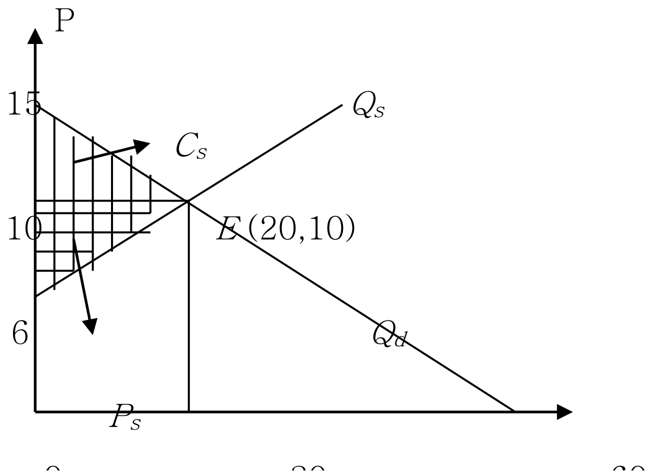
$Q_s = Q_d$

$-30 + 5P = 60 - 4P$

$9P = 90$

$P = 10 \equiv P_e$

$Q = 60 - 4P = 60 - 4(10) = 20 \equiv Q_e$



Surplus Konsumen

$$C_s = \int_0^{Qe} f(Q)dQ - Q_e P_e$$

$$= \int_0^{20} (15 - 0{,}25Q)dQ - (20)(10)dQ$$
$$= \left[15Q - 0{,}125Q^2\right]_0^{20} - 200$$
$$= 250 - 200 = 50$$

Surplus Produsen

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Qe} f(Q)dQ$$

$$= (20)(10) - \int_0^{Qe} (6 + 0{,}20Q)dQ$$
$$= 200 - \left[6Q + 0{,}10Q^2\right]_0^{20}$$
$$= 200 - 160 = 40$$

Soal-soal latihan

1. Fungsi permintaan dan penawaran sebuah produk makanan kaleng di suatu daerah adalah $P_d = 110 – Q^2$ dan $P_s = (Q +2)^2$. Carilah besarnya surplus prodsen dan konsumen pada saat terjadi keseimbangan pasar!

2. Seorang pemilik pabrik, yang baru menambah jenis produknya telah mendistribusikan ke pasar, sedang mengamati perubahan permintaan barang dari konsumen. Bila produk tersebut dijual dengan harga 25, permintaan adalah sebesar 45. Tetapi saat ia menurunkan harga sebesar 20 %, maka jumlah yang diminta menjadi 50.

   Bila diketahui fungsi penawaran adalah Ps = 4/6 Qs + 5. tentukanlah besarnya surplus yang akan diterima oleh pemilik pabrik dan yang akan diterima oleh konsumen!

3. A Manufacture Company that produce ink find that its demand function is: $P=22-Q^2$, while the supply function is: $P=4+Q^2$. Graph the functions above and find the consumer’s surplus and producer’s surplus!.

4. Diketahui fungsi permintaan suatu barang $P= 20 – 3Q^2$ dan fungsi penawarannya

   $$Q=\sqrt{\frac{P}{2}}$$

   a. Carilah surpus produsen dan surplus konsumen
   b. Jika dikenakan pajak 5/unit carilah berapa besar perubahan surplus produsen
   c. Gambarkan kurva.

BAB III
ALJABAR MATRIKS

A. Peranan Aljabar Matriks `

Aljabar matriks memungkinkan untuk menyatakan suatu sistem persamaan yang rumut dalam suatu cara yang ringkas dan sederhana, serta memberikan cara yang cepat untuk menentukan apakah suatu poemakaian terdapat pemecahan sebelum dicoba, dan memberikan cara penyelesaian sistem persaman. Akan tetapi, aljabar matriks hanya hanya dapat diterapkan pada sistem persamaan linier. Karena banyak hubungan ekonomi dapat di dekati dengan persamaan linier dan yang lain dapat dikonversikan menjadi hubungan linier, pembatasan ini umumnya tidak memberikan persoalan yang serius.

B. Definisi Istilah

Matriks adalah deretan bilangan, parameter atau variabel yang disusun segi empat, yang masing-masing mempunyai tempat yag ditata secara cermat dalam matriks. Bilangan-bilangan (parameter atau variabel) disebut sebagai elemen matriks.Bilangan bilangan poada deretan vertikal disebut kolom. Banyaknya baris (m) dan kolom (n) menentukan dimemnsi matriks (m x n), yang dibaca m kali n. Bilangan baris selalu mendahului bi9langan klom. Dalam matriks bujur sangkar, jumlah baris sama dengan jumlah kolom (yaitu m = n). Jika m   atrik terdiri dari satu kolom tunggal sedemikian rupa sehingga diensinya m x 1, matriks tersebut adalah vektor kolom. Jika matrik terdiri dari satu baris, dengan dimensi 1 x n, maka matriks tersebut adalah vektor baris. Matriks yang megkoneversikan baris A menjadi menjadi kolom dan kolom A menjadi baris disebut transpose.A dan diberi tanda A' (atau A^T).

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{bmatrix}_{(3x3)} \qquad B = \begin{bmatrix} 398 \\ 427 \end{bmatrix}_{(2x3)} \qquad C = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{(3x1)} \qquad D = [3\ 0\ 1]_{(1x3)}$$

Transpose A adalah $$A' = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{bmatrix}_{(3x3)}$$

dan transpose C adalah $C' = [7\ 4\ 5\}$

C. Penjumlahan Dan Pengurangan Matriks

Penjumlahan (dan pengurangan) dua matriks A + B (atau A – B) mengharuskan matriks tersebut berdimensi sama. Setiap elemen matriks yang satu kemudian ditambahkan ke (dikurangkan dari) elemen yang bersesuaian dari matriks yang lain. Jadi a_{11} dalam A akan ditambahkan ke (dikurangkan dari) b_{11} dalam B; a_{12} ke b_{12},dan seterusnya.

Penjumlahan A + B dihitung dibawah ini, dengan dengan mengetahui matriks A dan matriks B

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}_{(3x3)} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{(3x3)} \quad A + B = \begin{bmatrix} 8+1 & 9+3 & 7+6 \\ 3+5 & 6+2 & 2+4 \\ 4+7 & 5+9 & 10+2 \end{bmatrix}_{(3x3)}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 8 & 8 & 6 \\ 11 & 14 & 12 \end{bmatrix}_{(3x3)}$$

Selisih C – D, apabila diketahui matriks C dan D, diperoleh sebagai berikut

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}_{(2x2)} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{(2x2)} \quad C - d = \begin{bmatrix} 4-1 & 9-7 \\ 2-5 & 6-4 \end{bmatrix}_{(2x2)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}_{(2x2)}$$

D. Perkalian Sekalar

Dalam aljabar matriks, bilangan sederhana seperti 12, -2, 0,07 disebut skalar. Perkalian matriks dengan bilangan atau skalar meliputu perkalian setiap elemen dari matriks tersebut dengan bilangan itu. Prosesnya disebut perkalian skalar karena menaikkan atau menurunkan matriks tersebut menurut besarnya skalar .

Hasil perkalian skalar k A, apabila diketahui k = 8 dan

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}_{(3x2)}$$

diperlihatkan dibawah ini

$$kA = \begin{bmatrix} 8(6) & 8(9) \\ 8(2) & 8(7) \\ 8(8) & 8(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 72 \\ 16 & 56 \\ 64 & 32 \end{bmatrix}_{(3x2)}$$

E. Perkalian Vektor

Perkalian vektor baris (A) dengan vektor kolom (B) mensyaratkan masing-masing vektor mempunyai jumlah elemen yang persis sama. Kemudian hasilkalinya didapatkan dengan mengalikan elemen-elemen individual dari vektor baris dengan elemen-elemen yang bersesuaian dalam vektor kolom, dan menjumlahkan hasilnya :

$$AB = (a_{11} \text{ x } b_{11}) + (a_{12} \text{ x } b_{21}) + (a_{13} \text{ x } b_{31}) \text{ dan seterusnya}$$

Jadi hasil perkalian baris_kolom akan merupakan suatu bilangan tunggal atau skalar. Perkalian vektor baris kolom adalah penting sekali. Ini dipakai sebagai dasar untuk semua perkalian matriks

Hasil kali AB dari vektor baris A dan vektor klom B, apabila diketahui

$$A = (4\ 7\ 2\ 9)_{(1x4)} \qquad B = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{(4x1)}$$

Dihitung sebagai berikut,

$$AB = 4(12) + 2(5) + 9(6) = 48+7+10+54=119$$

Hasilkali vektor berikut :

$$C = [3\ 6\ 8\ ]_{(1x3)} \qquad D= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{(3x1)}$$

Adalah

CD = (3x2) + (6x4) + (8x5) = 6+24+40=70

Perhatikan bahwa karena masing-masing pasangan vektor diatas mempunyai jumlah elemen yang sama, perkalian adalah mungkin.

Pembalikan susunan perkalian dalam salah satu vektor di atas dan dengan diperolehnya perkalian vektor kolom – baris (BA atau DC) akan menghasilkan jawaban yang sama sekali berbeda. Lihat soal awal (lead matix) sama dengan jumlah baris pada 2, matriks akhir (lag matrix). Setiap vektor baris pada matriks awal kemuduian dikalikan dengan setiap vektor kolom dari matriks akhir, enurut kaidah untuk perkalian vektor baris dan vektor kolom yang dibahas dalam butir 10.5. hasilkali baris-kolom kemudian dipakai sebagai elemen dalam formasi dari matriks hasilkali sedemikian rupa, sehingga setiap elemen c_{ij} dari matriks hasilkali C adlah suatu sklar yang bersala dari perkalian baris ke I dari matriks awal dan kolom ke j dari matriks akhir. Hasil kali baris-klom tersebut disebut hasilkali dalam (inner product)

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ \\ 12 & 9 & 11 \end{bmatrix}_{(2x3)} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 10 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}_{(3x2)}$$

$$AB = D = \begin{bmatrix} 3(6)+6(5)+7(13) & 3(12)+6(10)+7(2) \\ 12(6)+11(13)+9(5) & 12(12)+9(10)+11(2) \end{bmatrix}_{(2x2)} = \begin{bmatrix} 139 & 110 \\ 260 & 250 \end{bmatrix}_{(2x2)}$$

Hasil kali BC dihitung di bawah ini, dengan me4nggunakan metode yang sama :

$$BC = E = \begin{bmatrix} 6(1)+10(2) & 6(7)+12(4) & 6(8)+12(3) \\ 5(1)+10(2) & 5(7)+10(4) & 598)+10(30 \\ 13(1)+2(2) & 13(7)+2(4) & 13(8)+2(3) \end{bmatrix}_{(3x3)} = \begin{bmatrix} 30 & 91 & 84 \\ 25 & 75 & 70 \\ 17 & 99 & 110 \end{bmatrix}_{(3x3)}$$

Hukum Komutatif, Asosiatif Dan Distributif dalam Aljabar Matriks

Penjumlahan matriks adlah komutaif (yaitu A +B = B + A), karena penjumlahan matriks hanya melibatkan penjumlahan elemen-elemen yang brsesuaian dari dua matrks, dan susunan penjumlahan tidak dipentingkan. Untuk alasan yang sama, penjumlahan matrks juga asosiatif (A + B) + C = A + (B + C). Hal yang sama berlaku untuk pengurangan matriks, karena pengurangan matriks A – B dapat dirubah menjadi penjumlahan matriks A + (-B) maka pengurangan matriks juga komulatif dan asosiatif.

Perkalian matriks dengan beberapa perkecualian, adalah tidak komulatif (yaitu AB ≠ BA). Akan tetapi, perkalian skalar adalah komutatif (yaitu kA = Ak). Jika terdapat tiga atau lebih matriks yang bersesuaian yaitu $X_{(axb)}$, $Y_{(cxd)}$, $Z_{(exf)}$, dimana b = c dan d = e, hukum asosiatif akan berlaku selama matriks-matriks tersebut dikalikan dalam urutan persesuaian . Jadi (XY)Z = X(YZ). Tunduk pada syarat yang sama ini, perkalian matriks juga distributif A(B+C)=AB+AC.

Contoh :

Dikertahui : $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 17 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

Untuk membuktikan bahwa penjumlahan dan pengurangan adalah komutatif, buktikan bahwa (1) A + B = B+A dan (2) A-B = -B + A . perhitungan tersebut dperlihatkan dibawah ini :

(1). $A + B = \begin{bmatrix} 4+3 & 11+7 \\ 17+6 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 8 \end{bmatrix} = B + A = \begin{bmatrix} 3+4 & 7+11 \\ 6+17 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 23 & 8 \end{bmatrix}$

(2) $A-B=\begin{bmatrix}4-3 & 11-7\\ 17-6 & 6-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 11 & 4\end{bmatrix}=-B+A=\begin{bmatrix}-3+4 & -7+11\\ -6+17 & -2+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 11 & 4\end{bmatrix}$

Contoh :

Diketahui, $A=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 1 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}_{(3x2)}$ $B=\begin{bmatrix}4 & 9 & 10\\ \\ 2 & 6 & 5\end{bmatrix}_{(2x3)}$ $C=\begin{bmatrix}2\\ 6\\ 7\end{bmatrix}_{(3x1)}$

Untuk membuktikan bahwa perkalian matriks adalah asosiatif, yaitu (AB)C = A(BC), perhitungannya adalah sebagai berikut :

$$AB=\begin{bmatrix}7(4)+5(2) & 7(9)+5(6) & 7(10)+5(5)\\ 1(4)+3(2) & 1(9)+3(6) & 1(10)+3(5)\\ 8(4)+6(2) & 8(9)+6(6) & 8(10)+6(5)\end{bmatrix}_{(3x3)}=\begin{bmatrix}38 & 93 & 95\\ 10 & 27 & 25\\ 44 & 108 & 110\end{bmatrix}_{(3x3)}$$

$$\left(AB\right)C=\begin{bmatrix}38 & 93 & 95\\ 10 & 27 & 25\\ 44 & 108 & 110\end{bmatrix}_{(3x3)}\begin{bmatrix}2\\ 6\\ 7\end{bmatrix}_{(3x3)}=\begin{bmatrix}38(2)+93(6)+95(7)\\ 10(2)+27(6)+25(7)\\ 44(2)+108(6)+110(7)\end{bmatrix}_{(3x1)}=\begin{bmatrix}1299\\ 357\\ 1506\end{bmatrix}_{(3x1)}$$

$$BC=\begin{bmatrix}4(2)+9(6)+10(7)\\ 2(2)+6(6)+5(7)\end{bmatrix}_{(2x1)}=\begin{bmatrix}132\\ 75\end{bmatrix}_{(2x1)}$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 5 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}_{(3x2)}\begin{bmatrix}132\\ 75\end{bmatrix}_{(2x1)}=\begin{bmatrix}7(132)+5(75)\\ 1(1320+3(75)\\ 8(132)+6(75)\end{bmatrix}_{(3X1)}=\begin{bmatrix}1299\\ 357\\ 1506\end{bmatrix}$$

Matriks Identitas Dan Matriks Null

Matriks identitas I adalah suatu matriks bujur sangkar yang mempunyai I untuk setiap elemen pada diagonal utama dari kiri ke kanan dan nol disetiap tempat yang lain. Lihat contoh. Apabila subskript digunakan, seperti pada I_n,n menunjukkan dimensi matriks (mxn). Matriks identitas serupa dengan bilangan 1 dalam aljabar karena perkalian suatu matriks dengan matriks identitas tidak membawa perubahan terhadap matriks asal (yaitu AI = IA = A). Perkalian suatu matriks identitas dengan dirinya sendiri meninggalkan matriks identitas tidak berubah : I x I $(I)^2$ = I. Setiap matriks untuk mana A = A' adalah matriks simetris . matriks simetris untuk mana A x A = A, adalah matriks idempoten, Matriks identitas adalah simetri dan idempoten.

Matriks null terdiri dari semuanya nol dan dapat berdimensi sembarang ; tidak perlu bujur sangkar. Penjumlahan atau pengurangan matriks null tidak membawa pwerubahan terhadap matriks asalnya, perkalian dengan matriks null menghasilkan suatu matriks null.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 14 \\ 9 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 20 & 4 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

N= masih null. I = masih identitas

Balikan (Inversi) Matriks

Determinan Dan Nonsingularitas

Dterminan $|A|$ dari suatu matriks (2 x 2) disebut derterminan orde kedua (second order determinan) dan diperoleh dengan mengambil hasilkali dari kedua elemen pada diagonal utama . jadi, dengan mengetahui suatu matriks umum (2 x 2),

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

determinannya adalah $\underline{|A| = a_{11}a_{21} - a_{21}a_{12}}$

Determinan merupakan sebuah bilangan tunggal atau skalar dan hanya dijumpai dalam matriks bujur sangkar. Jika determinan dari suatu matriks adalah bukan nol , maka matriks tersebut adalah nonsingular (yaitu secara linier tidak tergantung), Matriks singular yang mana $|A| = 0$, adalah suatu matriks dimana paling sedikit satu baris atau kolom merupakan kelipatan dari suatu baris atau kolom lainnya.

Contoh 1:

Apabila diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan kaidah yang dinyatakan di atas, determinan dihitung sebagai berikut

$$|A| = 4(9) – 7(4) = 26$$

karena $|A| \neq 0$, matriks tersebut merupakan matrik nonsingular, yaitu secara linier tidak tergantung 9independent),sebaliknya.

$$|B| = 4(9) – 6(6) = 0$$

Karena $|B| = 0$, B, adalah singular atau secara linier tergantung (dependent). Pengamatan yang lebih teliti memperlihatkan bahwa $baris_2$ dan $kolom_2$ masing-masing adalah 1,5 kali $baris_1$ dan$kolom_1$.

Determinan Orde Yang Lebih Tinggi

Determinan dari matriks (3 x 3)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

disebut detrerminan orde ketiga dan merupakan penjumlahan tiga hasilkali. Untuk memperoleh tiga hasilkali tersebut:

1. Ambil elemen pertama baris pertama , a_{11} , dan dalam hati hapuskan baris dan kolom dimana elemen itu muncul, Lihat (a) di bawah. Kemudian kalikan , a_{11} dengan determinan dari elemen –elemen sisanya .
2. Ambil elemen kedua baris pertama , a_{12} dan dlam hati hapuskan baris dan kolom dimana elemen itu muncul. Lihat (b) di bawah ini. Kemudian kalikan a_{12} dengan (-1) di kalikan determinan elemen-elemen sisanya .

3. Ambil elemen ketiga baris pertama a_{13} dan dalam hati hapuskan baris dan kolom dimana elemen itu muncul . Lihat (c) dibawah . kemudian kalikan a_{13} dengan determinan dari elemen-elemen sisanya .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(a) (b) (c)

Jadi perhitungan untuk determinan tersebut adalah sebagai berikut.

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (11.1)$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = \text{sebuah skalar}$$

Cointoh 2 :

Diketahui A= $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Determinan $|A|$, dihitung sebagai berikut

$$|A| = 8\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3(-1)\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

= 8[4(3)-1(7)] – 3[6(3) – 5(7)] + 2 [6(1) – 5(4)]

= 8(5)- 3 (-17) + 2(-14) = 63

atau metode yang dikenakan oleh Sarrus:

$$|A| = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

= (1) + (2) + (3) – (4) + (5) + (6)

Contoh:

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 8 & 3 \\ 6 & 4 \\ 5 & 1 \end{matrix} \qquad = 8.4.3+3.7.5+2.6.1- (5.4.2+1.7.8+3.6.3)$$

$= 96 + 105 + 12 – (40 + 56 + 54)$

$= 213 – 150 = 63$

karena $|A| \neq 0$,A adalah nonsingular

Minor Dan Kofaktor

Elemen-elemen matriks yang tersisa setelah proses penghapusan yang diuraikan pada butir 11.2 membntuk subdeterminan dari matriks tersebut yang disebut minor. Jadi, minor $[M_{11}[$ adlah determinan dari sumatriks yang dibetuk dengan menghapus baris ke I dan kolom ke j dari matriks tersebut. Dengan memakai matriks dari butir 11.2.

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

dimana $|M_{11}|$ adalah minor dari a_{11} ; $|M_{12}|$ minor dari a_{12} ;dam $|M_{13}|$, minor dari a_{13} . jadi, determinan pada (11.1) dapat ditulis

$$|A| = a_{11}|M_{11}| + a_{12}(-1)|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$

Sutu minor yang digandeng dengan tanda yang telah ditetapkan disebut kofaktor , $|C_{ij}|$, kaidah untuk tanda dari kofaktor adalah

$$|C_{ij}| = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

jadi jika jumlah dari subskrip tersebut merupakan suatu bilangan genap, $|C_{ij}| = |M_{ij}|$ karena (-1) yang dipangkatkan dengan bilangan genap hasilnya positif. Jika I + j sama dengan suatu bilangan ganjil, $|C_{ij}| = -|M_{ij}|$, karena (-1) yang dipangkatkan dengan bilangan ganjil yang negatif.

Matriks Kofaktor Dan Matriks Adjoint

Matriks kofaktor adalah suatu matriks dimana setiap elemen a_{ij} diganti dengan kofaktornya $|C_{11}|$. Matriks adjoint adalah transpose dari suatu matriks kofaktor . jadi

$$C = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{13}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix} \qquad \text{Adj A} = C^{'} = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{13}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$$

Contoh:

Matriks kofaktor C dan matriks adjoint A didapatkan dibawah ini, dengan mengetahui:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Dengan menukar tempat elemen a_{ij} dengan kofaktornya $\lfloor C_{ij} \rfloor$ menurut hukum kofaktor,

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 7 \\ -9 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Matriks adjoint A adalah traspose dari C,

$$\text{Adj A} = \text{C'} = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 5 \\ -6 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & -10 \end{bmatrix}$$

Matriks Balikan

Matriks balikan (inverse matrix) A^{-1}, yang hanya dapat ditemukan untuk suatu matriks bujur sangkar, matriks nonsingular A, adalah suatu matriks tunggal yang memenuhi hubungan.

$AA^{-1}=I=A^{-1}A$

Mengalikan suatu matriks dengan belikannya akan menyederhanakan matriks itu menjadi suatu matriks identitas. Jadi matriks balikan dlam aljabar linear mempunyai fungsi hampir sama dengan kebalikan (reciprocal) dalam aljabar biasa. Rumus untuk memperoleh balikan adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA$$

Contoh:

Untuk mencari balikan untuk A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

1. Cek bahwa matriks itu merupakan suatu matriks bujur sangkar, di sini 3x3, karena hanya matriks bujur sangkar yang dapat mempunyai balikan.
2. Hitunglah determinan untuk memastikan |A| ≠ 0, karena hanya matriks nonsingular yang dapat mempunyai balikan

   |A| = 4[3(4)-(-1)(1)]-1[(2)(4)-3(1)+(-5)[(-2)(-1)-3(3)]

   = 52+11+35 = 98 ≠ ∞
3. Carilah matriks kofaktor dari A.

$$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 1 & 31 & 7 \\ 16 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

Kemudian trasposekan matriks kofaktor tersebut untuk mendapatkan matriks adjoint.

$$\text{Adj A} = \text{C'} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

4. Kalikan matriks adjoint tersebut dengan 1/|A| = 1/∞ untuk mendapatkan A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{98}\begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{16}{98} \\ \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{6}{98} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Metode GAUSS untuk pembalikan suatu matriks

Metode Gauss juga dapat dipakai untuk membalikkan (menginvertasikan) suatu matriks. Semata-mata tetapkan suatu matriks perbesaran (augmented) dengan matriks identitas di sebelah kanan. Kemudian terapkan operasi-operasi baris sampai matriks koefesien di sebelah kiri direduksi menjadi suatu matriks identitas. Pada batas ini, matriks disebelah kanan adalah matriks balikan.

Dasar pemikiran di balik metode ini dapat dilihat dalam beberapa langkah matematis. Dimulai dengan matriks perbesaran A/I, dan pengalian kedua ruas dengan balikan A^{-1}, AA^{-1}/IA^{-1}. dari butir 11.7 dan 10.8, ini disederhanakan menjadi I/A^{-1} di mana matriks identitas tersebut sekarang di sebelah kiri dan balikan di sebelah kanan.

Contoh:

Untuk menggunakan metode eleminasi Gauss untuk mencari balikan bagi

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Tetapkan matriks perbesaran dengan matriks identitas di sebelah kanan, sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Kemudian reduksikan matriks koefesien di sebelah kiri menjadi suatu matriks identitas dengan memakai operasi-operasi baris yang telah diuraikan!

1a. Kalikan $baris_1$ dengan ¼

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/4 & -5/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1b. Tambahkan 2 kali $baris_1$ pada $baris_2$ dan kurangkan 3 kali $baris_1$ dari $baris_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/4 & -5/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & -3/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -7/4 & 31/4 & -3/4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2a. Kalikan $baris_2$ dengan 2/7

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/4 & -5/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & -7/4 & 31/4 & -3/4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2b. Kurangkan ¼ $baris_2$ dari $baris_1$ dan tambahkan 4/7 $baris_2$ pada $baris_3$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -8/7 & 3/14 & -1/14 & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & 1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

3a. Kalikan $baris_3$ dengan 1/7

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -8/7 & 3/14 & -1/14 & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & 1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/14 & 1/14 & 1/7 \end{array}\right]$$

3b. Tambahkan 8/7 baris $_3$ pada $baris_1$, dan 3/7 $baris_3$ pada $baris_2$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{8}{49} \\ \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{3}{49} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

seperti didapatkan dalam contoh diatas dengan menggunakan matriks adjoint.

Menyelesaikan persamaan Linier dengan matrik balikan

Matriks balikan dapat dipakai untuk menyelesaikan persamaan matriks. Jika,

$$A_{(nxn)} X_{(nx1)} = B_{(nx1)}$$

Dan balikan A^{-1} ada, pengalian kedua ruas persamaan tersebut dengan A^{-1}, mengikuti hukum persesuaian, menghasilkan

$$A^{-1}_{(nxn)} A_{(nxn)} X_{(nx1)} = A^{-1}_{(nxn)} B_{(nx1)}$$

Dari butir 11.7, A^{-1} A = I. Jadi,

$$I_{(nxn)} X_{(nx1)} = A^{-1}_{(nxn)} B_{(nx1)}$$

Dari butir 11.8, IX = X. Karena itu,

$$X_{(nx1)} = (A^{-1}B)_{(nx1)}$$

Penyelesaian persamaan tersebut diperoleh dari hasil kali balikan dari matriks koefesien A^{-1} dan vektor kolom dari konstanta B.

Contoh.

Di bawah ini digunakan persamaan matriks dan balikan untuk menyelesaikan x_1, x_2 dan x_3 dengan mengetahui,

$$4x_1 + x_2 - 5x_3 = 8$$

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5$$

Pertama, nyatakan sistem persamaan itu dalam bentuk matriks,

$$A X = B$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

karena A^{-1} telah diperoleh dengan contoh.

$$X = \begin{bmatrix} \frac{13}{98} & \frac{1}{98} & \frac{16}{98} \\ \frac{11}{98} & \frac{31}{98} & \frac{6}{98} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{104}{98} + & \frac{12}{98} + & \frac{80}{98} \\ \frac{88}{98} + & \frac{372}{98} + & \frac{30}{98} \\ -\frac{8}{14} + & \frac{12}{14} + & \frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{196}{98} \\ \frac{490}{98} \\ \frac{14}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, dan $x_3 = 1$.

Kaidah creamer untuk penyelesaian matriks

Kaidah Creamer memberikan suatu metode yang sederhana penyelesaian sistem persamaan linear melalui pemakaian determinan. Kaidah Creamer berbunyi.

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Dimana x_i adalah variabel ke-I yang tidak diketahui dalam suatu seri persamaan, $|A|$ adalah determinan dari matriks koefesien, dan $|A_i|$ adalah determinan dari suatu matriks khusus yang dibentuk dari matriks koefesien asalnya dengan mengganti kolom dari koefesien x_i dengan vektor kolom dari konstanta. Lihat contoh berikut ini. Bukti kaidah Cramer diberikan dalam soal 11.44.

Contoh:

Di bawah ini kaidah Cramer digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan

$$6x_1+5x_2 = 49$$
$$3x_1 +4x_2 = 32$$

1. Nyatakan persamaan tersebut dalam membentuk matriks

   AX = B

   $$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 32 \end{bmatrix}$$

2. Carilah determinan dari A

   $|A| = 6(4)-3(5) = 9$

3. Kemudian untuk mencari x_1, gantikan kolom 1, koefesien dari $x_1$dengan vektor dari konstanta B, yang membentuk suatu matriks baru A_1.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 49 & 5 \\ 32 & 4 \end{bmatrix}$$

Carilah determinan dari A_1

$|A| = 49(4)-32(5) = 36$

dan gunakan rumus kaidah Cramer,

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{36}{9} = 4$$

4. Untuk mencari x_2, gantikan kolom$_2$, koefesien dari x_2, dari matriks asal, dengan vektor kolom dari konstanta B, yang membentuk suatu matriks baru A_2.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 6 & 49 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}$$

Ambil determinannya

$|A_2| = 6(32)-3(49) = 45$

dan gunakan rumus,

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{45}{9} = 5$$

Metode Eleminasi GAUSS dalam Persamaan Linear

Penggunaan metode eleminasi gause dalam menyelesaikan persamaan linier semata-mat dengan menyatakan sistem persamaan tersebut sebagai suatu matriks perbesaran dan menerapkan operasi baris berulang-ulang pada matriks perbesaran sampai matriks kooefisien A disederhanakan menjadi suatu matriks identitas. Penyelesaian atas sistem persamaan kemudian dapat dibaca dari elemen-elemen yang tinggal dalam vektor kolom B (lihat contoh). Untuk mengubah matriks kooefisien kedalam suatu matriks identitas, bergeraklah sepanjang sumbu utama. Pertama dapatkan 1 pada posisi a_{11} dari matriks koefesien,kemudian gunakan operasi baris untuk mendap[atkan nol di setiap tempat yang lain pada kolom pertama. Berikutnya dapatkan 1 pada posisi a_{22}dan gunaan operasi baris mendapatkan nol di setiap tempat yang lain pada kolom tersebut . Teruskan memperoleh 1 sepanjang diagonal utama dan kemudian rampungkan kolomnya sampai matriks identitas tersebut sempurna..

Contoh :

Metode eliminasi Gauss di bawah ini untuk mncari x_1 dan x_2 dalam sistim persamaan

$2x_1 + 12x_2 = 40$

$8x_1 + 4x_2 = 28$

Pertama nyatakan persamaan tersebut dalam suatu matriks perbesaran

$$A|B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 12 & 40 \\ 8 & 4 & 28 \end{array}\right]$$

kemudian,

1a. kalikan baris pertama dengan ½ untuk mendapatkan 1 pada posisi a_{11}

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 20 \\ 8 & 4 & 28 \end{array}\right]$$

1b. kurangkan 8 kali baris pertamadari baris kedua untuk merampungkan kolom pertama

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 20 \\ 0 & -44 & -132 \end{array}\right]$$

2a. Kalikan baris kedua dengan (-1/44) untuk mendapatkan1pada posisi a_{22}

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 20 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

2b. . kurangkan 6 kali baris kedua dari baris pertama untuk merampungkan kolom kedua

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

hasilnya adalah $x_1 = 2, x_2 = 3$ karena

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Selesaikan sistem persaman linier berikut dengan menggunakan metode eleminasi Gauss

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 24$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 23$$

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33$$

Matriks perbesarannya

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 6 & 24 \\ 2 & 4 & 3 & 23 \\ 5 & 3 & 4 & 33 \end{array}\right]$$

1a. kalikan baris 1 dengan 1/3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 23 \\ 5 & 3 & 4 & 33 \end{array}\right]$$

1b. kurangkan 2 kali baris $_1$ dari baris $_2$ dan 5 kali baris$_1$ dari baris $_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 2 & 8 \\ 0 & 8/3 & -1 & 7 \\ 0 & -1/3 & -6 & -7 \end{array}\right]$$

2a. kalikan baris$_2$ dengan 3/8

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3/8 & 21/8 \\ 0 & -1/3 & -6 & -7 \end{array}\right]$$

2b. kurangkan 2/3 kali baris$_2$ dari baris $_1$ dan tambahkan 1/3 kali baris$_2$ dari baris $_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/4 & 25/4 \\ 0 & 1 & -3/8 & 21/8 \\ 0 & 0 & -49/8 & -40/8 \end{array}\right]$$

3a. Kalikan baris $_3$ dengan – 8/49

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/4 & 25/24 \\ 0 & 1 & -3/8 & 21/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

3b kurangkan 9/4 kali baris $_3$ dari baris $_1$ dan tambahkan 3/8 dari baris $_3$ ke baris$_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

jadi , x_1 = 4,x_2 =3 an x_3 =1

Optimasi dengan Determinan Hess (Hessian)

Untuk mengoptimumkan suatu fungsi multivariabel z = f(x, y), dengan anggapan syarat jenjang pertama $z_x = z_y = 0$ telah penuhi, dua syarat selanjutnya harus dipenuhi:

1. z_{xy}, z_{yy} >0 untuk suatu minimum

   z_{xy}, z_{yy} <0 untuk suatu maksimum

2. z_{xx}, $z_{yy} > (z_{xy})^2$

Lihat butir 5.7 suatu pengujian yang mudah untuk syarat jenjang kedua ini adalah determinan Hessian. Hessian $|H|$ adalah suatu determinan terdiri dari semua turunan parsial jenjang kedua, dengan parsial langsung jenjang kedua atas diagonal utama dan parsial silang jenjang kedua di luar diagonal utama tersebut. Jadi,

$$|H| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

dimana $z_{xy} = z_{yx}$. Jika elemen pertama pada diagonal utama, minor prinsipil pertama, $|H_1| = z_{xx}$, positif dan minor prinsipil kedua,

$$|H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2 > 0$$

Syarat jenjang kedua untuk minimum dipenuhi. Apabila $|H_1|>0$ dan $|H_2|>0$, Hessian tersebut definit positif. Suatu Hessian definit positif memenuhi syarat jenjang kedua untuk suatu minimum.

Jika minor prinsipil pertama, $|H_1| = z_{xx} <0$ dan minor kedua,

$$|H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

Syarat jenjang kedua untuk maksimum dipenuhi. Apabila $|H_1|<0$ dan $|H_2|>0$, Hessian tersebut definit negatif. Suatu Hessian definit negatif memenuhi syarat jenjang kedua untuk suatu maksimum.

Contoh 2.

Dalam contoh 14 dalam ditentukan bahwa

$Z = 6x^2 - 9x - 3_{xy} - 7_y + 5y^2$

Dioptimumkan pada $\bar{x} = 1, \bar{y} = 1$. Parsial keduanya adalah $z_{xx} = 12$, $z_{yy} = 10$ dan z_{xy}=-3. dengan menggunakan Hessian untuk menguji syarat jenjang dua,

$$|H| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix}$$

Dengan mengambil minor-minor prinsipil, $|H_1| = 12>0$ dan

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 12(10) - (-3)(-3) = 111 > 0$$

dengan $|H_1|<0$ dan $|H_2|>0$, Hessian tersebut adalah definit dan z minimum pada nilai kritis.

Contoh 3

Determinan juga dapat dipakai untuk menguji kedefinitan positif atau negatif dari suatu bentuk kuadrat. Determinan dari suatu bentuk kuadrat disebut diskriminan $|D|$. apabila diketahui sebuah bentuk kuadrat dalam dua variabel seperti,

$Z = 2x^2 + 5_{xy} + 8y^2$

Maka untuk membentuk diskriminasi, taruh koefesien variabel yang dikuadratkan pada diagonal utama dan bagilah koefesien variabel yang tidak dikuadratkan secara sama besar di antara dua posisi di luar diagonal. Jadi,

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 8 \end{vmatrix}$$

kemudian, evaluasilah minor-minor prinsipil, seperti dalam pengujian Hessian.

$$|D_1| = 2 > 0 \qquad |\mathrm{D}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 6{,}25 = 9{,}75 > 0$$

Jadi z adalah definit positif, berarti bahwa z akan lebih besar dari nol untuk semua harga x dan y bukan nol.

Hessian Jenjang (Orde) ketiga

Apabila diketahui y = f(x_1, x_2, x_3), maka Hessian jenjang ketiganya adalah

$$|H| = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}$$

di mana elemen-elemennya merupakan berbagai turunan parsial jenjang kedua dari y;

$$y_{11} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \mathrm{y}_{12} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad \mathrm{y}_{23} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_3}$$

syarat untuk suatu minimum relatif atau maksimum relatif tergantung pada tanda masing-masing minor prinsipil pertama, kedua, ketiga. Jika $|H_1| = y_{11} > 0$, maka

$$|H_2| = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{dan} \quad |H_3| = |H| > 0$$

dimana $|H_3|$ adalah minor prinsipil ketiga, $|H|$ adalah definit positif dan memenuhi syarat jenjang ke dua untuk suatu minimum. Jika $|H_1| = y_{11} < 0$, maka

$$|H_2| = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{dan} \quad |H_3| = |H| < 0$$

$|H|$ adalah definit negatif dan akan memenuhi syarat jenjang kedua untuk suatu maksimum. Secara ringkas, jika minor prinsipil semuanya positif, $|H|$ adalah definit positif dan syarat jenjang untuk suatu minimum relatif terpenuhi, jika minor-minor prinsipil berubah-ubah tanda antara positif dan negatif, $|H|$ adalah definit negatif dan syarat jenjang dua untuk suatu maksimum relatif terpenuhi.

Contoh 4. fungsi

$$y = -5x_1^2 + 10x_1 + x_1x_3 - 2x_2^3 + 4x_2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2$$

dioptimumkan sebagai berikut, dengan menggunakan Hessian untuk menguji syarat jenjang kedua. Syarat jenjang pertama adalah

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = y_1 = -10x_1 + 10 + x_3 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = y_2 = -4x_2 + 2x_3 + 4 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = y_3 = x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0$$

yang dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan memakai kaidah Cramer (lihat butir 11.9) dan mengambil determinan-determinan yang berbeda, maka $|A| = -10(28)+1(4) = -276 \neq 0$, karena $|A|$ dalam hal ini adalah Jacobian dan tidak sama dengan nol, tiga persamaan tersebut secara fungsional bebas (tidak tergantung).

$|A_1| = -10(28)+1(-8) = -288$ $\quad$ $|A_2| = -10(32)-(-10)(-2)+1(14) = -336$

$|A_3| = -10(8)-10(4) = -120$

jadi, $\bar{x}_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{-288}{-276} \cong 1{,}04$

$$\overline{x_2} = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-336}{-276} \cong 1{,}22$$

$$\overline{x_3} = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-120}{-276} \cong 0{,}43$$

Dengan mengambil parsial-parsial kedua untuk syarat jenjang kedua,

$y_{11}=-10$	$y_{12} = 0$	$y_{13}=1$
$y_{21}= 0$	$y_{22} =- 4$	$y_{23} = 2$
$y_{31}=1$	$y_{32} = 2$	$y_{33} =-8$

jadi,

$$|H| = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

yang mempunyai elemen yang sama seperti matriks koefesien dalam (12.1) karena parsial jenjang pertamanya semua linear. Akhirnya, dengan menerapkan pengujian Hessian, yaitu dengan memeriksa tanda dari masing-masing minor prinsipil pertama, kedua dan ketiga, maka

$|H_1| = -10 < 0$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0 \qquad |H_3| = |H| = |A| = -276 < 0$$

karena minor-minor prinsipil berubah tanda secara benar, maka Hessian tersebut adalah definit negatif dan fungsi tersebut dimaksimumkan pada $\overline{x_1} = 1{,}04, \overline{x_2} - 1{,}22, dan\, \overline{x_3} = 0{,}43$

Hessian yang dibatasi, untuk optimalisasi berkala

Untuk mengoptimumkan suatu fungsi f (x,y) di bawah suatu kendala g(x,y), butir 5.8 memperlihatkan bahwa syatu fungsi yang baru $f(x,y,\lambda) = f(x,y)+ \lambda g(x,y)$ dapat dibentuk di mana syarat jenjang pertamanya adalah $F_x = F_y = F\lambda = 0$.

Syarat jenjang keduanya sekarang dapat dinyatakan dalam *Hessian yang dibatasi* (Bordered Hessian) $|\overline{H}|$, dalam salah satu dari dua cara berikut,

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & g_x \\ F_{yx} & F_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} atau \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

yang semata-mata merupakan Hessian yang sederhana

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

yang dibatasi oleh urutan pertama kendala dengan nol pada diagonal utamanya. Susunan minor prinsipil yang dibatasi, ditentukan oleh susunan minor prinsipil yang sedang dikenakan batasan. Karena $|\overline{H}|$ di atas menunjukkan suatu minor prinsipil kedua yang dibatasi $|\overline{H}_2|$, sebab minor prinsipil yang sedang dikenakan batasan adalah (2x2).

Untuk suatu fungsi dalam n variabel f(x_1, x_2, …x_n), dengan kendala g(x_1, x_2, …x_n),

$$|\overline{H}| = \begin{Vmatrix} F_{11} & F_{12} \dots & F_{1n} & g_1 \\ F_{21} & F_{22} \dots & F_{2n} & g_2 \\ F_{n1} & F_{n2} \dots & F_{nn} & g_n \\ g_1 & g_2 \dots & g_n & 0 \end{Vmatrix} atau \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \dots & g_n \\ g_1 & F_{11} & F_{12} \dots & F_{1n} \\ g_2 & F_{21} & F_{22} \dots & F_{2n} \\ g_n & F_{n1} & F_{n2} \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

dimana $|\overline{H}| = |\overline{H}_n|$, karena minor prinsipil (nxn) yang dibatasi.

Jika $|\overline{H}_2|$, $|\overline{H}_3|$, ….. , $|\overline{H}_n|$, <), Hessian yang dibatasi tersebut adalah definit positif, yang merupakan syarat yang memadai untuk suatu minimum. Perhatikan bahwa pengujian dimulai dengan $|\overline{H}_2|$, dan bukan $|\overline{H}_1|$.

Contoh:

Optimalkan fungsi Z = $4x^2 + 3xy + 6\,y^2$ dengan kendala x+y = 56

Jawab:

Fungsi gabungan lagrange: $F(x,y,\lambda) = 4x^2 + 3xy + 6y^2 + \lambda\ (x + y - 56)$

$F_x = 0$ 8x + 3y + λ = 0 (1)

$F_y = 0$ 3x + 12y + λ = 0 (2)

(1) λ = -8x-3y

(2) λ = -3x-12y

-8x-3y = -3x-12y

-5x = -9y

x = 1,8y

fungsi kendala x + y = 56

1,8y + y = 56

2,8y = 56 y = 20

x = 1,8 (20) = 36

$F_{xx} = 8$, $F_{xy} = 3$, $F_{yy} = 12$, $g_x = 1$, $g_y = 1$

$$|H| = |H_2| = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$|H_2| = 8\ (-1) - 3(-1) + 1(3 - 12) = -14$

karena $|H_2| < 0$ maka definit positif, berarti ekstim minimum.

Soal-soal latihan

1. Carilah akar-akar dari persamaan berikut dengan menggunakan metode Cramer dan metode Invers:

   a.
   $$\begin{aligned} 2X - 3Y + Z &= 5 \\ X + 2Y - Z &= 2 \\ 4X - 2Y + 2Z &= 18 \end{aligned}$$

   b.
   $$\begin{aligned} -2P + 2Q + 3R &= 10 \\ P - 2Q + 4R &= 3 \\ 4P + 3Q - R &= 11 \end{aligned}$$

2. Tentukan nilai ektrim dari fungsi dibawah ini dengna menggunakan metode Cramer, dan detrerminan Hess untuk menguji jenis optimumnya!

   $Y = X_1^2 + 4X_1X_2 - 3X_1X_3 - 2X_2^2 + 2X_2X_3 + ½ X_3^2 – 7X_1 + 2X_2$

3. Sebuah perusahan memproduksi dua jenis barang dalam pasar persaingan murni dan mempunyai fungsi penerimaan total dan biaya tolal sebagai berikut :

   $C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 3Q_2^2$ dan $R = 15Q_1 + 18Q_2$
   maksimumkan laba perusahan tersebut dengan memakai :
   a. Kaedah Cramer untuk menentukan titik ekstrim
   b. Determinan Hess untuk menguji maksimumnya.

4. Keseimbangan pasar untuk tiga pasar yang berkaitan dinyatakan dengan persamaan berikut :

   $$\begin{aligned} 2p_1 + 3p_2 - P_3 &= 125 \\ 3p_1 - 2p_2 + 4P_3 &= 95 \\ -p_1 + 4p_2 + 2p_3 &= 145 \end{aligned}$$

   Hitunglah harga keseimbangan pasar untuk masing-masing pasar tersebut melalui pendekatan matrik. Gunakan metode yang anda kuasai!.

5. Suatu perusahaan memproduksi 2 jenis barang dengan harga jual di perlihatkan persamaan:
   $P_A = 120 – 5Q_A + 4Q_B$ dan $P_B = 80 + 10Q_A - 10Q_B$
   Biaya produksi di perlihatkan oleh persamaan $TC = 40 + Q_A^2 + Q_B^2 + 4Q_AQ_B$
   Bila jumlah produksi kedua jenis barang tersebut terbatas pada 60 unit perperiode, tentukan:
   a. jumlah masing-masing barang dan harga barang agar keuntungan maksimum dengan metode cramer!
   b. Buktikan keuntungan maksimum dengan metode Hessian!

BAB IV
ANALISA MASUKAN-KELUARAN

Salah satu perkembangan menarik dari penerapan aljabar matriks dalam bidang ekonomi adalah analisis masukan-keluaran (*input-output analysis*) yang diperkenalkan pertama kalinya pada tahun 1936 oleh *Wassily W. Leontief* dari *Harvard University.* Analisis masukan keluaran merupakan suatu model matematis untuk menelaah struktur perekonomian yang saling kait mengait antar sektor atau kegiatan ekonomi. Model ini lazim diterapkan untuk menganalisis perekonomian secara makro nasional maupun regional.

Analisis masukan-keluaran bertolak dari anggapan bahwa suatu sistem perekonomian terdiri atas sektor-sektor yang saling berkaitan. Masing-masing sektor menggunakn keluaran dari sektor lain sebagai masukan bagi keluaran yang akan dihasilkannya, kemudian keluaran yang dihasilkannya merupakan masukan pula bagi sektor lain. Sudah barang tentu, selain menjadi masukan bagi sektor lain, terdapat pula keluaran dari sesuatu sektor yang menjadi masukan bagi sektor itu sendiri dan sebagai barang konsumsi bagi pemakai akhir.

A. MATRIKS TRANSAKSI

Langkah awal dalam analisis masukan-keluaran adalah menyusun suatu tabel yang berisi keterangan-keterangan tentang bagaimana baik dalam satuan kuantitatif fisik atau dalam satuan nilai uang keluaran suatu sektor terdistribusi ke (diminta oleh) sektor-sektor lain sebagai masukan dan ke (oleh) pemakai akhir sebagai barang konsumsi. Tabel demikian dinamakan matriks transaksi atau matriks masukan keluaran. Contoh sebuah matriks transaksi dapat dilihat di bawah ini :

Matrika Transaksi Perekonomian Negara Kertagama*)

Masukan \ Keluaran	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan akhir	Keluaran total
Pertanian	20	38	5	40	100
Industri	15	80	60	135	290
Jasa	10	50	55	120	235
Nilai tambah	55	125	115	70	365
Kaluaran total	100	290	235	365	990

*) Hipotesis

Pembacaan tabel kesamping berarti menjelaskan bahwa dari seluruh keluaran (*output*) sektor pertanian senilai 100, senilai 20 digunakan oleh sektor itu sendiri sebagai masukan (*input*) sedangkan 35 digunakan oleh sektor industri sebagai masukan sektor tersebut, senilai 5 digunakan sebagai masukan sektor jasa dan sisanya senilai 40 dibeli oleh konsumen akhir sebagai barang konsumsi. Pembacaan tabel kebawah berarti menjelaskan bahwa dari seluruh keluaran sektor pertanian senilai 100, senilai 20 berupa masukan dari sektor itu sendiri, senilai 15 berupa masukan yang berasal dari sektor industri, senilai 35 berupa masukan dari sektor jasa, dan selebihnya merupakan nilai tambah (*added value*) sektor pertanian tersebut yaitu senilai 55. Nilai tambah ini sering juga disebut masukan primer (*primary input*).

Tabel transaksi bisa juga dituliskan dalam bentuk notasi matriks. Misalnya X_{ij} melambangkan keluaran dari sektor i yang dipergunakan sebagai masukan sektor j, U_i melambangkan permintaan akhir terhadap keluaran sektor i, Y_j melambangkan nilai sektor j dan X_j adalah keluaran total dari sektor j maka tabel transaksinya secara matriks:

Matriks Transaksi

	Distribusi Konsumsi	Permintaan Akhir	Keluaran Total
Distribusi produksi	X_{11} X_{12}…………………………X_{1m} X_{21} X_{22}…………………………X_{2m} : : : : X_{m1} X_{m2}…………………………X_{mm}	U_1 U_2 : : U_m	X_1 X_2 : : X_m
Nilai tambah	Y_1 Y_2……………………………Y_m	U_{m+1}	X_{m+1}
Keluaran total	X_1 X_2……………………………X_m	X_{m+1}	X

Pemakaian total oleh sektor *i* :

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij} + U_i \qquad \text{i} = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots, m + 1$$

keluaran total dari sektor *j* :

$$X_j = \sum_{i=1}^{m} X_{ij} + Y_i \qquad j = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, m + 1$$

B. MATRIKS TEKNOLOGI

Dari matriks transaksi diatas maka diketahui, bahwa bagi sektor *j* untuk memproduksi keluaran sejumlah X_j diperlukan masukan-masukan dari sektor 1 hingga sektor *m* dan sejumlah tertentu nilai tambah atau masukan primer. Hal ini berarti bahwa masing-masing kolom menggambarkan hubungan masukan-keluaran antar sektor. Begitu pula pada saat yang sama matriks transaksi memberikan informasi tentang bagaimana keluaran dari sesuatu sektor terdistribusi diantara sektor-sektor yang ada, termasuk sektor konsumen akhir. Hal inipun menggambarkan hubungan masukan-keluaran antar sektor. Jika nilai setiap unsur dalam matriks transaksi tersebut dibagi dengan nilai jumlah kolom yang bersesuaian (misal X_{ij} dibagi X_{j9} atau X_{2j} dibagi X_j), maka diperoleh suatu rasio yang dinamakan koefisien teknologi.

Koefisien teknologi $a_{ij} = \dfrac{X_{ij}}{X_j}$ $\quad i = 1,2,\ldots\ldots,m \qquad j = 1,2,\ldots\ldots,m$

Koefisien teknologi a_{ij} adalah suatu rasio yang menjelaskan jumlah atau nilai keluaran sektor i yang diperlukan sebagai masukan untuk menghasilkan satu unit keluaran disektor j.

Jika semua koefisien teknologi yang dihitung (a_{ij} dihitung untuk semua i dan j) dan hasilnya disajikan dalam suatu matriks, diperolehlah sebuah matriks teknologi. Jadi, matriks teknologi adalah suatu matriks dalam analisis masukan-keluaran yang unsur-unsurnya berupa koefisien teknologi. Sebuah ilustrasi teknologi untuk perekonomian Negara Kertagama di depan adalah :

	P	*I*	*J*
Pertanian	0,20	0,12	0,02
Industri	0,15	0,28	0,26
Jasa	0,10	0,17	0,23
Nilai tambah	0,55	0,43	0,49
	1,00	1,00	1,00

[perhatikan matriks teknologi dibentuk hanya oleh "sektor-sektor utama"!]

Secara umum matriks teknologi dapat dirumuskan sebagai :

Matriks Teknologi

		Sektor		
Sektor	*1*	*2*	……………	*m*
1	a_{11}	a_{12}	……………	a_{1m}
2	a_{21}	a_{22}	……………	a_{2m}
:	:	:	……………	:
:	:	:	……………	:
m	a_{m1}	a_{m2}	……………	a_{mn}
Nilai tambah	$(1 - \sum_i a_{i1})$	$(1 - \sum_i a_{i2})$	……………	$(1 - \sum_i a_{im})$

Sedangkan himpunan koefisien teknologi untuk unsur-unsur permintaan akhir dan keluaran total masing-masing adalah berupa vektor kolom.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ : \\ : \\ U_m \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ : \\ : \\ X_m \end{bmatrix}$$

Karena koefisien masukan $a_{ij} = X_u/X_j$, berarti $X_{ij} = a_{ij} X_j$

Menurut matriks transaksi,

$$X_i = \sum_{i=1}^{m} X_{ij} + U_i$$

Padahal $\qquad X_{ij} = a_{ij} X_I$

Maka $\qquad X_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_j + U_i$

Bila diuraikan

$$X_I = a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{im} X_m + U_i$$

Atau

$$U_i = X_i - a_{i1} X_1 - a_{i2} X_2 - \ldots\ldots\ldots - a_{im} X_m$$

Untuk masing-masing *i*

$$U_1 = X_1 - a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - \ldots\ldots - a_{1m}X_m$$
$$= (1 - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 - \ldots\ldots - a_{1m}X_m$$

$$U_2 = X_2 - a_{21}X_1 - a_{22}X_2 - \ldots\ldots - a_{2m}X_m$$
$$= -a_{21}X_1 + (1 - a_{22})X_2 - \ldots\ldots - a_{2m}X_m$$

.

.

.

$$U_m = X_m - a_{m1}X_1 - a_{m2}X_2 - \ldots\ldots - a_{mm}X_m$$
$$= -a_{m1}X_1 - a_mX_2 - \ldots\ldots - (1 - amm)Xm$$

atau jika ditulis secara singkat dengan matriks :

$$U_{m\times 1} = (I - A)_{m\times m} X_{m\times 1}$$

U dan **X** masing-masing adalah vektor permintaan akhir dan vektor kolom secara keluaran total, **I** adalah matriks satuan, sedangkan **A** adalah matriks teknologi yang dibentuk berdasarkan matriks transaksi.

Jika matriks **I – A** nonsingular, yakni jika $|I - A| \neq 0$, maka ia akan mempunyai balikan. Dalam hal ini **U = (I – A)X** dapat ditulis menjadi :

$$X_{m\times 1} = (I - A)^{-1}_{m\times m} U_{m\times 1}$$

Ini berarti bahwa jika matriks A dan vektor U diketahui, maka vektor X dapat dicari secara langsung menuruti kaidah perkalian matriks. Dengan kata lain jika masing-masing koefissien masukan antar sektor dan permintaan akhir untuk setiap sektor diketahui datanya, maka dapatlah dihitung keluaran total dari masing-masing sektor. Lebih lanjut, dengan dapat dihitungnya keluaran total sektoral akan dapat pula dihitung keluaran total nasional (GDP atau GNP). Disinilah letak aarti pentingnya analisis masukan-keluaran. Satu hal yang penting diperhatikan dalam analisis masukan dan keluaran disini adalah bahwa koefisien masukan dianggap senantiasa konstan. Jadi model masukan-keluaran yang disajikan disini merupakan analisis statis. Analisis masukan-keluaran dinamis tidak dimuat dalam buku ini.

Contoh

Untuk Contoh Negara Kertagama di atas, hitunglah keluaran total masing-masing sektor dan nilai tambahnya jika ditargetkan permintaan akhir terhadap sektor pertanian, industri dan jasa masing-masing 100,300 dan 200. susunlah matriks transaksi yang baru.

Sebagaimana diketahui, berdasarkan perhitungan dimuka matriks teknologinya adalah:

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} P & I & J \end{array} \\ \begin{array}{l} \textit{Pertanian} \\ \textit{Industri} \\ \textit{Jasa} \end{array} & \begin{vmatrix} 0,20 & 0,12 & 0,02 \\ 0,15 & 0,28 & 0,26 \\ 0,10 & 0,17 & 0,23 \end{vmatrix} \end{array} = A$$

Menurut rumus $X = (1 - A)^{-1}\,U$

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\text{-}0,20 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 1\text{-}0,28 & -0,29 \\ -0,10 & -0,17 & 1\text{-}0,23 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0,80 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 0,72 & -0,26 \\ -0,10 & -0,17 & 0,77 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{vmatrix}$$

Determinan **I – A** = (0,80)(0,72)(0,77) + (-0,12)(-0,26)(-0,10) + (-0,02)(-0,17)(-0,15) – (0,10)(0,72) (-0,02) – (0,15)(-0,12) (0,77) – (0,80)(-0,26)(-0,17)

= 0,38923

$$\mathbf{(I - A)}^{-1} = \frac{adj.(I - A)}{|I - A|}$$

$$\begin{matrix} 0,80 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 0,72 & -0,26 \\ -0,10 & -0,17 & 0,77 \end{matrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 0,5102 & 0,0958 & 0,0456 \\ 0,1415 & 0,6140 & 0,2110 \\ 0,0975 & 0,1480 & 0,5580 \end{vmatrix} :0,38923$$

$$\begin{vmatrix} 1,3108 & 0,2461 & 0,1171 \\ 0,3635 & 1,5775 & 0,5421 \\ 0,2505 & 0,3802 & 1,4336 \end{vmatrix}$$

Dengan demikian

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,3108 & 0,2461 & 0,1771 \\ 0,3635 & 1,5775 & 0,5421 \\ 0,2505 & 0,3802 & 1,4336 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 100 \\ 300 \\ 200 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 228,33 \\ 618,02 \\ 425,83 \end{vmatrix}$$

Jadi keluaran total masing-msing sektor akan menjadi

Pertanian	= 228,33
Industri	= 618,02
Jasa	= 425,83

Sedangkan nilai tambah sektor

Pertanian	= 0,55 x 228,33	= 125,58
Industri	= 0,43 x 618,02	= 265,06
Jasa	= 0,49 x 425,83	= 208,66

Matriks transaksi yang baru

	Pertanian	**Industri**	**Jasa**	**Permintaan Akhir**	**Keluaran Total**
Pertanian	45,67	74,16	8,51	100	228,33
Industri	34,25	173,05	110,72	300	618,02
Jasa	22,83	105,75	97,94	200	425,83
Nilai tambah	125,58	265,06	208,66		
Keluaran total	228,33	618,02	425,83		

Dalam hal ini empat kotak masih kosong; jika salah satu diketahui unsurnya, maka unsur-unsur kotak kosong lainnya akan dapat dihitung.

Latihan Soal-Soal

1. Hubungan masukan-keluaran antar sektor dalam perekonomian sebuah negara diketahui seperti ditunjukkan oleh tabel transaksi dibawah ini.

	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan Akhir	Keluaran Total
Pertanian	11	19	11	10	41
Industri	5	89	40	106	240
Jasa	5	37	37	106	195
Nilai tambah	20	95	107	21	243
Keluaran total	41	240	195	243	659

   a. Hitunglah masing-masing koefisien masukannya
   b. Jika permintaan akhir terhadap sektor pertanian, sektor industri dan sektor jasa diharapkan masing-masing berubah jadi 25, 201, dan 45, berapa keluaran total yang baru bagi masing-masing sektor tersebut ?
   c. Hitunglah nilai tambah yang baru bagi masing-masing sektor.

2. Untuk data serupa dengan soal diatas, hitunglah kkeluaran total per sektor bila permintaan akhir berubah menjadi 30 untuk sektor pertanian, 150 (industri) dan 125 (jasa).

3. Andaikan hubungan masukan-keluaran antar sektor dalam suatu perekonomian ditunjukkan oleh tabel sebagai berikut :

	Sektor A	*Sektor B*	*Sektor C*	*Permintaan akhir*
Sektor A	80	100	100	40
Sektor B	80	200	60	60
Sektor C	80	100	100	20

a. Hitunglah masing-masing koefisien masukannya.
b. Berapa keluaran total per sektor bila permintaan akhir terhadap setiap sektor diharapkan merata menjadi sama-sama 60 ?
c. Hitung juga perubahan nilai tambah setiap sektor.

4. Berkenaan data soal no. 3, bila permintaan akhir berubah menjadi 120 (sektor A) dan 40 (sektor B) serta 10 (sektor C), berapa kenaikan atau penurunan keluaran total masing-masing sektor ?

5. Suatu perekonomian dari dua industri yang saling berhubungan dinyatakan dalam tabel berikut:

Produsen	Pemakaian		Pemakaian Akhir
	A	B	
A	140	260	200
B	240	100	140

Tentukan:
a. Matriks teknologinya
b. Berapa nilai outputnya bilapermintaan akhir berubah menjadi 260 untuk A dan 120 untuk B
c. Nilai tambah, dan matriks transaksi yang baru.

BAB V

TEORI PERMAINAN *(GAME THEORY)*

Teori Permainan (Game Theory) adalah suatu pendekatan matematis untuk merumuskan terjalinnya suatu situasi pertarungan dan konflik antara berbagai kepentingan dari berbagai pihak. Khususnya di dunia ekonomi dan bisnis (ekbis) yang dalam praktik kesehariannya penuh dengan nuansa persaingan atau kompetisi.

Pengembangan teori ini dimaksudkan untuk menganalisa proses pengambilan keputusan dari situasi-situasi persaingan yang berbeda-beda dan melibatkan dua atau lebih kepentingan dari dua atau lebih pelaku yang terlibat di dalamnya.

Misalnya:

- para manajer pemasaran bersaing dalam memperebutkan bagian pasar.
- para jendral militer yang ditugaskan dalam perencanaan dan pelaksanaan perang.
- para pemain catur.

Adapun beberapa asumsi yang dipakai dalam teori ini antara lain adalah:

- terdapat dua orang atau dua pihak atau lebih dengan tujuan yang berbeda.
- tindakan dan keputusan yang diambil oleh masing-masing pihak akan berpengaruh terhadap pihak lain namun tidak menentukan hasil permainan.
- setiap pihak dianggap telah memahami tujuan-tujuan yang hendak dicapai lawannya.

Kesemuanya ini terlibat dalam usaha untuk memenangkan ‘permainan’ atau persaingan tersebut. Kepentingan-kepentingan yang bersaing dalam permainan disebut: players/para pemain. Model-model teori permainan (diklasifikasikan) berdasarkan:

- jumlah pemain
- jumlah keuntungan dan kerugian
- jumlah strategi

Contoh:

Jika jumlah pemain = 2, disebut permainan 2 pemain.

jumlah pemain N ($N \geq 3$), disebut permainan N pemain

jika jumlah keuntungan dan kerugian adalah nol maka disebut permainan jumlah nol (jumlah konstan).

Yang akan kita bahas dalam bab ini adalah "permainan dua pemain jumlah nol" sebagai dasar pemahaman teori permainan lebih lanjut.

A. Unsur-unsur dasar teori permainan.

Unsur atau elemen dasar memegang peran yang sangat penting dalam penyelesaian setiap kasus dengan menggunakan dasar teori permainan untuk menemukan solusinya. Untuk lebih jelasnya dapat kita lihat dengan contoh permainan "dua pemain nol" (*2-person zero-zum game*), di mana matriks *pay off* sebagai tabel di bawah ini:

Matriks Permainan Dua-Pemain Jumlah-Nol.

Matriks Pay Off	Pemain B B_1 B_2 B_3		
A_1	6	9	2
Pemain A			
A_2	8	5	4

Dengan melihat tabel di atas akan terlihat unsur-unsur dasar teori permainan sebagai berikut:

1. Angka-angka dalam matriks *pay off* / matriks permainan menunjukkan hasil-hasil / *pay off* dari strategi permainan yang berbeda-beda. Hasilnya berupa bentuk ukuran efektivitas seperti prosentase market share, uang atau kegunaan.

Dalam permainan dua pemain jumlah nol:

- bilangan-bilangan positif menunjukkan keuntungan bagi pemain baris (*maximizing player*).
- sebaliknya bilangan-bilangan positif merupakan kerugian bagi pemain kolom (*minimizing player*).

Contoh:

Bila pemain A mempergunakan strategi A1 dan pemain B memiliki strategi B2 maka hasilnya sebagai berikut:

1. Pemain A memperoleh keuntungan 9 dan pemain B mengalami kerugian 9 (Asumsi: bahwa matriks pay off diketahui oleh kedua pemain)
2. Suatu strategi permainan adalah rangkaian kegiatan / rencana yang menyeluruh dari seorang pemain. Sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pemain pesaingnya. Dengan asumsi strategi tidak dapat dirusak oleh pesaing atau faktor lain. Dari tabel di atas terlihat:
   - pemain A punya 2 strategi yaitu A1 dan A2
   - pemain B punya 3 strategi yaitu B1, B2 dan B3.
3. Aturan-aturan permainan menunjukkan kerangka dalam mana para pemain memilih strategi mereka.

   Contoh: dipergunakan anggapan bahwa para pemain harus memilih strategi-strategi mereka secara simultan dan permainan berlangsung berulang.

4. Nilai permainan adalah hasil yang diperkirakan perpay off (permainan) rata-rata selama rangkaian permainan, di mana masing-masing pemain mempergunakan strategi mereka yang paling baik atau optimal.

   Suatu permainan dikatakan:

   - adil (*fair*) bila nilainya nol, di mana tidak ada pemain yang menang (untung).
   - tidak adil (*unfair*) bila nilainya tidak nol.

   Contoh: Dari tabel di atas nilai permainannya = 4 jadi disebut unfair.

5. Suatu strategi dikatakan dominan bila setiap pay off dalam strategi adalah superior terhadap setiap pay off yang berhubungan dalam suatu strategi alternatif.

   Contoh: untuk pemain B strategi B1 dan B2 didominasi oleh B3 sehingga usaha pemecahan permainan kolom-kolom B1 dan B2 dapat dihilangkan dari matriks pay off. Sehingga dalam pemecahan permainan B memilih B3 dan pemain A memilih A2, berarti nilai-nilai permainan = 4.

6. Suatu strategi optimal adalah rangkaian kegiatan / rencana menyeluruh yang menyebabkan seorang pemain dalam posisi yang paling menguntungkan tanpa memperhatikan kegiatan para pesaing. Posisi optimal yang paling menguntungkan bahwa adanya deviasi dari strategi optimal.

7. Tujuan dari model permainan adalah mengidentifikasikan strategi / rencana optimal setiap permainan.

   Contoh: dalam tabel terlihat bahwa, strategi optimal untuk Pemain A adalah A2 dan pemain B adalah B3

B. Permainan Dua Pemain Jumlah Nol.

Model permainan ini merupakan model konflik yang paling banyak digunakan dalam ekonomi dan bisnis. Permainan ini dimainkan oleh dua pemain atau dua kelompok secara langsung punya kepentingan yang berhadapan.

Model ini dibagi lagi menjadi dua tipe:

1. Permainan Strategi Murni (*Pure-Strategy Game*)

Dalam permainan strategi murni setiap pemain mempergunakan strategi tunggal di mana:

- Pemain baris (maximizing player) mengidentifikasi strategi optimalnya dengan menggunakan kriteria maksimum yaitu kriteria yang mencari nilai maksimum di antara nilai-nilai minimum yang dipilih dari setiap baris.
- Pemain kolom (minimizing player) mengidentifikasikan strategi optimalnya dengan menggunakan kriteria minimaks yaitu kriteria yang mencari nilai minimum di antara nilai-nilai maksimum yang dipilih dari setiap kolom.

Contoh:

Perusahaan A dan B sedang dalam proses penentuan strategi periklanannya. Di dalam perusahaan A mempunyai 2 strategi dan perusahaan B mempunyai 3 strategi.

Strategi-strategi tersebut dan pay off-nya disusun dalam bentuk permainan dua pemain jumlah nol sebagai berikut:

Matriks Pay Off	Perusahaan B B1	B2	B3	Minimum Baris	
A1	1	9	2	1	
Perusahaan A					maksimin
A2	8	5	$\boxed{4}$	4 ←	
maksimum kolom	8	9	4 ↑		
	minimaks				

Dengan melihat tabel di atas maka:

Pemain baris (perusahaan A):

- Bila A memilih A1, maka B akan memilih B1 dan pay off perusahaan A adalah 1.
- Bila A memilih A2, maka B akan memilih B3 dan pay off perusahaan B adalah 4.

Sehingga perusahaan A akan dalam posisi yang paling menguntungkan bila memakai strategi tunggal A2.

Pemain kolom (perusahaan B):

Terlihat bahwa strategi B3 mendominasi strategi B2 dengan demikian perusahaan B tidak akan memilih strategi B2 maka menurut aturan dominan strategi B2 dihilangkan.

Sehingga perusahaan B tinggal dua pilihan strategi yaitu B1 dan B3.

- Bila B memilih B1, maka A akan memilih A2 dan B akan mengalami kerugian 8.
- Bila B memilih B3, maka A akan tetap memilih A2 dan B hanya mengalami kerugian 4.

Dengan demikian maka perusahaan B akan dalam posisi yang paling menguntungkan bila pakai strategi tunggal B3.

Permainan dua pemain jumlah nol dalam tabel di atas adalah permainan strategi murni di mana titik pelananya (saddle point) bernilai 4.

2. Permainan Strategi Campuran (*Mixed-strategy Game*)

Dalam permainan strategi campuran ini kedua pemain memakai campuran dari beberapa strategi yang berbeda-beda.

Dalam permainan ini tidak ditemukan nilai permainan / titik pelana (*saddle pointnya*). Maka permainan harus diselesaikan dengan menerapkan *metode aljabar matriks* yaitu metode untuk menyelesaikan suatu permainan yang mempunyai matrik bujur sangkar (dan memang harus berupa matriks bujur sangkar, ingat!).

Bentuk matriks dengan metode aljabar matriks:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B1 & B2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A1 \\ A2 \end{array} & \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} Pij \end{bmatrix}$$

Strategi-strategi optimal untuk pemain A dan pemain B dengan nilai permainannya dapat dicari dengan perumusan berikut ini:

$$\text{Strategi Optimal Pemain A} = \frac{[1\ \ 1]\quad[P\ \ adj]}{[1\ \ 1]\quad[P\ \ adj]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\text{Strategi Optimal Pemain B} = \frac{[1\ \ 1]\quad[P\ \ cof]}{[1\ \ 1]\quad[P\ \ adj]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Nilai Permainan = [strategi optimal A] |Pij| [strategi optimal B]

$$= \frac{|Pij|}{[1 \;\; 1] \quad [P \;\; adj] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Di mana : P adj = Adjoin matriks.

P cof = Kofaktor matriks.

[Pij] = Matriks permainan

|Pij| = Determinan matriks permainan

Contoh:

Perusahaan A dan perusahaan B sedang dalam proses penentuan harga. Setiap perusahaan mempunyai 3 strategi yaitu harga rendah, menengah, dan tinggi.

Matriks Pay Off	Perusahaan B B1	B2	B3	Minimum Baris	
Perusahaan A A1	2	5	7	-2 ←	maksimin
A2	-1	2	4	-1	
A3	6	1	9	1	
Maksimum Kolom	8	9 ↑ minimaks	4		

- Terlihat bahwa nilai maksimin ≠ nilai minimaks sehingga tidak dapat ditemukan titik pelana (saddle point).
- Terapkan aturan dominan:
  - Strategi B3 didominasi oleh B2, sehingga kolom B3 dapat dihilangkan.
  - Strategi A2 didominasi oleh strategi A1, sehingga strategi A2 dihilangkan.

Matriks permainan berubah menjadi permainan 2 x 2 sebagai berikut:

jumlah nol sebagai berikut:

Matriks Pay Off	Perusahaan B B1	 B2	Minimum Baris	
Perusahaan A A1	2	5	2 ←	maksimin
A2	6	1	1	
maksimum kolom	6	5 ↑ minimaks		

Terlihat bahwa tidak ada titik pelana (*saddle point*) atau nilai maksimin ≠ nilai minimaks:

$$\text{Pij} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{P cof} \quad \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Pij disilangkan unsur-unsurnya di mana untuk a12 dan a21 diberi tanda (-).

$$\text{P adj} \quad \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\text{Strategi Optimal Pemain A} = \frac{[1\ \ 1]\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}}{[1\ \ 1]\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{[-5\ \ -3]}{-8}$$

Strategi optimal untuk A adalah A1 = 5/8 dan A2 = 3/8

$$\text{Strategi Optimal Pemain B} = \frac{[1\ \ 1]\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}}{[1\ \ 1]\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{[-4 \;\; -4]}{-8}$$

Strategi optimal untuk B adalah: B1 = 4/8 dan B2 = 4/8

$$\text{Strategi Optimal Pemain A } = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{[1 \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{-28}{-3} = 3{,}5$$

Kedua perusahaan masing-masing dapat menggunakan dua strategi

- Bila perusahaan A pilih strategi A1 maka perusahaan B akan pilih strategi B1.
- Bila perusahaan A pilih strategi A2 maak perusahaan B akan pilih strategi B2.
- Masing-masing perusahaan dapat menggunakan kedua strateginya secara bersama-sama.

Nilai permainan atau keuntungan dan kerugian dari permainan ini adalah sama yaitu 3,5.

Soal-Soal Latihan:

1. Gunakan kriteria minimaks untuk mencari strategi setiap pemain dengan matriks permainan sebagai berikut:

   a.

8	10	13	16	9
10	12	6	15	10
16	18	9	13	25
4	9	18	20	6

b.

5	8	7
-1	-3	10
2	12	-6

c.

15	-20	-12	3
4	2	-10	-6
20	-18	-15	-8
-12	8	-10	6
10	9	-11	4

2. Carilah strategi optimal bagi setiap pemain dari matriks permainan berikut dengan menggunakan kriteria minimaks dan tentukanlah nilai setiap permainan:

a.

5	4	-2	1
7	-6	3	6
12	8	10	9
6	18	-9	14

b.

4	6
9	5
3	1
7	8
10	2

c.

12	-10	8	-6	7	-11
18	2	-3	-4	8	10
5	-3	14	0	-10	-12
3	12	16	1	8	2
-15	16	12	-2	9	-9

3. Perusahaan A dan perusahaan B sedang dalam proses penentuan harga. Setiap perusahaan masing-masing mempunyai tiga strategi harga yaitu

harga rendah, harga menengah, dan harga tinggi yang tampak dalam bentuk matriks permainan di bawah ini:

	B1	B2	B3
A1	2	5	7
A2	-1	2	4
A3	6	1	9

Dari data tersebut tentukanlah:

a. Strategi optimal dari masing-masing perusahaan dalam matriks “pay off” tersebut!

b. Nilai permainannya!

4. Sebuah perusahaan kontraktor ingin membangun sejumlah besar rumah untuk pengembangan perumahan. Ada empat tipe rumah yang akan dibangun yaitu: Corsica, Babylonia, Napoli, dan Cassablanca. Panitia pengembangan akan memilih dua di antara tipe yang akan dibangun oleh perusahaan kontraktor. Bila panitia memilih tipe Corsica dan Babylonia, kontraktor akan mendapat laba ekstra 125, 120, 60 dan 50 (dalam ribuan rupiah) jika ia membangun tipe Corsica, Babylonia, Napoli, dan Cassablanca. Bila panitia memilih tipe Corsica dan Napoli, kontraktor akan mendapat laba masing-masing 90, 40, 80 dan 75. Bila tipe Corsica dan Cassablanca yang dipilih maka kontraktor akan mendapat laba 150, 30, 75 dan 100. Jika panitia memilih tipe Babylonia dan Napoli, akan diperoleh laba 90,80,80 dan 120. Jika panitia memilih tipe Napoli dan Cassablanca akan diperoleh laba 80, 40, 130 dan 80. Bagaimana cara kontraktor memesan agar memaksimasasi keuntungan / laba minimum ekstra yang diharapkan?

5. Manajer sebuah pabrik kimia “Pasti Kebul”, harus membangun reaktor untuk menghasilkan polietena dengan menggunakan proses 1, 2, 3 dan 4. Namun bahan baku kimia bervariasi dalam kadar nitrogen yaitu 3, 4, 5 atau 6%. Kadar nitrogen mempengaruhi efisiensi relatif dari lima proses.
   - Dengan kadar 3% nitrogen, kelima proses mempunyai output 50, 45, 60, 50 dan 30 ton.
   - Dengan kadar nitrogen 4%, output berturut-turut 60, 70, 75, 90 dan 60 ton.
   - Dengan kadar 5% nitrogen output adalah 30, 55, 60, 45 dan 70 ton.
   - Dengan kadar 6% nitrogen, output adalah 45, 80, 80, 65 dan 85 ton.

   Proses manakah yang harus digunakan manajer pabrik kimia untuk memaksimasi output minimum yang diharapkan?

6. Seorang konglomerat muda bernama Tuan Doelkamdi harus memutuskan untuk memilih tiga jenis saham dalam menginvestasikan uangnya yang berlebih. Hasil dari pembeliannya itu tergantung pada apakah suatu perusahan khusus melakukan merger, menanggalkan diri sebagai subsider atau mempertahankan status quo (keadaannya saat ini). Dalam kasus merger, saham A menghasilkan 20, saham B rugi 25 dan saham C menghasilkan 12. Dalam kasus menanggalkan diri sebagai subsier, saham A rugi 20, saham B rugi 15 dan saham C rugi 13. Sidang dalam kasus status quo, saham A menghasilkan 50, saham B menghasilkan 30 dan saham C rugi 5 (semuanya dalam ribuan rupiah). Tentukanlah saham yang akan dipilih sang konglomerat muda apabila:
   a. Ingin maksimalkan hasil minimum yang diharapkan
   b. Ingin meminimumkan kerugian yang mungkin diderita

7. Seorang mahasiswa fakultas ekonomi universitas “Pokoke Joss” tengah mempertimbangkan bagaimana ia harus belajar untuk menghadapi ujian akhir Matematika Ekonomi yang harus ditempuhnya. Ia belajar untuk tipe soal benar salah, pilihan ganda dan tes uraian, dan ia mengetahui tipe ujian mana yang akan keluar nantinya. Mahasiswa itu berpikir, jika ia belajar untuk benar salah, ia akan mencapai nilai 85, nilai 80 untuk tipe pilihan ganda dan nilai 75 untuk tipe tes uraian. Jika ia belajar untuk tipe pilihan ganda, ia mengharapkan nilai 85 untuk tipe benar salah, nilai 90 untuk pilihan ganda dan nilai 85 untuk tes uraian. Sedangkan bila ia belajar untuk tes uraian, ia berharap nilai 80 untuk tipe benar salah, nilai 90 untuk pilihan ganda dan untuk tes uraian. Agar ia dapat memaksimalkan nilai minimum yang diharapkannya, tipe tes manakah yang harus ia pilih untuk dipelajari?

8. Dua orang petani muda menghadapi pilihan untuk menanam tanaman pada lahan yang tersedia, dan mereka hanya bisa memilih tiga macam tanaman untuk ditanam dalam setahunnya yakni: gondo rukem, kesemek dan pace. Jika si A menanam gondo rukem akan mendapat laba Rp 10.000; hanya apabila si B menanam gondo rukem, laba sebesar Rp 15.000; jika si B menanam kesemek dan Rp 20.000; jika si B menanam pace. Sebaliknya si A menanam kesemek ia akan memperoleh laba Rp 18.000; Rp 12.000; Rp 20.000; hanya jika si B menanam gondo rukem, kesemek dan pace berturut-turut. Tentukan tanaman yang harus ditanam si A untuk memaksimalkan laba minimum yang diharapkan!

9. Si Gudel harus mempertimbangkan persoalan batu bara untuk musim dingin. Selama musim dingin normal diperlukan 15 ton batu bara, dengan perkiraan minimal 10 ton atau maksimal 20 ton. Harga batu bara

berfluktuasi antara seribu, dua ribu dan tiga ribu selama musim dingin ringan, normal dan sangat dingin. Saat ini ia dapat membeli batu bara seharga seribu per ton, dan ia mempertimbangkan 3 alternatif; membeli 10, 15 atau 20 ton sekarang dan sisanya kemudian. Apabila ternyata tidak semua batu bara digunakan, apa yang harus dilakukan untuk meminimumkan kerugian maksimum yang mungkin terjadi?

10. Perusahaan Roti “Kunchov” menggantungkan kelezatan rotinya pada mentega. Apabila ia menggunakan mentega super biayanya Rp 5.000,- bila memakai mentega biasa biayanya Rp 4.000 dan harus membayar biaya Rp 3.000,- jika menteganya kurang enak. Bila ia memakai mentega biasa ada resiko kerugian karena tidak laku sebesar separuh dari harga mentega tersebut. Sedangkan bila memakai mentega tidak enak resiko kerugiannya bertambah sebesar Rp 3.500. Apakah yang harus diputuskan untuk meminimumkan biaya maksimum yang harus dikeluarkan?

BAB VI
PROGRAMASI LINEAR

Program linear (ada yang menggunakan istilah programasi linear), yang dalam bahasa asingnya adalah *Linear Programming* pada prinsipnya merupakan salah satu teknik analisis dari kelompok teknik riset operasi yang memakai prinsip-prinsip dan model matematika dalam menyelesaikan berbagai permasalahan.

Tujuannya adalah untuk **mencari, memilih dan menentukan** alternatif yang terbaik dari antara sekian alternatif layak yang tersedia. Atau dengan kata lain dapat dikemukakan bahwa : *Linear Programming* merupakan suatu model umum yang dapat digunakan dalam pemecahan masalah pengalokasian sumber-sumber terbatas secara optimal dengan mempergunakan prinsip-prinsip dan model matematis.

Agar suatu masalah optimal dapat diselesaikan dengan programasi linear maka harus memenuhi persyaratan atau asumsi sebagai berikut:

1. Permasalahan ekonomi dan bisnis tersebut harus diubah menjadi permasalahan matematik (model matematis).
2. Harus dapat ditentukan satuan-satuan aktivitas dari keseluruhan sistem permasalahan.
3. Setiap aktivitas harus dapat ditentukan dengan jenis dan letaknya serta dapat dikuantifisir dengan demikian dapat dibandingkan.

A. Optimasi Bersyarat (Maksimasi dan Minimasi)

Metode programasi linear dapat dikelompokkan berdasarkan jenis fungsi tujuan yang hendak diselesaikan atau dituju. Berdasarkan hal ini paling tidak kita jumpai ada dua macam model programasi linear, yaitu yang memiliki fungsi tujuan maksimum (memaksimumkan fungsi objektif) dan yang memiliki fungsi tujuan minimum (meminimumkan fungsi objektif).

a. Maksimasi

Maksimumkan fungsi objektif:

$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n.$

Terhadap konstrain / kendala:

$a_{11} X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n \leq b_1$

$a_{21} X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n \leq b_2$

. . . .

. . . .

. . . .

$a_{m1} X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n \leq b_m$

di mana: $X_j \geq 0, j = 1,2,...n$, dengan kata lain dikatakan bahwa:

Maksimumkan: $Z = \sum_{j=1} C_jX_j$

Terhadap: $\Sigma a_{ij}X_j \leq b_i$, untuk i = 1,2,...m

$X_j \leq 0$, untuk i = 1,2,...n

Di mana penulisannya dalam notasi matriks sebagai berikut:

Maksimumkan: Z = CX

Terhadap: $AX \leq B$, $X \geq 0$ di mana:

C = [C1, C2, ... Cn]

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{2n} \\ . \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

b. Minimasi

Maksimumkan fungsi objektif:

$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n.$

Terhadap konstrain / kendala:

$a_{11}\ X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n \leq b_1$

$a_{21}\ X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n \leq b_2$

. . . .

. . . .

. . . .

$a_{m1}\ X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n \leq b_m$

di mana: $Xj \geq 0, j = 1,2,...n$, dengan kata lain dikatakan bahwa:

Maksimumkan: $Z = \sum_{j=1} C_jX_j$

Terhadap: $\Sigma\ a_{ij}X_j \leq b_i$, untuk $i = 1,2,...m$

$X_j \leq 0$, untuk $i = 1,2,...n$

Di mana penulisannya dalam notasi matriks sebagai berikut:

Minimumkan: $Z = CX$

Terhadap: $AX \leq B$, $X \geq 0$ di mana:

$C = [C1, C2, ... Cn]$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

B. Metode Penyelesaian

Setelah kita dapat menentukan suatu model programasi linear dari permasalahan yang kita hadapi, selanjutnya kita perlu memahami langkah-langkah yang diperlukan untuk menyelesaikan model tersebut untuk mencari alternatif solusi yang terbaik sesuai dengan tuntutan model dari permasalahan yang kita hadapi.

Di dalam menyelesaikan suatu permasalahan ekonomi dan bisnis dengan programasi linear ada dua metode yang dapat digunakan yaitu:

1. Metode Grafik

Penyelesaian programasi linear dengan metode grafik mempunyai langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut:

- Tentukan fungsi tujuan, kemudian formulasikan ke dalam model matematik.
- Identifikasikan batasan-batasan / kendala yang berlaku, kemudian formulasikan ke dalam model matematik.

- Gambarkan masing-masing garis fungsi batasan / kendala dalam satu sistem sumbu salib.
- Tentukan / hitung titik yang paling menguntungkan (optimal) dihubungkan dengan fungsi tujuan.

Kemudian, yang penting dalam metode grafik ini, fungsi-fungsi kendala / konstrain yang berbentuk pertidaksamaan harus diubah menjadi bentuk persamaan dengan cara mengganti pertidaksamaan menjadi bentuk persamaan sebagai berikut:

- Tanda ≥ menjadi =
- Tanda ≤ menjadi =

Contoh:

Perusahaan A memproduksi 2 macam barang yaitu: sepeda dan sepeda motor. Untuk memproduksi kedua barang tersebut perusahaan A memiliki 2 mesin masing-masing:

- Mesin I dengan jam kerja maksimum 120 jam
- Mesin II dengan jam kerja maksimum 180 jam

Untuk memproduksi sepeda mula-mula dikerjakan di mesin I selama 6 jam dan 3 jam di mesin II. Untuk sepeda motor di mesin I selama 4 jam dan 10 jam di mesin II. Jika sumbangan terhadap laba sebesar Rp. 45 untuk produk sepeda dan Rp. 55 untuk sepeda motor. Tentukan berapa sebaiknya / seharusnya sepeda maupun sepeda motor yang hrus diproduksi perusahaan A supaya mencapai laba maksimum.

Jawab:

Jika X1 = jumlah sepeda yang diproduksi.

X2 = jumlah sepeda motor yang diproduksi.

maka fungsi tujuan maksimumkan: $Z = 45X_1 + 55X_2$

terhadap kendala: $6X_1 + 4X_2 \leq 120$

$3X_1 + 10X_2 \leq 180$

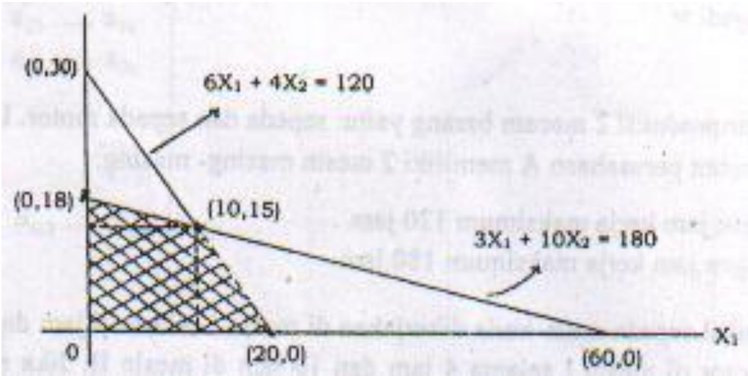
sehingga persamaan kendala / konstrain menjadi:

$$6X_1 + 4X_2 = 120$$
$$3X_1 + 10X_2 = 180$$
$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 0$$

Solusi: $Z = 45X_1 + 55X_2$	
(0,18)	Rp. 990
(10,15)	Rp. 1.275
(20, 0)	Rp. 900

Dari tabel solusi di atas bila perusahaan A mau mendapatkan laba yang maksimum (Rp. 1.275,-) maka harus memproduksi sepeda (X) sebanyak 10 unit dan sepeda motor (Y) sebanyak 15 unit.

Titik koordinat (X,Y) dapat dihitung dengan menggunakan cara eliminasi atau substitusi yang telah dibahas pada Bab II tentang Fungsi linear dalam buku ini.



2. Metode Simplek

Tujuan:

a. Mencari, memilih dan menentukan alternatif yang terbaik dari antara sekian alternatif layak yang tersedia.

b. Model umum yang dapat digunakan dalam pemecahan masalah pengalokasian sumber-sumber terbatas secara optimal dengan pendekatan matematik.

Persoalan program linear dapat kita selesaikan sebagai berikut:

Maksimumkan (fungsi tujuan) $Z = C_1X_1 + C_2X_1 + ... + C_nX_n$

Dengan fungsi kendala:

$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... a_{1n}X_n + X_{n+1} = b_1$

$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... a_{2n}X_n + X_{n+2} = b_2$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... a_{mn}X_n + X_{n+m} = b_m$

di mana: $Xj \geq 0, j = 1,2,3,...n+m$,

Bentuk umum tabel matriks sebagai berikut:

C_j			C_1	C_2 ……	C_n	0	0 ………	0
	Alokasi Variabel	Kuantitas	X_1	X_2………	X_n	X_{n+1}	X_{n+2} ……	X_{n+m}
0	X_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12} ……..	a_{1n}	1	0	0
0	X_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22} ……..	a_{2n}	0	1	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	X_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	0	0	1
			Matriks Utama A_{mxn}			Matriks Identitas I_{mxn}		
	Z_j		.	.	.	.	.	.
	$C_j - Z_j$		.	.	.	.	.	.

Dimana:

Z_j = baris yang berisi jumlah hasil kali angka-angka pada baris di atasnya.

C_j = baris yang berisi koefisien dari masing-masing variabel dalam fungsi objektif atau tujuan yaitu: $C_1, C_2,...C_n$..

$C_j - Z_j$ = baris yang hasil pengurangan antara angka-angka pada baris C_j dengan angka-angka pada baris Z_j.

Supaya suatu masalah optimal dapat diselesaikan dengan metode simpleks, harus memenuhi / mengikuti langkah-langkah berikut:

1. Rumuskan fungsi objektif dan kendala-kendalanya.

2. Ubah bentuk pertidaksamaan fungsi kendala menjadi bentuk persamaan dengan memasukkan variabel semu (*slack variable / surplus variable*).

   CATATAN: Pertidaksamaan dalam bentuk:

   - Tanda ≤ maka ruas kiri pertidaksamaan harus ditambah slack variabel (S).
   - Tanda ≥ maka ruas kiri pertidaksamaan harus dikurangi surplus variabel (-S).
3. Buat matriks yang berisi data-data dari fungsi objektif / tujuan dan konstanta termasuk data variabel semu.
4. Tentukan suatu penyelesaian yang feasible (laik) berdasarkan tabel simpleks tersebut.
5. Ujilah optimalisasi penyelesaian tersebut.
6. Jika jawabannya belum optimal, bentuklah tabel matriks baru untuk penyelesaian tahap berikut.
7. Tentukan suatu penyelesaian yang laik berdasarkan tabel simpleks baru.
8. Ujilah optimalisasi penyelesaian tersebut.
9. Ulangi prosedur langkah 5 s/d 7 hingga diperoleh penyelesaian yang optimal, yaitu jika angka-angka pada baris (C_j - Z_j) tidak ada yang bernilai positif>

Contoh:

Maksimumkan fungsi tujuan: $Z = 45X_1 + 55X_2$

dengan kendala: $6X_1 + 4X_2 \leq 120$

$3X_1 + 10X_2 \leq 180$

$X_1, X_2 \geq 0$

Selesaikan dengan menggunakan metode simpleks

Jawab:

Karena kendala dalam bentuk pertidaksamaan (≤) maka ruas kiri masing-masing kendala ditambahkan slack variabel sehingga kendalanya menjadi:

$6X_1 + 4X_2 + X_3 \leq 120$

$3X_1 + 10X_2 + X_3 \leq 180$

untuk $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

C_j	Alokasi Variabel	Kuantitas	Rp. 45 X_1	Rp. 55 X_2	Rp. 0 X_3	Rp. 0 X_4	R
0	X_3	120	6	4	1	0	30
0	X_4	180	3	10	0	1	18
0	X_2	18	3/10	1	0	1/10	
	Z_j	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_j$		45	55			

- Tentukan kolom kunci yaitu ($C_j - Z_j$) yang terbesar
- Tentukan baris kunci yaitu yang memiliki nilai ganti terendah

  Misalnya: baris X_3 = 120/ 4 = 30

  baris X_4 = 180/10 = 18
- Tentukan nomor kunci (perpotongan antara baris kunci dengan kolom kunci) yaitu 10
- Lakukan transformasi baris kunci dengan membagi semua angka dalam baris kunci dengan nomor kunci.

X_2	18	3/10	1	0	1/10

- Lakukan transformasi baris lainnya

(Angka – angka pada baris vang) – (Angka pada baris yang bersangkutan vang masuk dalam) x (Angka – angka pada baris baris)

Sehingga transformasi garis:

X_3	48	24/5	0	1	-2/5

Perhitungannya: 120 – (4 x 18) = 48

6 – (4 x 3/10) = 24/5

4 – (4 x 1) = 0

1 – (4 x 0) = 1

0 – (4 x 1/10) = - 2/5

Maka tabel baru setelah ditransformasikan sebagai berikut:

C_j	Alokasi Variabel	Kuantitas	Rp. 45 X_1	Rp. 55 X_2	Rp. 0 X_3	Rp. 0 X_4	R
0	X_3	48	24/5	0	1	-2/5	10
55	X_2	18	3/10	1	0	1/10	60
	Z_j	990	33/2	55	0	11/2	
	$C_j - Z_j$		57/2	0	0	-11/2	

Z1 = 55 x 18 = 990

Z2 = 55 x 3/10 = 33/2

Z3 = 55 x 1 = 55

Z4 = 55 x 0 = 0

Z5 = 55 x 1/10 = 11/2

$C_j – Z_j$ =

= 45 – 33/2 = 57/2

= 55 – 55 = 0

= 0 – 0 = 0

= 0 – 11/2 = -11/2

- Tentukan kolom kunci yaitu ($C_j – Z_j$) terbesar yaitu 57/2
- Tentukan baris kunci, tentukan nilai ganti terendah
- Tentukan nomor kunci : 24/5
- Lakukan transformasi baris kunci dengan membagi semua angka dalam baris kunci dengan nomor kunci.

X_1	10	1	0	5/24	-1/12

- Lakukan transformasi baris lainnya dengan perumusan berikut:

(Angka – angka pada baris yang) – (Angka pada baris yang bersangkutan yang masuk dalam) (Angka – angka pada baris baris)

Sehingga transformasi garis:

X_2	15	0	1	-1/16	1/8

18	– (3/10 x	10	) = 15
3/10	– (3/10 x	1	) = 0
1	– (3/10 x	5/25	) = -1/16
1/10	– (3/10 x	-1/2	) = 15/120 = 1/8

sehingga tabel baru menjadi:

C_j	Alokasi Variabel	Kuantitas	Rp. 45 X_1	Rp. 55 X_2	Rp. 0 X_3	Rp. 0 X_4
45	X_1	10	1	0	5/24	-1/12
55	X_2	15	0	1	-1/16	1/8
	Z_j	1275	45	55	95/16	25/8
	$C_j - Z_j$		0	0	-95/16	-25/8

Z1 = (45 x 10) + (55 x 15) = 1275

Z2 = (45 x 1) + (55 x 0) = 45

Z3 = (45 x 0) + (55 x 1) = 55

Z4 = (45 x 5/24) + (55 x 1/16) = 95/16

Z5 = (45 x-1/24) + (55 x 1/16) = 25/8

$C_j - Z_j$ = 45 – 45 = 0

= 55 – 55 = 0

Karena baris $C_j - Z_j$ sudah tidak ada yang bernilai positif maka penyelesaian dengan metode simpleks tersebut sudah optimal.

Soal-Soal Latihan:

1. Selesaikan program linear di bawah ini dengan metode grafis.
   a. min $Z = 20x_1 + 30x_2$

      dengan kendala : $3x_1 + 2x_2 \geq 60$
      $4x_1 + x_2 \geq 40$
      $2x_1 + 8x_2 \geq 60$
      $x_1, x_2 \geq 0$

   b. max $Z = 50x_1 + 30x_2$
      dengan kendala $3x_1 + 2x_2 \geq 60$
      $4x_1 + x_2 \geq 40$
      $2x_1 + 8x_2 \geq 60$
      $x_1, x_2 \geq 0$

2. PT. Pupuk Jaya memproduksi 2 jenis pupuk yang merupakan campuran yang disebut pupuk A dan pupuk B. Pupuk A terbuat dari campuran 5% nitrat, 5% fosfat, 10% potas, dan 80% tanah liat. Sedangkan pupuk B terbuat dari 5% nitrat, 10% fosfat, 5% potas, dan 80% tanah liat. Sebuah agen akan membeli seluruh pupuk yang diproduksi oleh PT Pupuk Jaya dengan harga Rp 71,5/ton untuk pupuk A dan Rp 69/ton untuk pupuk B. Persediaan bahan baku nitrat sebanyak 1100 ton dengan harga 200/ton, fosfat 1800 ton dengan harga Rp 80/ton, dan potas 2000 ton dengan harga Rp 160/ton. Sedangkan tanah liat tersedia dalam jumlah tak terbatas dengan harga Rp 10/ton. Biaya pencampuran bahan sebesar Rp 15/ton dan kapasitas penggunaan mesin tidak terbatas. Dari kasus di atas diminta:
   a. Rumuskan ke dalam bentuk programasi linear.
   b. Bila PT pupuk jaya ingin memaksimumkan laba maka selesaikan programasi linear di atas dan
   c. Bagaimana kesimpulan anda?

3. PT. “Roegi Meloeloe” memproduksi dua jenis barang (X dan Y). Masing-masing barang menggunakan tiga jenis bahan baku yakni A, B dan C. Untuk tiap unit barang X membutuhkan 3 unit A, 4 unit B dan 2 unit C, sedangkan untuk barang Y membutuhkan 3 unit A, 1 unit B, dan 8 unit C. Biaya total untuk memproduksi X dan Y adalah Rp. 2000,- dan Rp. 3000,- per unit. Penggunaan bahan baku untuk setiap hari sekurang-kurangnya 60 unit A, 40 unit B, dan 80 unit C. Berapa unit barang X dan Y sebaiknya diproduksi agar biaya total harian minimum?

4. Sebuah perusahan memproduksi dua jenis barang X dan Y masing-masing diproses melalui dua mesin. Setiap unit barang X diproses selama 5 menit di mesin I dan 10 menit di mesin II, sedangkan tiap unit barang Y diproses selama 8 menit di mesin I dan 8 menit di mesin II. Kapasitas maksimum pengoperasian mesin I 3 jam 20 menit dan mesin II 4 jam per hari. Sumbangan laba dari tiap unit barang X dan Y masing-masing Rp. 50,- dan Rp. 60,-. Berapa unit barang X dan Y yang harus diproduksi setiap hari jika perusahaan ingin mendapat laba maksimum?

5. Selesaikanlah persoalan di bawah ini dengan metode simpleks.
   Maksimumkan $Z = 5x_1 + 3x_2 + 14x_3$, dengan kendala:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \leq 0$$

6. Perusahaan meubel memproduksi 3 jenis kursi. Laba setiap kursi jenis A adalah Rp. 50,-; jenis B Rp. 70,-; jenis C Rp. 80,-. Masing-masing jenis kursi harus diproses melalui 3 tahapan yang membutuhkan waktu sebagai berikut:

	Tahap I (menit)	**Tahap II (menit)**	**Tahap III (menit)**
Kursi A	40	50	60
Kursi B	50	70	90
Kursi C	60	70	70
Waktu yang tersedia	800	1000	120

Untuk memaksimumkan laba maka tentukanlah jumlah masing-masing jenis kursi yang harus diproduksi dengan menggunakan metode simpleks.

7. Penerbitan Radar merencanakan memproduksi dua buku teks yaitu buku matematika dan buku ekonomi. Laba dari buku matematika adalah Rp. 20,- dan buku ekonomi adalah Rp. 30,-. Buku matematika membutuhkan 40 menit untuk mencetak dan 60 untuk menjilid. Buku ekonomi membutuhkan 50 menit untuk mencetak dan 30 menit untuk menjilid. Waktu yang tersedia untuk mencetak adalah 2000 menit dan untuk menjilid 2100 menit. Tentukan jumlah optimal masing-masing buku teks yang harus diproduksi oleh penerbitan Radar dan laba yang akan diperoleh dengan menggunakan metode yang dikuasai.

8. Pelajari tabel di bawah ini:

Makanan	**Vitamin**			**Biaya per gram ($)**
	A	**B**	**C**	
X	50 mg	20 mg	10 mg	0.10
Y	30 mg	10 mg	50 mg	0.15
Z	20 mg	30 mg	20 mg	0.12
Kebutuhan nimimum per hari	290 mg	200 mg	210 mg	

a. Rumuskan persoalan di atas.

b. Selesaikan persoalan ini dengan metode grafis dan metode simpleks

c. Apa kesimpulan anda?

9. Selesaikan persoalan ini dengan menggunakan metode grafis dan metode simpleks

Maksimumkan $Z = 5x_1 + 6x_2$ dengan kendala:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 120$$
$$4x_1 + 6x_2 \leq 260$$
$$x_1, \quad x_2, \quad \geq \quad 0$$

10. Di wilayah “ Hot Zone” ada 2 distributor yang mendistribusikan produk makanan kepada 4 toko pengecer di wilayah itu. Pada tabel di bawah ini memberikan informasi mengenai biaya angkut setiap angkutan per minggu, kebutuhan setiap toko pengecer per minggu dan jumlah angkutan maksimum per minggu.

	Toko Pengecer				Jumlah angkutan Maksimum per Minggu
	1	2	3	4	
Distributor A	$40	$30	$45	$25	100
Distributor B	$50	$35	$40	$20	150
Jumlah angkutan yang diminta tiap minggu	80	50	75	45	

Diminta:

a. Rumuskan persoalan ini dalam bentuk programasi linear.

b. Selesaikan persoalan ini dengan metode grafis dan metode simpleks

c. Bagaimana kombinasi angkutan yang optimal dari setiap distributor ke setiap toko pengecer agar biaya angkut minimum. Jelaskan!

11. PD " Cerah Bersinar " memproduksi kursi dan meja taman. Bahan baku yang diperlukan adalah kayu jati dan lem kayu. Satu unit kursi membutuhkan 4 meter kayu jati dan 200 gram lem kayu Satu unit meja hanya membutuhkan 50% lem kayu dari yang dibutuhkan untuk membuat satu unit kursi tetapi memerlukan kayu jati 2 kali dari kebutuhan untuk pembuatan satu unit kursi. Setiap minggu perusahaan hanya menyediakan 16.000 gram lem kayu dan 800 meter kayu jati. Jumlah kursi yang dibuat tidak lebih dari 60 unit. Profit margin untuk kursi dan meja masing-masing adalah 100 dan 40. Berapakah jumlah kursi dan meja yang harus dibuat setiap minggu agar pemilik perusahaan memperoleh laba maksimum?

DAFTAR PUSTAKA

Chiang Alpha, C., *Fundamental Methods of Mathematical Analysis*. Mc. Graw-Hill, New york,1967

Curtis, artur B. and Cooper, john H., Revised by william james Mc callion, *Mathematics of Acounting*, Prentice-Hall, Inc. 1967.

Draper, jean E and Klingman , Jean s., *Mathematicas Analysis, Buisnis and Economic Applications,* Harper & Row, New York, 1967.

Dumairy, *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi,* BPEE. Yogyakarta,1967.

Edward T. Dowling, ph. D., *Seri Buku Schaun : Teori dan Soal-soal matematika Untuk Ekonomi*, Penerbit Erlangga Jakrta, 1990.

Huang Davcid S, *Introduction to the Use Mathematicsin Economic Analysis*, John Wiley & Sons Inc., USA, 1964.

Johanes, H dan Handoko, Budiono, Sri, *Pengantar Matematika Untuk Ekonomi*, Pt Intermasa, Jakarta,1979.

M. Nasaban, Pengantar Matematika Untuk Ilmu Ekonomi dan Bisnis. Penerbit erlangga Jakarta, 1989.

Ostaszewski Adam, *Mathematics In Economic : Models and Methods*, Blackwell-Oxford UK, 1993.

Pius Izak Dumatubun, *Matematika Aplikasi Bisnis dan Ekonomi* Penerbit Andi Yogyakarta 1999.

Weber, Jean E, *Mathematical Analysis buisness and economic applications*, Harper & Row Publisher, New York, 1976.

Whipkey Kenneth L. and Whipkey, Mary Nell., The Power of Calculus, John Wiley & Sons Inc., USA,1975.