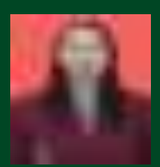
Buku **Matematika Ekonomi** ini disusun sebagai referensi komprehensif yang menguraikan penerapan konsep matematika dalam ilmu ekonomi. Diharapkan buku ini dapat membantu mahasiswa dalam memahami lebih baik penerapan ilmu matematika yang lebih mendalam di bidang ekonomi. Selain itu, Materi yang dibahas dalam buku ini disusun secara sistematis dan terbagi menjadi beberapa bagian utama yaitu: Pengantar dan dasar-dasar matematika; Fungsi dan penerapannya dalam ekonomi; Penerapan baris dan deret dalam ekonomi; Diferensial fungsi sederhana dan multivariable dalam ekonomi; Aljabar matriks dan penerapannya dalam ekonomi serta penerapan fungsi integral dalam analisis ekonomi. Setiap bab buku ini dilengkapi dengan Tujuan Instruksi Khusus (TIK) sebagai panduan pembelajaran, pendahuluan untuk memperkenalkan topik secara menyeluruh dan contoh soal yang disertai dengan langkah penyelesaian yang sistematis. Buku ini juga dilengkapi soal latihan di akhir setiap bab sebagai alat mengevaluasi kemampuan mahasiswa dalam memahami materi yang dijelaskan.

Andi Wijaya, S.E., M.M., adalah dosen tetap Fakultas Ekonomi dan Bisnis Universitas Tarumanagara, sejak tahun 1999. Penulis merupakan lulusan Program Studi S1 Manajemen dari Universitas Tarumanagara dan meraih gelar Magister Manajemen (S2) juga dari Universitas Tarumanagara. Penulis mengampu mata kuliah Kewirausahaan, Matematika Ekonomi dan Manajemen Operasional. Selain aktivitas pengajaran, penulis aktif dalam berbagai penelitian dan memiliki sejumlah publikasi ilmiah pada bidangnya.

Dra. Nur Hidayah, M.M. adalah dosen tetap Matematika Ekonomi di Fakultas Ekonomi dan Bisnis Universitas Tarumanagara sejak tahun 1992. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 Jurusan ilmu Ekonomi dan Studi Pembangunan di Fakultas Ekonomi Universitas Sebelas Maret, Surakarta pada tahun 1991 dan melanjutkan S2 pada program Magister Manajemen IPWI di Jakarta pada tahun 1997. Selain mengajar Matematika Ekonomi, juga mengajar Pengantar Ilmu Ekonomi dan Ekonomi manajerial serta melakukan kegiatan penelitian dan publikasi ilmiah.

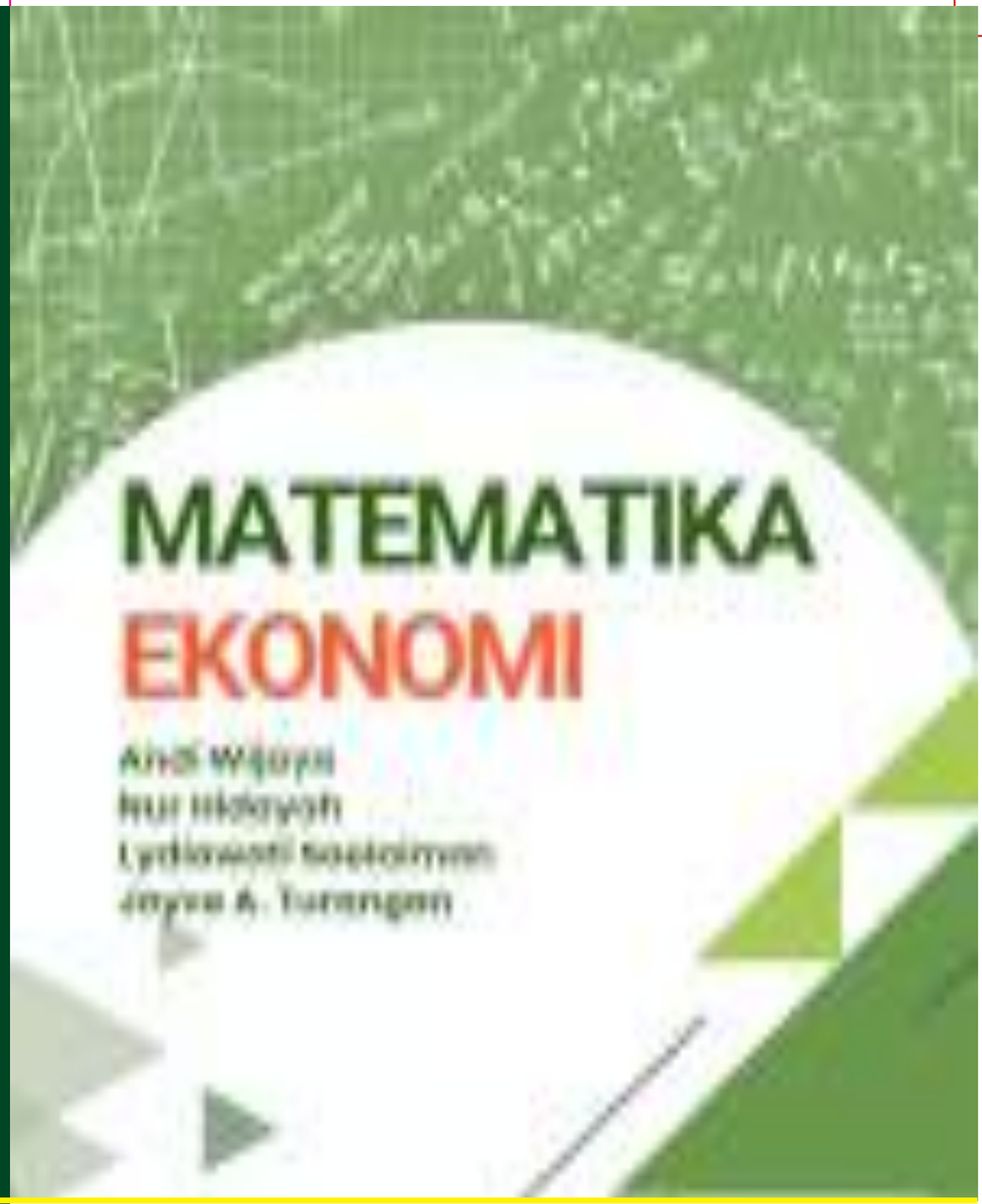
Dr. Lydiawati Soelaiman, S.T., M.M. adalah lulusan Program Studi Teknik Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Tarumanagara yang menyelesaikan gelar sarjana pada tahun 2001. Beliau kemudian menyelesaikan pendidikan di jenjang Magister Manajemen di Universitas Tarumanagara pada tahun 2004. Pada tahun 2024, beliau menyelesaikan gelar Doktoral di bidang Ilmu Manajemen di universitas yang sama. Saat ini beliau merupakan dosen tetap Program Studi Sarjana Manajemen, Fakultas Ekonomi dan Bisnis Universitas Tarumanagara-Jakarta. Beliau mengampu beberapa mata kuliah di antaranya Kewirausahaan, Matematika Ekonomi dan Manajemen Operasional. Selain mengajar, beliau juga aktif melakukan penelitian dan publikasi ilmiah terkait bidang manajemen.



Joyce A. Turangan, S.E., M.Pd., adalah dosen tetap Fakultas Ekonomi dan Bisnis Universitas Tarumanagara, sejak tahun 2001. Beliau merupakan lulusan Program Studi S1 Manajemen dari Universitas Tarumanagara dan meraih gelar Magister Pendidikan (S2) dari Universitas Pelita Harapan. Mengajar dengan fokus pada konsentrasi Manajemen Keuangan dan Manajemen Sumber Daya Manusia, termasuk mata kuliah Matematika Ekonomi. Selain aktivitas pengajaran, beliau aktif dalam berbagai penelitian dan memiliki sejumlah publikasi ilmiah di bidangnya.

MATEMATIKA EKONOMI

Andi Wijaya, S.E., M.M.
Dra. Nur Hidayah, M.M.
Dr. Lydiawati Soelaiman, S.T., M.M.
Joyce A. Turangan, S.E., M.Pd.



Mitra Wacana Media
Penerbit

Manajemen
ISBN: 978-602-318-592-4
9 786023 185924
Harga P. Jawa Rp 150.000

Mitra Wacana Media
Penerbit

Mitra Wacana Media
Penerbit

MATEMATIKA EKONOMI

Andi Wijaya, S.E., M.M.
Dra. Nur Hidayah, M.M.
Dr. Lydiawati Soelaiman, S.T., M.M.
Joyce A. Turangan, S.E., M.Pd.

Mitra Wacana Media
PENERBIT

Matematika Ekonomi

Andi Wijaya, S.E., M.M.
Dra. Nur Hidayah, M.M.
Dr. Lydiawati Soelaiman, S.T., M.M.
Joyce A. Turangan, S.E. M.Pd.

Edisi Asli
Hak Cipta © 2025 : Penulis
Diterbitkan : **Penerbit Mitra Wacana Media Bekerja Sama dengan Pelita Bangsa Pers**
Telp. : (021) 824-31931
Faks. : (021) 824-31931
Website : http//www.mitrawacanamedia.com
E-mail : mitrawacanamedia@gmail.com
Office : Vila Nusa Indah 3 Blok KE.2 No.14
Bojongkulur-Gunung Putri. Bogor

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apa pun, baik secara elektronik maupun mekanik, termasuk memfotokopi, merekam, atau dengan menggunakan sistem penyimpanan lainnya, tanpa izin tertulis dari Penerbit.

UNDANG-UNDANG NOMOR 28 TAHUN 2014 TENTANG HAK CIPTA

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial **dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).**
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial **dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).**
3. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk Penggunaan Secara Komersial **dipidana dengan pidana penjara paling lama 4 (empat) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah).**
4. Setiap Orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, **dipidana dengan pidana penjara paling lama 10 (sepuluh) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah).**

Andi Wijaya, S.E., M.M.
Dra. Nur Hidayah, M.M.
Dr. Lydiawati Soelaiman, S.T., M.M.
Joyce A. Turangan, S.E. M.Pd

Matematika Ekonomi

—Jakarta: Mitra Wacana Media, 2025
1 jil., 17 × 24 cm, 420 hal.
Anggota IKAPI No: 410/DKI/2010

ISBN: 978-602-318-592-4

1. Matematika 2. Matematika Ekonomi
I. Judul II. Andi Wijaya, Nur Hidayah, Lydiawati Soelaiman, Joyce A. Turangan.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur tim penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas rahmat dan karunia Nya sehingga buku Matematika Ekonomi ini dapat diselesaikan dengan baik. Buku ini disusun sebagai referensi komprehensif yang menguraikan penerapan konsep matematika dalam ilmu ekonomi. Diharapkan buku ini dapat membantu mahasiswa dalam memahami lebih baik penerapan ilmu matematika yang lebih mendalam di bidang ekonomi.

Buku ini disusun secara sistematis dan terbagi menjadi beberapa bagian utama yaitu: Pengantar dan dasar-dasar matematika; Fungsi dan penerapannya dalam ekonomi; Penerapan baris dan deret dalam ekonomi; Diferensial fungsi sederhana dan multivariable dalam ekonomi; Aljabar matriks dan penerapannya dalam ekonomi serta penerapan fungsi integral dalam analisis ekonomi. Setiap bab buku ini dilengkapi dengan Tujuan Instruksi Khusus (TIK) sebagai panduan pembelajaran, pendahuluan untuk memperkenalkan topik secara menyeluruh dan contoh soal yang disertai dengan langkah penyelesaian yang sistematis. Buku ini juga dilengkapi soal latihan di akhir setiap bab sebagai alat mengevaluasi kemampuan mahasiswa dalam memahami materi yang dijelaskan.

Akhirnya kami mengucapkan selamat membaca, kiranya buku ini dapat memberikan manfaat kepada pembaca serta memberikan kontribusi terhadap perkembangan ilmu pengetahuan di bidang ekonomi kuantitatif.

Hormat kami,

Tim Penulis

Daftar Isi

KATA PENGANTAR ..... **III**
DAFTAR ISI ..... **v**
Bab 1 PENGANTAR MATEMATIKA EKONOMI **1**
1.1. Pengertian Matematika Ekonomi 1
1.2. Peranan Matematika dalam Perkembangan Ilmu Ekonomi dan Bisnis 1
1.3. Model Ekonomi 2
1.4. Persamaan Ekonomi 4
1.5. Perbedaan Matematika Ekonomi dan Ekonometrika 5

Bab 2 DASAR-DASAR MATEMATIKA **7**
2.1. Bilangan 7
2.2. Operasi Bilangan 8
2.3. Pangkat, Akar dan Logaritma 11
2.4. Sistem Persamaan Linier 14

Bab 3 HIMPUNAN, RELASI DAN FUNGSI **19**
3.1. Himpunan 19
3.2. Relasi 26
3.3. Fungsi 27
3.4 Soal Latihan 67

Bab 4 PENERAPAN FUNGSI DALAM ILMU EKONOMI **71**
4.1. Fungsi Permintaan (Demand Function) 71
4.2. Fungsi Penawaran (Supply Function) 79
4.3. Keseimbangan Pasar (Market Equilibrium) 85
4.4. Keseimbangan Dua Macam Produk 90
4.5. Pajak 92
4.6. Subsidi 106
4.7. Fungsi Biaya 112
4.8. Fungsi Penerimaan 116
4.9. Analisis Pulang Pokok (Break Even Point/BEP) 118

4.10. Fungsi Konsumsi dan Tabungan 123
4.11. Pendapatan Nasional 129
4.12 Soal Latihan 133

Bab 5 BARIS DAN DERET 141
5.1. Pengertian Baris dan Deret 141
5.2. Baris dan Deret Aritmatika 142
5.3. Baris dan Deret Geometri 144
5.4. Soal Latihan 147

Bab 6 PENERAPAN BARIS DAN DERET DALAM ILMU EKONOMI 149
6.1. Konsep Dasar Model Bunga 149
6.2. Model Bunga Sederhana (simple interest) 150
6.3. Model Bunga Majemuk (compound interest) 153
6.4. Model Bunga Anuitas (Annuity Interest) 160
6.5 Soal Latihan 169

Bab 7 DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA 173
7.1. Pendahuluan Limit 173
7.2. Kontinuitas 179
7.3. Hasil Bagi Perbedaan 181
7.4. Derivatif 181
7.5 Latihan Soal 193

Bab 8 PENERAPAN DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA DALAM ILMU EKONOMI 195
8.1. Elastisitas 196
8.2. Biaya 206
8.3. Penerimaan 209
8.4. Laba dan Dampak Pajak pada Laba 213
8.5. Penerimaan Pajak Maksimum 219
8.6. Biaya Persediaan 230
8.7 Soal Latihan 238

Bab 9 DERIVATIF UNTUK FUNGSI LEBIH DARI SATU VARIABEL 249
9.1 Pendahuluan 249
9.2 Derivatif Parsial 249
9.3 Derivatif Parsial Kedua 250
9.4 Diferensial dan Derivatif (Turunan) 252
9.5 Diferensiasi Total Dan Diferensiasi Parsial 252
9.6 Derivatif Total 254
9.7 Diferensiasi Untuk Fungsi Implisit 255
9.8 Soal Latihan 256

Bab 10 PENERAPAN DERIVATIF PARSIAL DALAM EKONOMI..... 259
10.1 Pendahuluan 259
10.2 Aplikasi Ekonomi Untuk Derivatif Lebih dari Satu Variabel 260
10.3 Soal Latihan 265

Bab 11 MAKSIMUM DAN MINIMUM SUATU FUNGSI DENGAN VARIABEL BEBAS LEBIH DARI SATU 267
11.1 Maksimum Dan Minimum Fungsi Tanpa Kendala 267
11.2 Maksimum Dan Minimum Fungsi Dengan Kendala..... 269
11.3 Soal Latihan 273

Bab 12 PENERAPAN MAKSIMUM DAN MINIMUM DALAM EKONOMI..... 275
12.1 Biaya 275
12.2 Penerimaan 278
12.3 Laba 280
12.4 Konsep Diskriminasi Harga 282
12.5 Fungsi Utilitas 285
12.5 Fungsi Produksi 289
12.6 Soal Latihan 292

Bab 13 INTEGRAL 297
13.1 Pendahuluan 297
13.2 Integral Tak Tertentu 297
13.3 Integral Tertentu 302
13.4 Soal Latihan 303

Bab 14 PENERAPAN INTEGRAL DALAM EKOMOMI..... 305
14.1 Integral Tak Tertentu 305
14.2 Integral Tertentu..... 310
14.3 Soal Latihan 317

Bab 15 ALJABAR MATRIKS..... 319
15.1 Aljabar Matriks 31
15.2 Pengoperasian Matriks..... 320
15.2 Bentuk-Bentuk Khas Matriks 321
15.4 Matriks Transpose (Matriks Ubahan) 322
15.4 Hukum Komutatif, Asosiatif, Dan Distributif Dari Matriks 325
15.5 Matriks Bersekat (Matriks Partisi) 326
15.6 Determinan Matriks 327
15.7 Inverse Matriks..... 332
15.8 Soal Latihan 337

Bab 16 SISTEM PERSAMAAN LINIER SIMULTAN DAN PENERAPAN DALAM ILMU EKONOMI 339
16.1 Sistem Persamaan dalam Matrik 339
16.2. Aturan Crammer (Crammer's Ruler) 339
16.3. Metode Inverse 342
16.4 Metode Eliminasi Gauss (Elimination Gauss) 345
16.5 Penerapan dalam Ilmu Ekonomi 348
16.6 Soal Latihan 349

Bab 17 MAKSIMUM DAN MINIMUM FUNGSI 351
17.1 Pendahuluan 351
17.2 Maksimun Dan Minimum Fungsi Dari N Variabel Tanpa Kendala 351
17.3 Maksimum Dan Minimum Dengan Kendala 356
17.4 Soal Latihan 362
18.2 Maksimum Dan Minimum Tanpa Kendala 363

Bab 18 PENERAPAN MATRIKS DALAM EKONOMI 363
18.1 Pendahuluan 363
18.2 Maksimum Dan Minimum Dengan Kendala 372
18.3 Soal Latihan 377

Bab 19 ANALISIS INPUT – OUTPUT 383
19.1. Pendahuluan 383
19.2 Tujuan Dari Analisis Input-Output 384
19.3 Matriks Transaksi 384
19.4 Matriks Teknologi 386
19.5 Soal Latihan 393

Bab 20 PROGRAMASI LINEAR (LINEAR PROGRAMMING) 397
20.1 Ide Dasar Programasi Linear 397
20.2 Bentuk Umum Model Programasi Linear 398
20.3 Metode Grafik 399
20.4 Soal Latihan 405

Bab 21 PROGRAMASI LINEAR (LINEAR PROGRAMMING) 409

DAFTAR PUSTAKA 409

TENTANG PENULIS .....

Bab 1

PENGANTAR MATEMATIKA EKONOMI

Tujuan Instruksional Khusus (TIK)

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Menyebutkan pengertian matematika ekonomi;
2. Menyebutkan peranan matematika dalam perkembangan ilmu ekonomi dan bisnis;
3. Menyebutkan model ekonomi;
4. Menyebutkan persamaan ekonomi;
5. Menyebutkan perbedaan matematika ekonomi dan ekonometrika.

1.1. PENGERTIAN MATEMATIKA EKONOMI

Matematika ekonomi (*mathematical economics*) merupakan aplikasi metode matematika yang digunakan untuk mengembangkan teori ekonomi maupun analisis ekonomi (Black, Hashimzade and Myles : 2012).

Matematika ekonomi merupakan suatu pendekatan terhadap analisis ekonomi. Meskipun Chiang (2005) mengemukakan bahwa pendekatan matematika tidak berbeda secara fundamental dari pendekatan non matematika dalam menganalisis ekonomi namun ia juga menunjukkan perbedaan di antara keduanya serta kelebihan pendekatan matematika dalam menganalisis ekonomi.

1.2. PERANAN MATEMATIKA DALAM PERKEMBANGAN ILMU EKONOMI DAN BISNIS

Selama bertahun-tahun, peran matematika dan statistika telah menjadi semakin penting dalam ilmu pengetahuan sosial, khususnya ilmu ekonomi. Penggunaan matematika dalam ilmu ekonomi sebenarnya sudah lama dirintis, bahkan

sebelum publikasi buku Adam Smith yang terkenal pada tahun 1776, *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. Di antaranya nama yang bisa dicatat adalah Daniel Bernoulli yang memformulasikan hipotesis *diminishing marginal utility of wealth* pada tahun 1738 (Beaud & Dostaler: 1997).

Hingga awal abad ke 20, kebanyakan teori dalam ilmu pengetahuan sosial diformulasikan dalam bentuk kualitatif. Pada saat itu, metode kuantitatif dianggap kurang tepat dalam memahami masalah sosial. Matematika dianggap menjadi metode ilmu pengetahuan alam, yang terpisah dari ilmu pengetahuan sosial.

Pada awal 1930-an, tahun ekonomi makro mulai berkembang, masih sedikit artikel ilmiah bidang ekonomi yang dipublikasikan pada jurnal ekonomi ternama yang menggunakan matematika. Namun, sejak 1970-an hingga sekarang justru jarang ditemui artikel ilmiah bidang ekonomi yang tidak menggunakan matematika. Matematika dalam bidang ilmu ekonomi digunakan melalui dua cara. Pertama, sebagai alat riset teoritis. Kedua, sebagai alat riset empiris. Kebanyakan matematika yang digunakan adalah geometri, aljabar, dan kalkulus (Backhouse, 2002).

Penerapan matematika dalam ilmu ekonomi merupakan penerapan matematika dalam ilmu sosial yang paling awal. Namun, penggunaan metode matematika dalam ilmu ekonomi mulai menonjol pada pertengahan abad ke 20. Peran matematika menjadi sangat penting dalam perkembangan ilmu ekonomi. Ilmu ekonomi kontemporer didominasi oleh pendekatan matematika. Backhouse (1998), yang membandingkan jurnal ekonomi akademik dalam 50 tahun menyatakan bahwa penggunaan aljabar telah meningkat dari 10% pada tahun 1940 menjadi 80% pada tahun 1990.

1.3. MODEL EKONOMI

Model ekonomi (*economic model*) merupakan konstruksi teoritis yang dirancang untuk menganalisis perilaku pelaku ekonomi dengan menggunakan metode kuantitatif yang logis. Dengan demikian, sebelum membuat suatu model ekonomi, seyogyanya model tersebut didasari oleh suatu teori ekonomi (*economic theory*). Ada pun teori ekonomi adalah suatu abstraksi dari dunia riil. Teori ekonomi tersebut membantu dalam memahami kompleksitas ekonomi riil yang terjadi. Dalam proses pemahaman tersebut, perlu memilah faktor-faktor utama serta hubungan yang relevan terhadap masalah ekonomi yang dihadapi.

Suatu model ekonomi merupakan kerangka teoritis, dan tidak harus menjadi rumus matematika. Namun, jika model tersebut dituangkan dalam bentuk rumus matematika, maka model tersebut akan terdiri dari seperangkat persamaan yang didisain untuk menggambarkan struktur model tersebut. Menghubungkan sejumlah variabel ke variabel lainnya dengan cara tertentu, persamaan tersebut memberi bentuk matematika berdasarkan asumsi tertentu. Aplikasi operasi matematika yang relevan atas persamaan tersebut dapat membawa pada suatu konklusi logis pada asumsi tertentu.

Suatu variabel merupakan suatu kuantitas yang besarnya dapat berubah. Variabel yang sering digunakan dalam ilmu ekonomi seperti harga, tingkat bunga, keuntungan, konsumsi, penerimaan, biaya, pendapatan nasional, konsumsi, investasi, impor, dan ekspor. Mengingat setiap variabel dapat menerima berbagai nilai, maka variabel harus dinyatakan dalam suatu simbol sebagai pengganti angka spesifik.

Pada hakekatnya, suatu variabel dalam suatu model ekonomi dapat dikategorikan dalam dua jenis. Pertama, variable endogen (*endogenous variable*) yang nilai solusinya berasal dari dalam model itu sendiri. Kedua, variable eksogen (*exogenous variable*) yang nilainya ditentukan di luar model atau pengaruh eksternal.

Suatu variabel mungkin saja dapat menjadi *endogenous* di suatu model ekonomi tetapi menjadi *exogenous* di model lainnya. Dalam model pendapatan nasional Keynes, variabel pendapatan nasional (Y) dapat menjadi variabel endogen karena dipengaruhi oleh variabel lainnya; namun pendapatan nasional dapat menjadi variabel eksogen pada fungsi konsumsi (C). Perkembangan pendapatan nasional dapat mempengaruhi konsumsi nasional. Sebagai contoh pendapatan nasional menjadi variabel endogen: Y = f(i) atau Y merupakan fungsi tingkat bunga (i); sedangkan pendapatan nasional menjadi variabel eksogen: C = f(Y) atau C merupakan fungsi Y.

Dalam model ekonomi, suatu variabel seringkali dikombinasikan dengan suatu angka. Angka tersebut disebut konstanta (*constant*). Suatu konstanta adalah suatu besaran yang tidak berubah. Suatu konstanta yang dikombinasikan atau digabung dengan suatu variabel disebut koefisien (*coefficient*) variabel tersebut. Dalam menulis suatu rumus atau formula, seringkali koefisien tersebut digambarkan secara simbolis daripada dalam bentuk suatu angka. Sebagai contoh **10i** ditulis **ai** atau **αi**. Huruf **a** atau **α**, yang merupakan simbol konstan yang spesial karena dapat dimasukkan angka berapa saja namun angkanya untuk sementara belum ditentukan, dapat dinyatakan sebagai variabel. Untuk mengidentifikasikan kasus spesial tersebut, maka **a** atau **α** diberi nama sebagai

parametric constant atau, singkatnya, *parameter*. Biasanya parameter dinotasikan oleh huruf seperti a, b, c, d dan seterusnya atau huruf Yunani seperti α, β, γ, δ, dan seterusnya.

1.4. PERSAMAAN EKONOMI

Dalam aplikasi ekonomi, persamaan umumnya diklasifikasikan menjadi tiga tipe (Chiang & Wainwright: 2005), yakni *definitional equations* (persamaan definisi), *behavioral equations* (persamaan perilaku), dan *conditional equations* (persamaan kondisional/bersyarat).

Suatu *definitional equation* menyatakan suatu identitas antara dua pernyataan yang mengandung arti yang sama. Persamaan tersebut memiliki tanda "≡" (dibaca: sama secara identik), yang sering digunakan untuk mengganti tanda "=", meskipun tanda "=" juga dapat diterima.

Contoh *definitional equation*:

1. $\pi \equiv TR - TC$ (keuntungan ≡ Penerimaan Total – Biaya Total);
2. $Y \equiv C + I$ (Pendapatan Nasional ≡ Konsumsi + Investasi)
3. $Y \equiv C + I + G$ (Pendapatan Nasional ≡ Konsumsi + Investasi + Pengeluaran Pemerintah);
4. $Y \equiv C + I + G + (X - M)$ (Pendapatan Nasional ≡ Konsumsi + Investasi + Pengeluaran Pemerintah + Ekspor Neto)

Suatu *behavioral equation* merupakan persamaan yang menggambarkan respons perilaku suatu variabel atas perubahan variabel lainnya. Ini meliputi *human behavior* (perilaku manusia) seperti pola konsumsi agregat sehubungan dengan pendapatan nasional dan *nonhuman behavior* (perilaku bukan manusia) seperti bagaimana total cost suatu perusahaan bereaksi terhadap perubahan output. Secara luas, *behavioral equations* dapat digunakan untuk menggambarkan kelembagaan umum ke dalam suatu model, seperti aspek teknologi (contoh fungsi produksi) dan aspek hukum (contoh, struktur pajak). Namun, sebelum *behavioral equation* dapat ditulis, persamaan tersebut perlu menentukan asumsi yang mendasari pola perilaku variabel yang dibahas.

Contoh *behavioral equation*:

1. $C = C_0 + cY^d$ (Konsumsi merupakan fungsi *disposable income*)
2. $I = I_0 - di$ (Investasi merupakan fungsi tingkat bunga)
3. $T = T_0 + tY$ (Pajak merupakan fungsi Pendapatan nasional)

Suatu *conditional equation* menyatakan terpenuhinya suatu ketentuan. Misalnya, dalam suatu model yang menggambarkan ekuilibrium, kita harus menetapkan suatu kondisi ekuilibrium, yang menggambarkan prasyarat untuk mencapai ekuilibrium. Dua kondisi ekuilibrium yang paling terkenal adalah:

Contoh *conditional equation*:
1. $Q_d = Q_s$ [kuantitas yang diminta = kuantitas yang ditawarkan]
2. S = I (Tabungan Nasional = Investasi Nasional)
3. MC = MR (Marginal Cost = Marginal Revenue)
4. MV = PT (Penawaran Uang x Perputaran Uang = Harga x Kuantitas)
5. $M^d = M^s$ (Permintaan Uang = Penawaran Uang)

1.5. PERBEDAAN MATEMATIKA EKONOMI DAN EKONOMETRIKA

Arthur S. Goldberger (Gujarati & Porter: 2009) mendefinisikan ekonometrika (*econometrics*) sebagai ilmu pengetahuan sosial yang menggunakan teori ekonomi, matematika, dan statistika untuk menganalisis fenomena ekonomi.

Definisi Goldberger tersebut menunjukkan bahwa matematika ekonomi digunakan dalam proses membuat model ekonometrika, yang pada gilirannya, digunakan untuk menganalisis suatu fenomena ekonomi. Penguasaan matematika ekonomi merupakan prasyarat untuk memahami dan membuat model ekonometrika.

Hal tersebut ditunjukkan melalui 8 tahap metodologi ekonometrika klasik, yang juga disebut sebaga anatomi model ekonometrika, di bawah ini (Gujarati dan Porter : 2009):
1. Teori ekonomi
2. Model matematika
3. Model ekonometrika
4. Data
5. Estimasi model ekonometrika
6. Hipotesis ujian
7. Peramalan atau prediksi
8. Mengggunakan model untuk tujuan pengendalian atau tujuan kebijakan.

Nachrowi dan Usman (2006) mengemukakan lebih rinci bahwa teknik ekonometrika merupakan gabungan dari teori ekonomi, statistika ekonomi, matematika statistik, dan teknik komputasi.

Bab 2

DASAR-DASAR MATEMATIKA

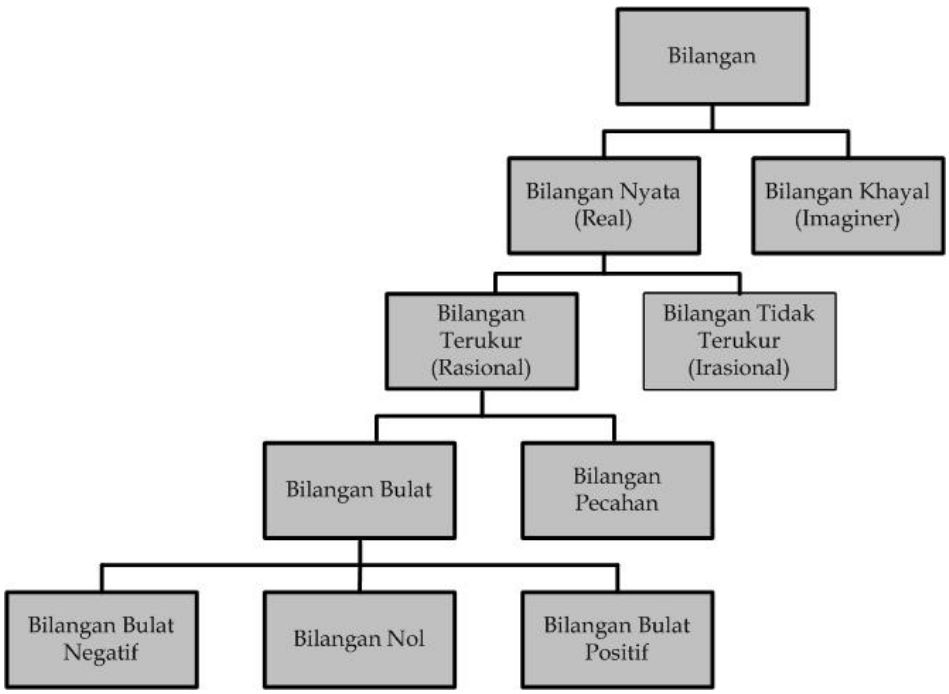
Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Membedakan jenis bilangan;
2. Mengoperasikan bilangan;
3. Menghitung pangkat, akar, logaritma.

2.1. BILANGAN

Pembagian bilangan dapat dinyatakan sebagai berikut:



Gambar 2.1.

Bilangan dibadakan menjadi bilangan nyata dan bilangan khayal. Bilangan khayal adalah akar pangkat genap dari bilangan negatif,

Contoh:

$\sqrt{-5} = \sqrt[2]{-5}$, dan $\sqrt[4]{-8}$

Bilangan Rasional adalah bilangan yang tidak memuat tanda akar,

Contoh:

$2 = \sqrt{4}$, setelah ditarik akar tidak memuat lagi tanda akar

Bilangan Irrasional adalah bilangan yang memuat tanda akar,

Contoh:

$\sqrt{20} = \sqrt{4x5} = 2\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{11}$, dan $\sqrt[3]{-4}$

Bilangan bulat adalah gabungan bilangan bulat negatif, bilangan nol, dan bilangan bulat positif. Bilangan bulat positif disebut sebagai bilangan asli, sedangkan bilangan bulat positif dan bilangan nol disebut sebagai bilangan cacah.

Bilangan pecahan adalah bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$, a dan b adalah bilangan bulat yang bukan 0. Bentuk-bentuk pecahan ada pecahan biasa, pecahan desimal, persen, permil, pecahan campuran.

Contoh:

$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\% = 500\,{}^{0}/_{00}$

$\frac{1}{2}$ disebut pecahan biasa

0,5 disebut pecahan desimal

50% disebut persen

$500\,{}^{0}/_{00}$ disebut permil

2.2. OPERASI BILANGAN

2.2.1. Penjumlahan

Penjumlahan Bilangan Bulat

1. $a + b = b + a \rightarrow$ komutatif (pertukaran)

   Contoh:

   $5 + (-2) = -2 + 5$

2. $(a + b) + c = a + (b + c) \rightarrow$ asosiatif (pengelompokan)

   Contoh:

   $(5 + 3) + 2 = 5 + (3 + 2)$

3. $a + b = c \rightarrow$ tertutup

   Contoh:
   $6 + 4 = 10$

4. $a + (-a) = -a + a \rightarrow$ invers (balikan)

   Contoh:
   $5 + (-5) = -5 + (5)$

   Penjumlahan Bilangan Pecahan
   Contoh:
   $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
   Contoh:
   $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1x3}{2x3} + \frac{1x2}{3x2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

2.2.2. Pengurangan

Pengurangan Bilangan Bulat
1. $a - b \neq b - a$
   Contoh:
   $6 - 3 \neq 3 - 6$
2. $a + (-b) = a - b$
   Contoh:
   $5 + (-3) = 5 - 3$
3. $a - (-b) = a + b$
   Contoh:
   $7 - (-3) = 7 + 3$

   Pengurangan Bilangan Pecahan
   $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$
   Contoh:
   $\frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

1.1.3. Perkalian

Perkalian Bilangan Bulat
1. $a \times b = b \times a \rightarrow$ komutatif

Contoh:

5 x 2 = 2 x 5

2. (a x b) x c = a x (b x c) → asosiatif

   Contoh:

   (4 x 5) x 3 = 4 x (5 x 3)

3. a x (b + c) = (a x b) + (a x c) → distributif (pernyebaran)

   Contoh:

   2 x (3 + 7) = (2 x 3) + (2 x 7)

   5 x (10 – 2) = (5 x 10) – (5 x 2)

   2 x (4 – 5 + 7) = (2 x 4) – (2 x 5) + (2 x 7) = 8 –10 +14 = 12

4. a x b = c → tertutup

   Contoh:

   4 x 5 = 20

5. $a x \frac{1}{a} = \frac{1}{a} x a = 1$ → Invers

   Contoh:

   $3x\frac{1}{3}=\frac{1}{a}$ x 3 = 1

Perkalian Bilangan Pecahan

$\frac{a}{b} x \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Contoh:

$\frac{4}{10} x \frac{3}{2} = \frac{4 \times 3}{10 \times 2}$

1.1.4. Pembagian

Pembagian Bilangan Bulat

$\frac{a}{b}=c$ sama artinya dengan a= b x c

Contoh:

$\frac{10}{5}=2$, sama artinya dengan 10 = 5 x 2

Pembagian Bilangan Pecahan

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} x \frac{d}{c}$

Contoh:

$\frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{1}$

Catatan:
Dalam pengoperasian matematika, memiliki urutan sebagai berikut:
1. Pangkat
2. Perkalian / pembagian
3. Tambah / kurang

Contoh:
a. $4 + 10 : 5 = 4 + (10 : 5)$
b. $10 - 8 \times 2 + (3)^2 = 10 - 8 \times 2 + 9 = 10 - (8x2) + 9 = 10 - 16 + 9 = 3$

2.3. PANGKAT, AKAR DAN LOGARITMA

2.3.1. Pangkat (*Exponent*)

Bilangan berpangkat dinyatakan dalam bentuk:

$$a^b$$

Keterangan:
a adalah bilangan pokok
b adalah pangkat (*exponent*)

Sifat-sifat pangkat:

1. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

   Contoh: $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$

2. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

   Contoh:

   $2^3.2^2 = 2^5 = 2x2x2x2x2 = 32$

3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

   Contoh: $\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

4. $(a^m)^n = (a)^{m.n} = (a^n)^m$

   Contoh:
   $(2^3)^2 = (2^2)^3 = (2)^{3x2} = 2^6 = 2x2x2x2x2x2 = 64$

5. $a^0 = 1$ dengan syarat a0

   Contoh:
   $5^0 = 1$

6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dengan syarat a≠0

   Contoh:
   $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

7. $0^n = 0$, dengan syarat n >0

   Contoh:
   $0^7 = 0$

8. 0^0 = tidak ditetapkan
9. 0^{negatif} = tidak ada (tidak berarti)

2.3.2. Akar

Sifat-sifat akar:

1. $\sqrt{axb} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

   Contoh:

   $\sqrt{16x4} = \sqrt{16} \times \sqrt{4} = 4 \times 2 = 8$

2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   $\sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$

3. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Contoh:

$\sqrt[2]{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 2x2x2 = 8$

2.3.3. Logaritma

Logaritma adalah invers dari perpangkatan, yaitu mencari pangkat dari suatu bilangan pokok sehingga hasilnya sesuai dengan yang telah diketahui $x = a^n$ jika dan hanya jika $n = {}^a\log x$

Keterangan:

n adalah sembarang bilangan real
a adalah sembarang bilangan real positif, a > 0 dan a 1
x adalah sembarang bilangan real positif

Sifat-sifat logaritma:

1. ${}^a\log a^n = n$

   Contoh:

   a. ${}^5\log 5^2 = 2$
   b. $\log 1000 = {}^{10}\log 10^3 = 3$
   c. $\log 10 = {}^{10}\log 10 = 1$

   log apabila tidak mencantumkan bilangan pokok maka berarti bilangan pokoknya 10. Logaritma dengan bilangan pokok 10 dinamakan logaritma persepuluhan atau logaritma Brigg.

2. ${}^a\log x + {}^a\log y = {}^a\log x.y$

   Contoh:

   ${}^6\log 9 + {}^6\log 4 = {}^6\log 36 = {}^6\log 6^2 = 2$

3. ${}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log \frac{x}{y}$,

   Contoh:

   ${}^2\log 16 - {}^2\log 2 = {}^2\log \frac{16}{2} = {}^2\log 8 = {}^2\log 2^3 = 3$

4. ${}^a\log x + {}^a\log y - {}^a\log z = {}^a\log \frac{xy}{z}$

   Contoh:

   ${}^5\log 10 + {}^5\log 3 - {}^5\log 6 = {}^5\log \frac{10.3}{6} = {}^5\log 5 = 1$

5. ${}^a\log x^n = n.\ {}^a\log x$

   Contoh:

   ${}^3\log 9^5 = 5.\ {}^3\log 9 = 5.\ {}^3\log 3^2 = 5x2 = 10$

6. $^{a}\log x = \frac{^{c}\log x}{^{c}\log a}$

Contoh:

$^{4}\log 8 = \frac{\log 8}{\log 4}$

7. $^{e}\log x = \ln x$, bilangan pokok adalah e = 2,7182818…..

Contoh:

$\ln e = {}^{e}\log e^{1}=1$

Hal ini dikarenakan ln adalah logaritma dengan bilangan pokok e maka $^{e}\log e = 1$. Logaritma dengan bilangan pokok e disebut logaritma alam atau logaritma Napier (1550 – 1617).

8. $^{a}\log x.\ ^{x}\log y = \frac{\log x}{\log} . \frac{\log y}{\log x} = \frac{\log y}{\log a} = {}^{a}\log y$

Contoh:

$^{2}\log 9.\ ^{9}\log 5 = {}^{2}\log 5$

9. $^{a}\log x = \frac{1}{^{x}\log a}$

Contoh:

$5\log 25 = \frac{1}{^{3}\log 5}$

10. log 0 = tidak ada

11. log (negatif) = tidak ada

12. $^{a}\log 1 = 0$ dikarenakan 1 adalah a^0 maka $^{a}\log a^{0} = 0$

Contoh:

$^{5}\log 1 = 0$

2.4. SISTEM PERSAMAAN LINIER

2.4.1. Mencari Nilai Satu Variabel

Untuk menyelesaikan suatu persamaan linier satu variabel dapat dilakukan dengan cara mencari persamaan-persamaan yang ekuivalen. Suatu persamaan dapat dinyatakan ke dalam persamaan yang ekuivalen, dengan cara :

1. Menambah atau mengurangi kedua ruas dengan bilangan yang sama.

2. Mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan bukan nol yang sama.

Contoh:
Carilah penyelesaian dari : $3x + 3 = 12$
Penyelesaian:
$3x + 3 = 15$
$3x = 15 - 3$
$3x = 12$
$x = 4$

2.4.2. Mencari Nilai Lebih dari Satu Variabel

Nilai lebih dari satu variabel dalam persamaan dapat diselesaikan jika melibatkan persamaan yang lainnya dimana kedua persamaan tersebut memiliki saling ketergantungan (berhubungan). Terdapat dua metode penyelesaian yang dapat dilakukan, yaitu menggunakan metode eliminasi dan/atau substitusi.

2.4.2.1 Metode eliminasi

Metode ini dilakukan dengan cara menghapus (menghilangkan) secara sementara salah satu variabel untuk mencari variabel lainnya.

Langkah-langkah metode eliminasi (misalnya terdapat dua variabel, yaitu x dan y):

1. Pilih satu variabel yang akan dieliminasi (misalnya variabel x),
2. Samakan nilai koefisien pada variabel yang akan dieliminasi dengan cara mengalikan dengan bilangan tertentu,
3. Hilangkan variabel tersebut dengan cara mengurangi atau menambah (tergantung tanda pada koefisien tersebut),
4. Menentukan nilai variabel lainnya (variabel y).
5. Menentukan nilai variabel x dengan cara melakukan substitusi nilai variabel x ke dalam persamaan mula-mula (persamaan 1 atau 2).

2.4.2.2 Metode substitusi

Metode ini dilakukan dengan cara menggantikan nilai salah satu variabel (misalnya x) dengan sebuah persamaan lainnya sang saling berkaitan tersebut.

Langkah-langkah metode substitusi (misalnya terdapat dua variabel, yaitu x dan y):

1. Pilih satu persamaan yang akan diubah menjadi $x = f(y)$ atau $y = f(x)$,

2. Ubahlah persamaan tersebut sesuai dengan yang diinginkan (misalnya diubah menjadi y = f(x) dan diperoleh persamaan ketiga,
3. Substitusikan persamaan ketiga tersebut ke dalam persamaan yang lainnya.
4. Lakukan proses perhitungan dan kemudian diperoleh nilai variabel x,
5. Lakukan substitusi nilai x (untuk mendapatkan nilai y) pada persamaan ketiga.

Contoh

Tentukan nilai x dan y baik secara eliminasi maupun substitusi dari kedua persamaan di bawah ini:

7x – 3y = 5.....(1)
4x + 2y = 14.....(2)

Jawaban

- Metode Eliminasi:
  7x – 3y = 5, persamaan ini dikalikan 2
  4x + 2y = 14, persamaan ini dikalikan 3

  14x – 6y = 10
  12x + 6y = 42 +
  26x = 52
  x = 2

  untuk mendapatkan nilai y, lakukan substitusi nilai x ke persamaan (1) atau (2)
  7x – 3y = 5
  7(2) – 3y = 5
  –3y = 5 – 14
  y = 3
- Metode Substitusi:
  7x – 3y = 5
  7x = 5 + 3y
  x = (5 + 3y)/7
  x = 5/7 + 3y/7.....(3)

  4x + 2y = 14
  4(5/7 + 3y/7) + 2y = 14
  20/7 + 12y/7 + 2y = 14
  26y/7 = 78/7
  y = 3

Substitusikan nilai y = 3 ke persamaan ketiga
x = 5/7 + 3y/7
x = 5/7 + 3(3)/7
x = 2

Dalam suatu sistem persamaan linier yang memiliki dua persamaan atau lebih ada yang tidak memiliki penyelesaian. Hal ini dapat dikarenakan kedua persamaan tersebut berbentuk sejajar atau saling berhimpitan sehingga tidak memiliki titik perpotongan dengan demikian nilai variabel tidak dapat teridentifikasi.

Contoh:

x + 2y = 6
2x + 4y = 9

Kedua persamaan tersebut memiliki kemiringan (koefisien) yang sama, dengan demikian kedua persamaan tersebut akan sejajar antar satu garis dengan garis lain sehingga tidak memiliki penyelesaian.

Bab 3

HIMPUNAN, RELASI DAN FUNGSI

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Mengetahui jenis-jenis fungsi;
2. Menggambarkan grafik dari sebuah fungsi persamaan linier;
3. Menggambarkan grafik dari sebuah fungsi persamaan non-linier;
4. Mencari persamaan fungsi linier;
5. Menentukan nilai variabel x dan y dari dua buah persamaan yang berhubungan.

3.1. HIMPUNAN

Himpunan adalah kumpulan/kesatuan dari objek-objek yang terdefinisi dengan jelas, misalkan saja himpunan bilangan ganjil, himpunan bilangan genap, himpunan bilangan prima yang kurang dari 10 dan sebagainya

Dalam penulisan suatu himpunan, nama himpunan selalu menggunakan huruf kapital, misalkan A, B, dan seterusnya. Sedangkan untuk penulisan anggota-anggota himpunan dibatasi oleh kurung kurawal yang dilambangkan dengan { }, dengan pemisahan antar anggota digunakan tanda koma.

Ada beberapa cara menyatakan himpunan, yaitu:

1. Himpunan dinyatakan dengan kata-kata.
   Contoh:
   A adalah himpunan bilangan prima yang kurang dari 10.
   Atau dapat ditulis dengan A= { Bilangan prima yang kurang dari 10 }
2. Himpunan dinyatakan dengan mendaftar anggota-anggotanya.
   Contoh:
   A = { 2, 3, 5, 7 }
3. Himpunan dinyatakan dengan notasi pembentuk himpunan.

Contoh:
A = { x | x bilangan prima kurang dari 10 }

Macam-macam himpunan:

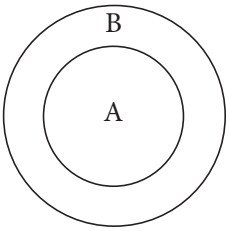
1. Himpunan semesta
   Dinyatakan dengan notasi: huruf S atau huruf U.
   Merupakan himpunan dari semua objek yang sedang dibicarakan.
   Contoh:
   S adalah himpunan bilangan ganjil
   S = {Bilangan ganjil}
   Sehingga 5 merupakan anggota himpunan S yang ditulis dengan $5 \in S$ sedangkan 8 bukan merupakan anggota himpunan S yang ditulis dengan $8 \in S$.
2. Himpunan kosong
   Dinyatakan dengan notasi:$\{\ \}$.
   Merupakan himpunan yang tidak mempunyai anggota.
   Contoh:
   A adalah himpunan bilangan genap yang tidak habis dibagi dua
   Sehingga A adalah himpunan kosong yang ditulis dengan A =$\{\ \}$
3. Himpunan berhingga
   Himpunan yang anggotanya berhingga, artinya dapat disebutkan seluruh anggota dari himpunan ini.
   Contoh:
   A adalah himpunan bilangan ganjil antara 10 dan 20
   A = {11, 13, 15, 17, 19}
4. Himpunan tak berhingga
   Himpunan yang anggotanya tak berhingga, artinya menyebutkan anggota dari himpunan ini tidak akan berhenti.
   Contoh:
   A adalah himpunan bilangan ganjil positif
   A = {1, 3, 5, 7, ... }

Hubungan antar himpunan

1. Himpunan Bagian
   Himpunan A disebut himpunan bagian dari B, jika setiap anggota A juga menjadi anggota B, dilambangkan dengan $A \subset B$. Jika A bukan himpunan bagian dari B maka dilambangkan $A \not\subset B$.

Contoh:
A= { Bilangan prima kurang dari 10 } atau dinyatakan A = { 2, 3, 5, 7 }
B = { Bilangan asli kurang dari 10 } atau dinyatakan B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } maka A $\subset$ B

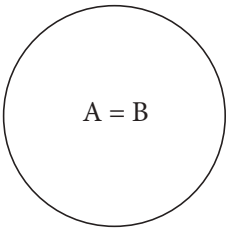
Diagram Venn:



Gambar 3.1

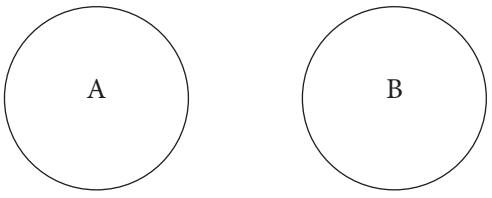
2. Himpunan Sama
Himpunan A dan B disebut sama jika anggota A dan B tepat sama, jika A $\subset$ B dan B $\subset$ A , dilambangkan A = B
Contoh:
A = {Bilangan asli kurang dari 5} atau dinyatakan A = { 1, 2, 3, 4, 5 }
B = {Bilangan bulat positif kurang dari 5} atau dinyatakan B = { 1, 2, 3, 4, 5 }

Diagram Venn:



Gambar 3.2

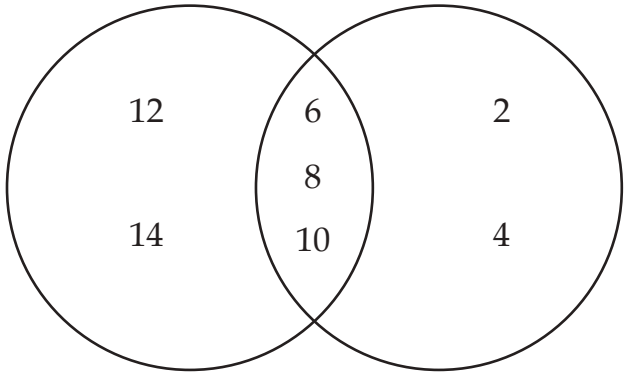
3. Himpunan Saling Lepas
Himpunan A dan B disebut saling lepas (saling asing), jika tidak terdapat anggota persekutuan antara A dan B, dilambangkan dengan A // B.
Diagram Venn:



Gambar 3.3

4. Himpunan Berpotongan
   Himpunan A dan B dikatakan berpotongan, jika terdapat objek-objek yang menjadi anggota A saja, objek-objek yang menjadi anggota B saja, objek-objek yang menjadi anggota persekutuan A dan B.
   Contoh:
   A = { x | x bilangan genap, 5 < x < 15 } atau dinyatakan A = { 6, 8, 10, 12, 14 }
   B = { x | x bilangan genap positif, x ≤ 10 } atau dinyatakan B = { 2, 4, 6, 8, 10 }

   Diagram Venn:



Gambar 3.4

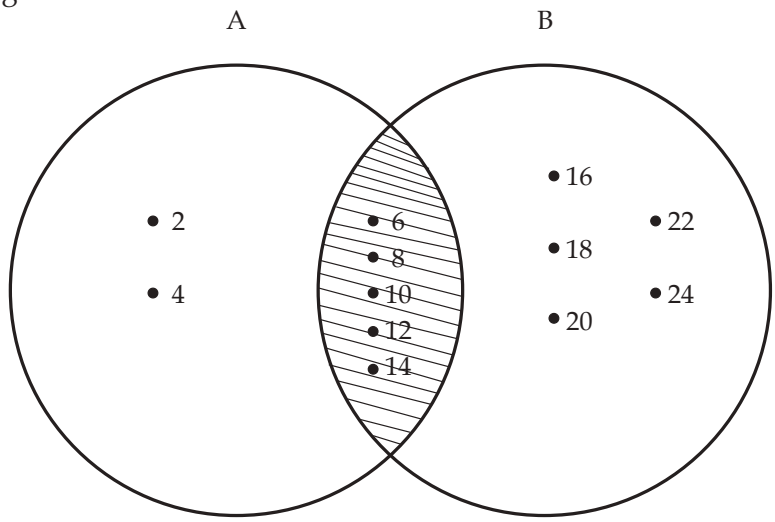
Operasi Himpunan

1. Irisan ($\cap$)
   Irisan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari semua objek yang menjadi anggota persekutuan dari A dan B.
   Jika didefinisikan dengan bentuk notasi : $A \cap B = \{ X \in A \cap X \in B \}$

   Contoh:
   A = { x | x bilangan genap positif , x < 15 }
   B = { x | x bilangan genap, 6 ≤ x ≤ 24

   Penyelesaian:
   A = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 }
   B = { 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 }
   $A \cap B$ = { 6, 8, 10 12, 14 }

Diagram Venn



Gambar 3.5

2. Gabungan (U)

Gabungan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari semua objek yang menjadi anggota himpunan A dan B atau kedua-keduanya.

Jika didefinisikan dengan bentuk notasi: A U B = { X$\in$ AU X $\in$ B}

Contoh:

A = { x | x bilangan prima, x < 15}

B = { x | x bilangan ganjil, 5 ≤ x ≤ 25}

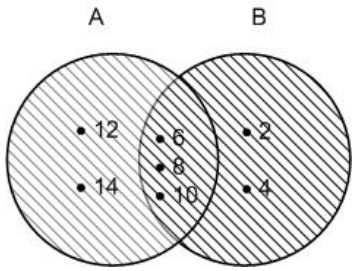
Penyelesaian:

A = { 2, 3, 5, 7, 11, 13 }

B = { 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 }

A U B = { 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 }

Diagram Venn:



Gambar 3.6

3. Selisih

Selisih dari himpunan A dan himpunan B adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari semua objek-objek yang menjadi anggota A dan bukan anggota B. Jika didefinisikan dengan bentuk notasi: $A - B = \{ X \in A \cap X \notin B \}$

Contoh:

$A = \{ x \mid x$ bilangan prima, $x < 15\}$

$B = \{ x \mid x$ bilangan ganjil, $5 \leq x \leq 25\}$

Penyelesaian:

$A = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13 \}$

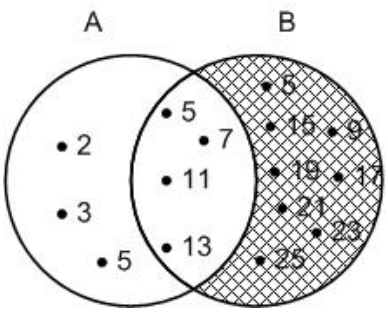
$B = \{ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 ,25 \}$

$A - B = \{ 2, 3 \}$

$B - A = \{ 9, 15, 17, 19, 21, 23 ,25 \}$

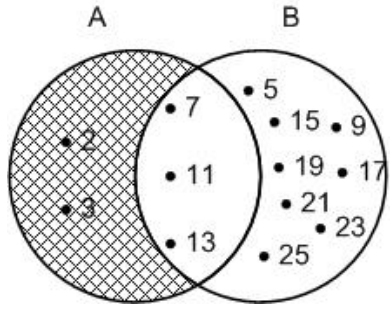
Diagram Venn:

A - B



Gambar 3.7

B - A



Gambar 3.8

4. Komplemen

Komplemen dari suatu himpunan A adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari semua objek-objek yang ada pada semestanya dan bukan anggota A. Jadi komplemen dari himpunan A merupakan selisih dari himpunan semesta dengan A.

Lambang komplemen dari himpunan A adalah A^c atau A'.

Definisi komplemen ditulis dengan: $A^c = \{ X \in S \cap X \notin A \}$

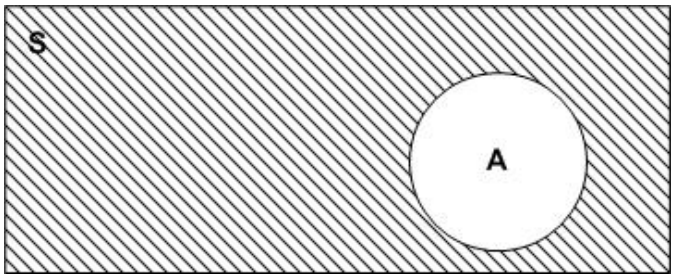
Contoh:

$S = \{ x \mid x$ bilangan prima, $x < 25\}$

$A = \{ x \mid x$ bilangan prima, $11 \leq x \leq 17\}$

Penyelesaian:
S = { 2, 3, 5, 7,11,13,17,19,23}
A = { 11,13,17}

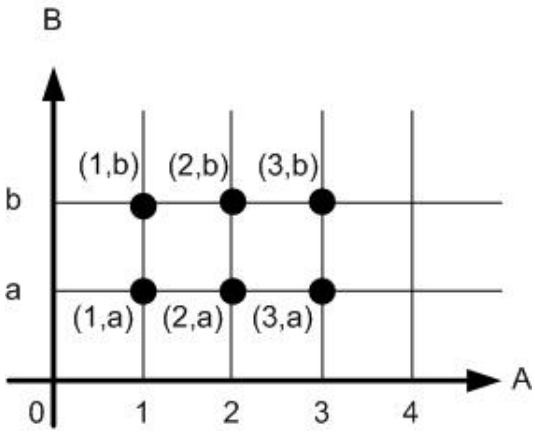
Diagram Venn:



Gambar 3.9

5. Hasil Kali
Hasil kali dari himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari semua pasangan berurutan (x, y), dengan x objek-objek yang menjadi anggota A dan y objek-objek yang menjadi anggota B.
Dilambangkan dengan: A x B.
Definisi hasil kali ditulis dengan notasi: A x B = { (x,y) | X ∈ A ∩ X ∈∈ B }

Contoh:
A = {1, 2, 3 } dan B = { a, b }
A x B = { (1,a), (1,b), (2, a), (2,b), (3,a), (3,b) }



Gambar 3.10

3.2. RELASI

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah perkawanan atau korespondensi antara anggota-anggota A dengan anggota B.

Himpunan A disebut domain (daerah asal) dan himpunan B disebut kodomain (daerah kawan). Himpunan anggota-anggota himpunan B yang mempunyai hubungan dengan anggota-anggota himpunan A disebut *range* (daerah hasil).

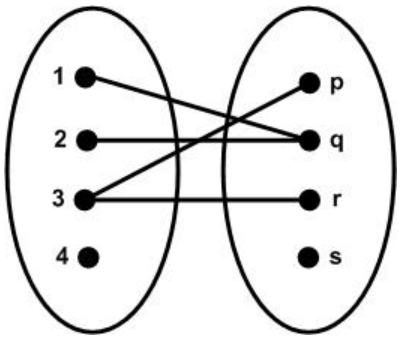
Relasi dapat dinyatakan dengan:

1. Diagram Panah

   Contoh:

   A = { 1, 2, 3, 4 }

   B = { p, q, r, s }



Gambar 3.11

2. Himpunan Pasangan Berurutan

   Contoh:

   A = { 1, 2, 3, 4 }

   B = { p, q, r, s }

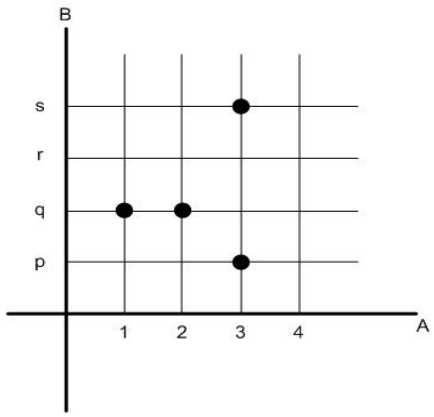
   Himpunan pasangan berurutan: { (1, q), (2, q), (3, p), (3, s) }

3. Diagram Cartesius

   Contoh:

   A = { 1, 2, 3, 4 }

   B = { p, q, r, s }



Gambar 3.12

Relasi Invers

Jika R suatu relasi dari A ke B dengan pasangan berurutan (x, y), sehingga invers R yaitu R^{-1} adalah suatu relasi dari B ke A yang anggotanya terdiri dari semua pasangan berurutan (y, x).

Jika relasi invers tersebut ditulis dengan notasi himpunan adalah:

$$R^{-1} = \{ (y , x) \mid (x, y) \in\in R \}$$

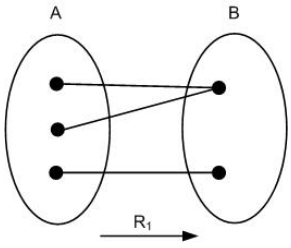
Contoh:
A = { 1, 2, 3, 4 }
B = { p, q, r, s }
Himpunan pasangan berurutan R = { (1, q), (2, q), (3, p), (3, s) }
Himpunan pasangan berurutan R^{-1} = { (q, 1), (q, 2), (p, 3), (s, 3) }

3.3. FUNGSI

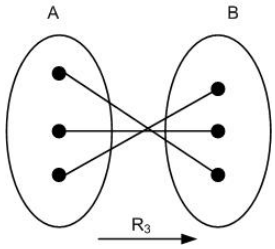
Fungsi adalah suatu **relasi khusus** dari himpunan A ke himpunan B, yaitu suatu relasi yang mengkaitkan **setiap anggota A** dengan **tepat satu** anggota B. Fungsi disebut juga pemetaan. Jika A dan B adalah dua himpunan maka sebuah fungsi *f* dari A ke B dinotasikan sebagai berikut:

$$f : A \rightarrow B$$

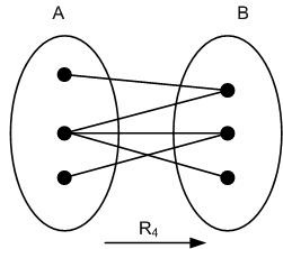
Artinya fungsi *f* memetakan himpunan A ke himpunan B.
Berikut beberapa relasi yang ditunjukkan dengan diagram panah:



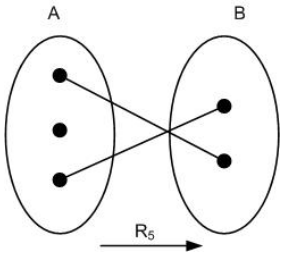
Gambar 3.13



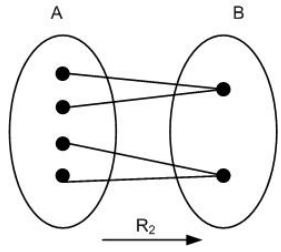
Gambar 3.14



Gambar 3.15

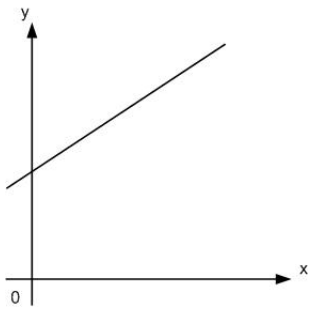


Gambar 3.16

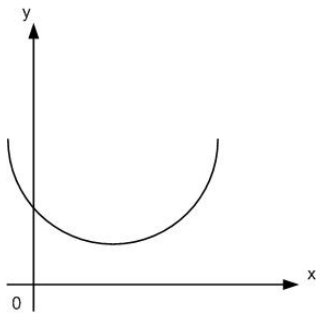


Gambar 3.17

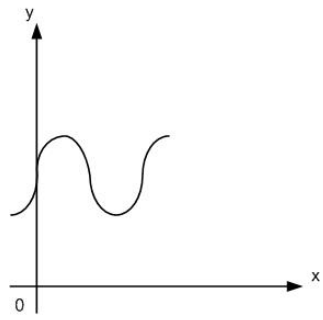
Perhatikan diagram cartesius dari relasi-relasi:



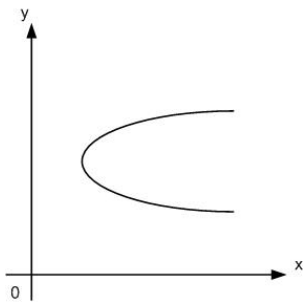
Gambar 3.18



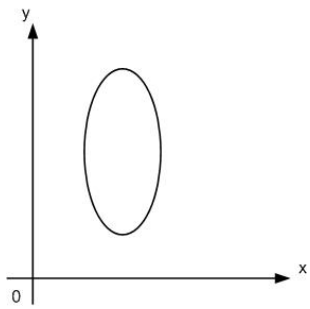
Gambar 3.19



Gambar 3.20



Gambar 3.21



Gambar 3.22

Keterangan:
- R_1, R_2 dan R_3 adalah relasi yang merupakan fungsi
- R_4, R_5 adalah relasi yang bukan merupakan fungsi

Nilai Fungsi

Jika x anggota himpunan A maka pasangan a dalam himpunan B dinyatakan dengan f (x) dibaca "f dari x". Dalam hal ini f(x) adalah bayangan (peta) a oleh f .

$$f : x \rightarrow f(x)$$

Contoh:
f (x) = 2x + 1
f : 1 → f (1) maka f (1) = 2 (1) + 1 = 3
f : 2 → f (2) maka f (2) = 2 (2) + 1 = 5

Fungsi invers

Jika f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B, maka himpunan pasangan berurutan yang diperoleh dengan jalan menukarkan setiap pasangan (x, y) anggota f dengan (y, x) diberi lambang f^{-1}

$$f^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in\in f \}$$

Contoh:
$y = f(x) = x^2$
$f = \{ (x, y) \mid y = x^2 \}$
$f^{-1} = \{ (y, x) \mid x = \sqrt{y} \}$

3.3.1. Pengertian dan Unsur-unsur Fungsi

Fungsi merupakan hubungan matematis yang menyatakan keterkaitan antara satu variabel dengan variabel lain. Sebuah fungsi umumnya terdiri dari variabel, koefisien dan konstanta. Namun, suatu fungsi dapat juga terbentuk dari suatu variabel dan koefisien tanpa konstanta.

Fungsi dapat berbentuk sebagai persamaan ataupun pertidaksamaan. Fungsi berbentuk persamaan merupakan fungsi yang ruas kiri dan ruas kanannya dihubungkan dengan tanda sama dengan (=), sedangkan fungsi berbentuk pertidaksamaan merupakan fungsi yang ruas kiri dan ruas kanannya berbentuk pertidaksamaan (≤ atau ≥).

Berdasarkan kedudukan atau sifatnya, dalam setiap fungsi terdapat dua macam variabel yaitu variabel bebas dan variabel tidak bebas. Variabel bebas (*independent variable*) ialah variabel yang nilainya tidak tergantung pada variabel lain, sedangkan variabel tidak bebas (*dependent variable*) ialah variabel yang nilainya tergantung pada variabel lain (dalam hal ini variabel bebas).

Variabel merupakan unsur pembentuk fungsi yang mencerminkan atau mewakili faktor tertentu. Dalam matematika, variabel - variabel dalam sebuah persamaan lazimnya ditulis dengan huruf kecil yang melambangkan sumbu dalam sistem koordinat (absis dan ordinat). Dalam ekonomi, tidak terdapat ketentuan bahwa variabel dalam suatu persamaan harus dituliskan dengan huruf kecil.

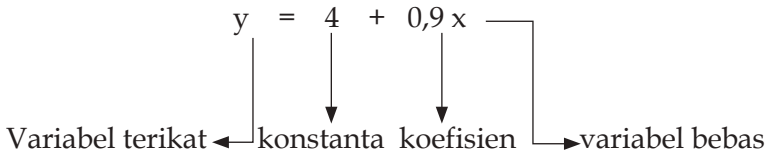
Koefisien merupakan bilangan atau angka yang terletak di depan suatu variabel. Koefisien juga lazim disebut *gradien* atau kemiringan. Apabila fungsi linier maka jika koefisien bernilai positif berarti perubahan pada variabel bebasnya akan menambah nilai variabel terikatnya dan sebaliknya.

Konstanta merupakan bilangan atau angka yang tidak mempengaruhi besarnya nilai variabel terikat jika terdapat perubahan pada variabel bebasnya. Konstanta juga sering disebut sebagai besarnya nilai variabel terikat pada saat nilai variabel bebas adalah nol.

Notasi sebuah fungsi secara umum:

$$y = f(x)$$

Contoh:



Bentuk y = f(x) di atas menyatakan bahwa y merupakan fungsi dari x. Notasi y merupakan variabel terikat, sedangkan x merupakan variabel bebas. Besar kecilnya nilai y tergantung pada nilai x.

3.3.2. Jenis-jenis Fungsi

Fungsi dapat dibedakan menjadi beberapa kelompok sebagai berikut:

- Berdasarkan banyaknya variabel, fungsi dibagi menjadi:
  1. Fungsi sederhana yaitu fungsi yang hanya terdiri dari 1 variabel bebas

Bentuk umum:

$$y = f(x)$$

Contoh:
$y = 5x + 10$
$y = x^2 + 3x - 10$

2. Fungsi multivariabel yaitu fungsi yang terdiri lebih dari 1 variabel bebas.
   Bentuk umum:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n)$$

   Contoh:
   $y = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_1 - 4x_1x_2^2$
   $y = 3x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$

- Berdasarkan letak ruas variabel-variabelnya, fungsi dibedakan menjadi dua jenis yaitu:
  1. Fungsi eksplisit ialah fungsi yang variabel bebas dan variabel terikatnya terletak di ruas yang berlainan.
     Bentuk umum:

$$y = f(x)$$

     Contoh:
     $y = x + 15$
     $y = 2x^2 - 8x + 25$

  2. Fungsi implisit ialah fungsi yang variabel bebas dan variabel terikatnya terletak di satu ruas yang sama, di ruas kiri semua atau di ruas kanan semua.
     Bentuk umum:

$$f(x,y) = 0$$

     Contoh:
     $y - x - 15 = 0$
     $y - 2x^2 + 8x - 25 = 0$

- Berdasarkan bentuk variabel bebasnya, fungsi dapat dikelompokan menjadi:
  1. Fungsi Aljabar
     Merupakan fungsi yang dinyatakan dalam suku-suku fungsi polinom dan/atau akar-akar (seperti akar kuadrat) dari fungsi polinom.
     a. Fungsi polinomial
        Adalah fungsi yang berderajat n.
        Bentuk umum:

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$$

Fungsi ini antara lain terdiri dari:

1) Fungsi konstan yaitu fungsi polinomial yang berderajat 0 (nol), $x^0=1$
   Bentuk umum:

$$y = a.x^0$$
atau
$$y = a$$

   Contoh: $y = 5.\ x^0 = 5.1 = 5$

2) Fungsi linier yaitu fungsi polinomial yang berderajat 1 (satu).
   Bentuk umum:

$$y = a_1 x + a_0$$
Jika $a_1 = a$ dan $a_0 = b$ maka:
$$y = ax + b$$

   Contoh: $y = 6x + 16$

3) Fungsi kuadrat yaitu fungsi polinomial yang berderajat 2 (dua).
   Fungsi kuadrat dapat berupa salah satu kemungkinan dari empat potongan kerucut, yaitu: lingkaran, elips, parabola, hiperbola.
   Pada persamaan kuadrat, variabel yang berpangkat dua sesungguhnya dapat terletak pada variabel x maupun variabel y, maka bentuk yang lebih umum untuk persamaan kuadrat adalah:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
Syarat:
$A \neq 0$ dan/atau $C \neq 0$

maka persamaan kuadrat menjadi:

$$Ax2 + Cy2 + Dx + Ey + F = 0$$

Dari bentuk persamaan kuadrat dengan nilai B = 0 di atas, dapat diidentifikasi kurva dari setiap fungsi sebagai berikut:

Fungsi	Syarat	Contoh	Keterangan
Lingkaran	A = C dengan A, C ≠ 0 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$	$2x^2+2y^2+16x-4y+17=0$	Perpotongan kerucut pada posisi mendatar
Elips	A ≠ C, A dan C bertanda sama $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$	$2x^2+y^2-16x-12y+80=0$	Perpotongan seperti terjadinya lingkaran dengan posisi yang miring
Hiperbola	B = 0, A dan C berlawanan tanda $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$	$6x^2-4y^2-12x-16y-34=0$	Perpotongan tegak lurus tetapi bukan di tengah kerucut
Parabola	◆ A ≠ 0 dan C = 0 $Ax^2+Dx+Ey+F=0$ ◆ C ≠ 0 dan A = 0 $Cy^2+Dx+Ey+F=0$	◆ $x^2 + 3x - 10 - y = 0$ atau $y = x^2 + 3x - 10$ ◆ $-y^2 - y + 12 - x = 0$ atau $x=-y^2 - y + 12$	Perpotongan menyerong pada separuh bidang kerucut

4) Fungsi kubik yaitu fungsi polinomial yang berderajat 3 (tiga).
Bentuk umum:

$$y= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
atau
$$y= ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Contoh: $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 20$

b. Fungsi rasional
Adalah suatu fungsi yang dibentuk dari pembagian suatu fungsi polinomial dengan fungsi polinomial yang lain.

Bentuk umum:

$$y = \frac{g(x)}{h(x)}$$

syarat $h(x) \neq 0$

Contoh: $y = \frac{3x + 25}{x + 18}$

2. Fungsi Non Aljabar/ Transenden
Adalah fungsi yang tidak termasuk fungsi aljabar.

Fungsi ini terdiri dari:

a. Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang variabel bebasnya merupakan pangkat dari suatu konstanta bukan nol.
Bentuk umum:

$$y = a + b.c^{dx+e}$$

Keterangan: a, b, c, d, dan e adalah konstanta dengan $b \neq 0$, $c > 1$, $d \neq 0$

Contoh:
$y = 5^x$
$y = 5 + 2^{-x}$
$y = 5 - 3.2^{5x-7}$

b. Fungsi logaritma merupakan fungsi balik (*inverse*) dari fungsi eksponensial, variabel bebasnya merupakan bilangan logaritma.
Bentuk umum:

$$y = {}^{a}\log x$$

Keterangan: a adalah bilangan pokok, $a > 1$ dan $0 < a < 1$

Contoh:
$y = {}^{2}\log x$
$y = {}^{0,5}\log x$

c. Fungsi trigonometri merupakan fungsi yang variabel bebasnya merupakan bilangan-bilangan trigonometri.

Contoh:
y= sin 5x

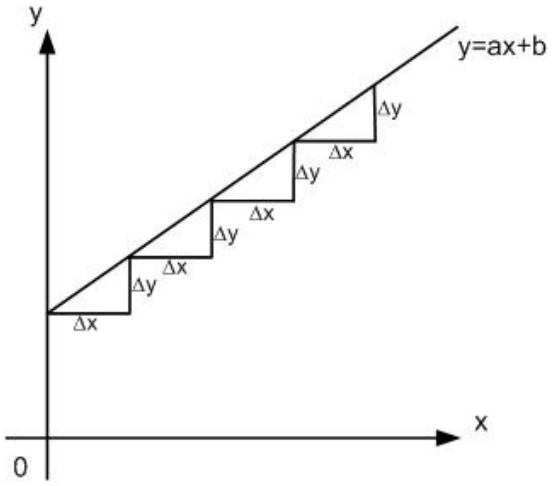
3.3.3. Pembentukan dan Penggambaran Fungsi

Dari fungsi yang telah dijelaskan sebelumnya, maka selanjutnya akan dibahas pembentukan dan penggambaran beberapa fungsi yang umum dipergunakan.

3.3.3.1. Fungsi Linier

Fungsi linier merupakan fungsi polinomial yang berbentuk y = ax + b dengan ketentuan:

- a adalah koefisien arah atau gradien atau *slope.*
  a merupakan koefisien garis yang dapat dicari dengan menggunakan pendekatan $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, yang artinya koefisien a mencerminkan besarnya tambahan nilai y untuk setiap tambahan satu unit x yang terjadi.
  Koefisien menunjukan kemiringan suatu garis, jika koefisien berubah maka kemiringan garis tersebut juga berubah.
  Pergerakan kurva dari kiri bawah ke kanan atas atau dari kiri atas ke kanan bawah tergantung dari nilai a. Jika a bernilai positif (a > 0) maka kurvanya bergerak dari kiri bawah ke kanan atas dan sebaliknya jika a bernilai negatif maka (a < 0) maka kurva bergerak dari kiri atas ke kanan bawah.
- b adalah konstanta (*intercept*) garis pada sumbu vertikal y.
  Jika koefisien tetap sementara konstanta berubah maka yang terjadi adalah pergeseran garis tanpa merubah kemiringannya. Sementara itu jika koefisien berubah maka kemiringan garis tersebut juga berubah.



Gambar 3.23

Penggambaran fungsi linier

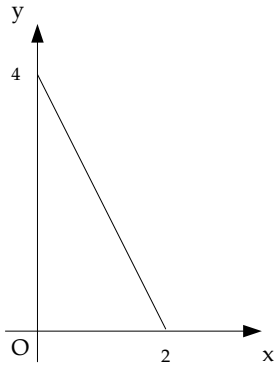
Penggambaran fungsi linier paling mudah dilakukan karena akan menghasilkan sebuah garis lurus dengan cara minimal mencari 2 buah titik koordinat yang memenuhi persamaan tersebut. Untuk mencari titik potong sumbu y, maka nilai x = 0 dan untuk mencari titik potong sumbu x, maka nilai y = 0.

Contoh 1
Buatlah gambar y = f(x) dengan y = 4 – 2x dan tentukan nilai y untuk f(1) dan f(-2)

Jawaban
Titik potong sumbu y didapat saat x = 0, maka y = 4 – 2(0) = 4
Titik potong sumbu x didapat saat y = 0, maka 0 = 4 – 2x sehingga diperoleh nilai x = 2.

x	0	2
y	4	0

Jadi terdapat dua titik koordinat, yaitu (0; 4) dan (2; 0)



Gambar 3.24

Dengan memberikan nilai-nilai tertentu untuk variabel bebas x, lalu disubstitusikan ke dalam persamaan fungsinya, akan diperoleh nilai-nilai variabel terikat y.

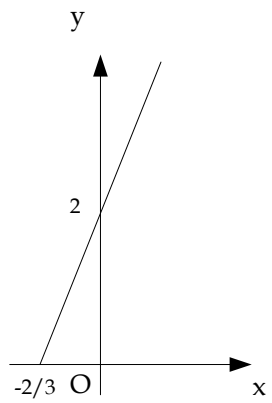
Misal: x = 1 maka y = 4 – 2(1) = 2
x = –2 maka y = 4 – 2(–2) = 8

Contoh 2
Buatlah gambar y = f(x) dengan f(x) = 2 + 3x

Jawaban
Titik potong sumbu y didapat saat x = 0, maka y = 2 + 3(0) = 2
Titik potong sumbu x didapat saat y = 0, maka 0 = 2 + 3x sehingga diperoleh nilai x = –2/3

x	0	–2/3
y	2	0

Jadi terdapat dua titik koordinat, yaitu (0; 2) dan (–2/3; 0).

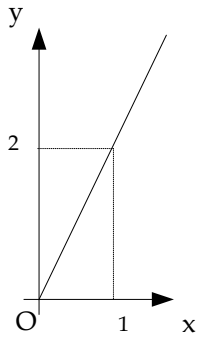


Gambar 3.25

Dalam fungsi linier, jika nilai konstanta/intersep (b) berupa 0, maka persamaan akan menjadi y = ax.

Contoh 3
Buatlah gambar untuk y = 2x

Jawaban
Titik potong sumbu y didapat dengan:
Pada saat x = 0, maka y = 2(0) = 0
Pada saat x = 1, maka y = 2(1) = 2
Jadi koordinat titik potongnya adalah (0; 0) dan (1; 2).

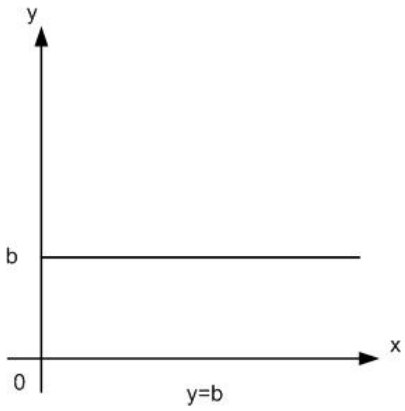


Gambar 3.26

Koefisien a mencerminkan besarnya tambahan nilai y untuk setiap tambahan satu unit x yang terjadi.

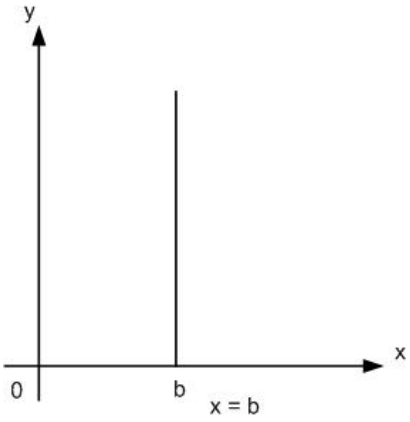
Adakalanya suatu persamaan garis hanya membentuk garis vertikal atau horisontal saja. Hal ini menandakan bahwa besarnya koefisien garis tersebut adalah sama dengan dengan nol (a = 0), sehingga persamaan tersebut hanya berupa konstanta (b). Fungsi ini yang disebut dengan fungsi konstan.

Pada kondisi y = f(x) = ax + b, untuk kemiringan (a) sama dengan 0, maka besarnya y sama dengan konstanta (b) sehingga penggambaran garis liniernya sejajar dengan sumbu x. Berapapun nilai x maka nilai y akan tetap sebesar konstanta (b).



Gambar 3.27

Pada kondisi x = f(y) = ay + b, untuk kemiringan (a) sama dengan 0, maka besarnya x sama dengan konstanta sehingga penggambaran garis liniernya sejajar dengan sumbu y. Berapapun nilai y maka nilai x akan tetap sebesar konstanta (b).



Gambar 3.28

Pada gambar 3.27 dan 3.28 merupakan fungsi konstan.

Pembentukan Fungsi Linier

Pada prinsipnya sebuah fungsi linier dapat dibentuk jika diketahui unsur-unsur yang mendukung, misalnya terdapat konstanta dan koefisien garisnya, atau koordinat titik-titik potong yang memenuhi persamaan tersebut. Model di bawah ini merupakan pembentukan dari fungsi linier dilihat dari data yang tersedia.

1. Model dua titik koordinat
   Apabila dalam suatu kasus terdapat dua buah koordinat titik potong, maka dari kedua koordinat tersebut dapat dicari persamaan liniernya. Misalnya diketahui koordinat titik potong pertama di (x_1, y_1) dan koordinat titik potong kedua di (x_2, y_2), maka persamaan linier dapat dicari menggunakan model pendekatan persamaan garis di bawah ini.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

   Atau umumnya persamaan ditulis:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh 4
Jika diketahui dua buah koordinat titik potong masing-masing adalah sebagai berikut A(1, 4) dan titik B(2, 1), tentukan persamaan garisnya dari kasus tersebut.

Jawaban
Diketahui:
$x_1 = 1$ $x_2 = 2$
$y_1 = 4$ $y_2 = 1$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 4}{x - 1} = \frac{1 - 4}{2 - 1}$$

$y - 4 = -3x + 3$

$y = -3x + 7$

Contoh 5
Diketahui dua buah koordinat titik potong pada suatu garis linier masing-masing adalah sebagai berikut P (2, 7) dan titik S (3, 9), tentukan persamaan garisnya dan berapa nilai y pada saat x = 5.

Jawaban
Diketahui:
$x_1 = 2$ $x_2 = 3$
$y_1 = 7$ $y_2 = 9$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 7}{x - 2} = \frac{9 - 7}{3 - 2}$$

$1(y - 7) = 2(x - 2)$
$y - 7 = 2x - 4$
$y = 2x + 3$

Nilai y pada saat x = 5,
$y = 2x + 3$
$y = 2(5) + 3$
$y = 13$

2. Model titik koordinat dan koefisien
Jika dari kasus tersebut teridentifikasi sebuah titik koordinat dan koefisien garisnya maka persamaan linier dapat ditentukan. Misalnya terdapat sebuah titik koordinat $P(x_1, y_1)$ dan koefisien garisnya adalah a, maka persamaan linier-nya dapat ditentukan menggunakan rumus di bawah ini.

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

Contoh 6
Jika diketahui koordinat titik potong pada K(2, 10) dan koefisien garisnya adalah sebesar 3, dari data tersebut, tentukan persamaan garisnya.

Jawaban
Diketahui:
$x_1 = 2$
$y_1 = 10$
$y - y_1 = b(x - x_1)$
$y - 10 = 3(x - 2)$
$y - 10 = 3x - 6$
$y = 3x + 4$

3. Model konstanta-koefisien
Suatu persamaan linier dapat dibentuk apabila diketahui konstanta dan koefisiennya. Misalnya koefisien arah sebesar a dan konstanta sebesar b, maka persamaan garisnya adalah sebagai berikut.

$y = ax + b$

Dengan: a = koefisien arah
b = konstanta

Contoh 7
Jika diketahui besarnya konstanta adalah 10 dan besarnya koefisien garis adalah 7, tentukan persamaan garisnya.

Jawaban
Diketahui:
a = 7
b = 10
y = ax + b
y = 7x + 10

4. Model dua konstanta

Sebuah persamaan linear dapat ditentukan jika diketahui konstanta pada masing-masing garis di setiap sumbu, yaitu konstanta pada sumbu vertikal (b_1) dan konstanta pada sumbu horisontal (b_2), maka persamaan garisnya dapat dibentuk seperti rumus di bawah ini.

$$y = b_1 - \frac{b_1}{b_2} x$$

Contoh 8
Jika diketahui konstanta pada sumbu vertikal dan horisontal masing-masing adalah 3 dan 2, tentukan persamaan garisnya tersebut.

Jawaban
Diketahui:
$b_1 = 3$
$b_2 = 2$
$y = 3 - \frac{3}{2} x$

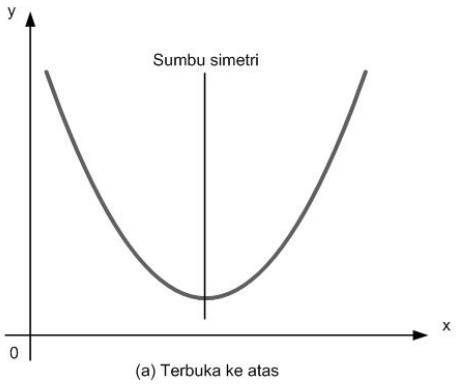
$y = 3 - 1{,}5x$

3.3.3.2. Fungsi Parabola

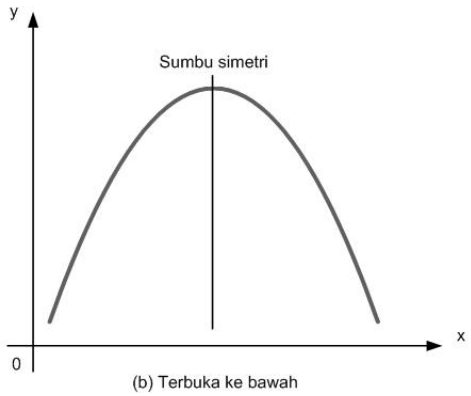
Fungsi parabola merupakan fungsi dimana satu variabel bebas adalah fungsi polynomial tingkat dua, dengan bentuk umum:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Jika fungsi tersebut digambarkan akan membentuk parabola seperti di bawah ini.

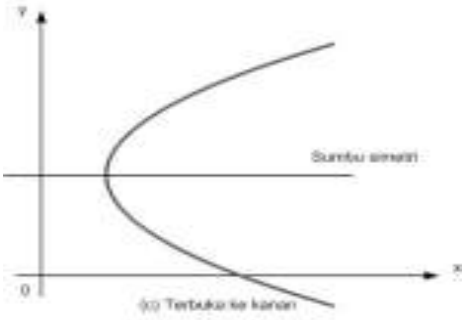


Gambar 3.29

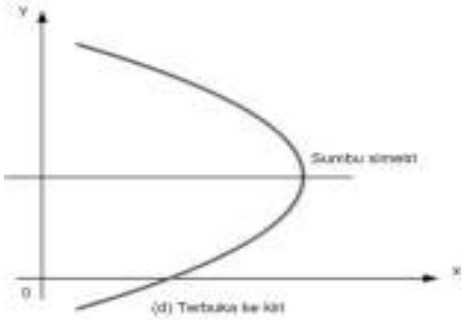


Gambar 3.30

Parabola dapat juga mempunyai bentuk $x = ay^2 + by + c$. Jika fungsi ini digambarkan maka akan seperti gambar di bawah ini.



Gambar 3.31



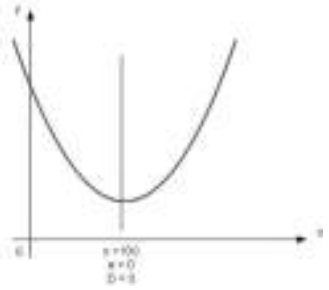
Gambar 3.32

Konsep Penggambaran Fungsi Parabola

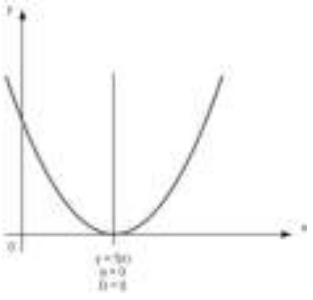
No	y = f(x)	x = f(y)
1.	$y = ax^2 + bx + c$	$x = ay^2 + by + c$
2.	a > 0, parabola membuka ke atas a< 0, parabola membuka ke bawah	a > 0, parabola membuka ke kanan a < 0, parabola membuka ke kiri

No	y = f(x)	x = f(y)
3.	Diskriminan (D) = $(b^2 - 4ac)$ D > 0, parabola memotong sumbu x di dua titik D = 0, puncak parabola menyinggung sumbu x D < 0, parabola tidak memotong maupun menyinggung sumbu x	Diskriminan (D) = $(b^2 - 4ac)$ D > 0, parabola memotong sumbu y di dua titik D = 0, puncak parabola menyinggung sumbu y D < 0, parabola tidak memotong maupun menyinggung sumbu y
4.	Perpotongan parabola pada sumbu x terjadi saat y = 0, sehingga $0 = ax^2 + bx + c$. Nilai x diperoleh dengan pemfaktoran atau rumus kuadratis (rumus abc).	Perpotongan parabola pada sumbu y terjadi saat x = 0, sehingga $0 = a + by + cy^2$. Nilai y diperoleh dengan pemfaktoran atau rumus kuadratis (rumus abc).
5.	Perpotongan parabola pada sumbu y terjadi pada saat x = 0, sehingga y = c.	Perpotongan parabola pada sumbu x terjadi pada saat y = 0, sehingga x = c.
6.	Sumbu simetris, x = –b/2a	Sumbu simetris, y = –b/2a
7.	Titik puncak = (–b/2a ; –D/4a)	Titik puncak = (–D/4a ; –b/2a)

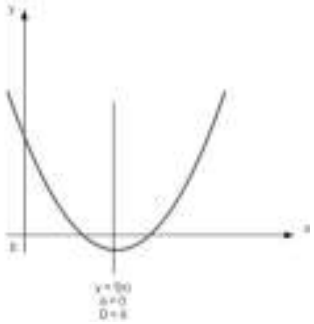
Berikut ini adalah contoh dan ciri-ciri dari bentuk parabola:



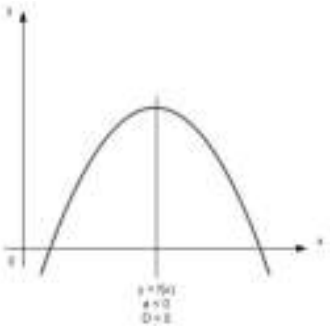
Gambar 3.33



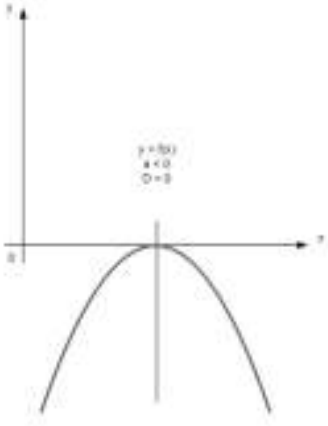
Gambar 3.34



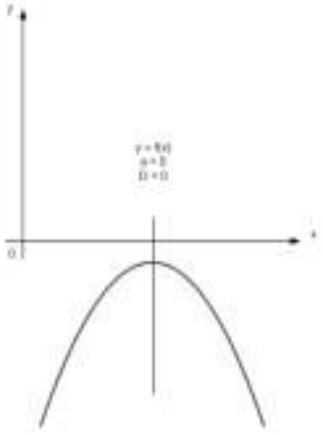
Gambar 3.35



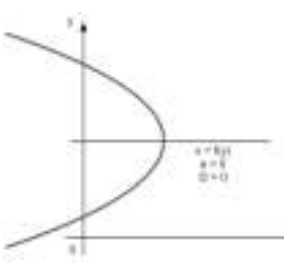
Gambar 3.36



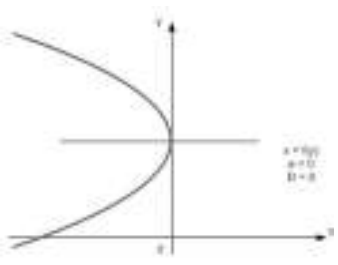
Gambar 3.37



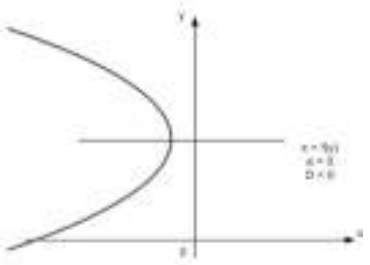
Gambar 3.38



Gambar 3.42



Gambar 3.43



Gambar 3.44

Contoh 1
Buatlah grafik dari fungsi parabola $y = f(x) = - x^2 + 2x + 3$

Jawaban
a = –1, b = 2, dan c = 3
a < 0 sehingga parabola membuka ke bawah
Diskriminan = $D = b^2 - 4ac$
$D = (2)^2 - 4(-1)(3)$
$D = 16$
D > 0 maka mempunyai 2 titik potong pada sumbu x

Perpotongan parabola pada sumbu x terjadi saat y = 0, sehingga:
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x - 3)(x + 1) = 0$
$x_1 = 3$, titik koordinatnya (3, 0)
$x_2 = -1$, titik koordinatnya (–1, 0)

Perpotongan parabola pada sumbu y terjadi pada saat x = 0, sehingga:
y = 3 dan titik koordinatnya (0, 3)

Sumbu simetris: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(-1)} = 1$

Titik puncak : $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

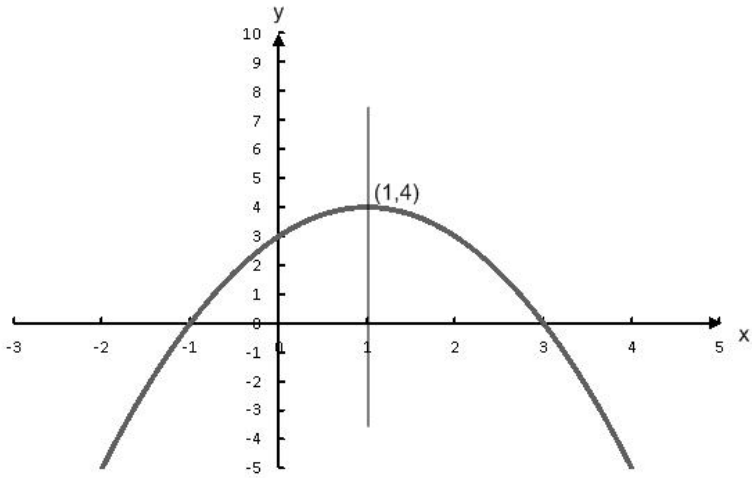
$$\left(\frac{-2}{2(-1)}, \frac{-16}{4(-1)}\right)$$

Sehingga titik puncak adalah (1,4)

atau
Titik puncak: $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

$(1,\ f\ (1))$ ⟶ Keterangan: f (1) = –(1)2 + 2(1) + 3 = 4

Sehingga titik puncaknya adalah (1,4)



Gambar 3.45

Contoh 2
Diketahui grafik dan fungsi parabola $x = 9 - y^2$

Jawaban
a = –1, b = 0, dan c = 9
a < 0 sehingga parabola membuka ke kiri
Diskriminan : $D = b^2 - 4ac$
$D = (0)^2 - 4(-1)(9)$
$D = 36$
D > 0 maka mempunyai 2 titik potong pada sumbu x

Perpotongan sumbu x terjadi pada y = 0 sehingga x = 9, dan titik koordinatnya (9, 0)

Perpotongan sumbu y terjadi pada x = 0, sehingga $9 - y^2 = 0$.
$y^2 = 9$
$y = \pm 3$
$y_1 = 3$, sehingga titik koordinatnya (0, 3)
$y_2 = -3$, sehingga titik koordinatnya (0, –3)

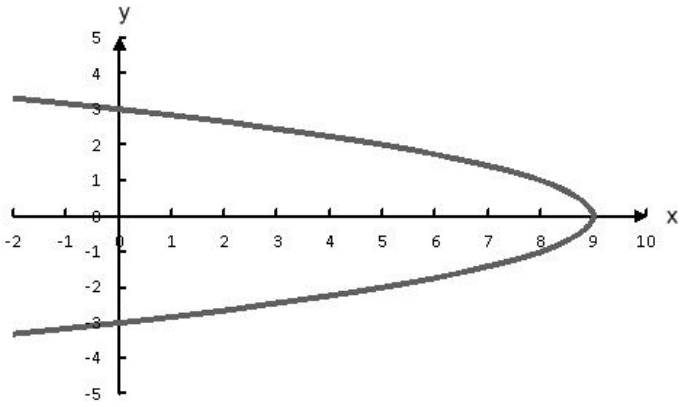
Titik puncak: $\left(\frac{-D}{4a}, \frac{-b}{2a}\right)$

$$\left(\frac{-36}{4(-1)}, \frac{0}{2(-1)}\right)$$

Sehingga titik puncaknya (9,0)

Sumbu simetris: $y = \frac{-b}{2a} = 0$

Gambar



Gambar 3.46

Pembentukan Fungsi Parabola

Terdapat tiga pendekatan yang dapat digunakan untuk mencari persamaan parabola, yaitu:

1. Model tri-koordinat
   Persamaan parabola ini melalui 3 titik koordinat, yaitu A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3).

   Contoh 3
   Tentukan persamaan parabola yang melalui titik A(1, 6), B(0, 2), C(–2, 0)

Jawaban

Fungsi parabola: $y = ax^2 + bx + c$

A (1, 6)→ $6 = a(1)^2 + b(1) + c$

$6 = a + b + c$ ..... persamaan (1)

B (0, 2) $\rightarrow$ $2 = a(0)^2 + b(0) + c$

$2 = c$ ..... persamaan (2)

C (-2, 0) $\rightarrow$ $0 = a(-2)^2 + b(-2) + c$

$0 = 4a - 2b + c$ ..... persamaan (3)

Persamaan (1) dan (2)

$6 = a + b + c$ persamaan (1)

$2 = c$ persamaan (2)

$6 = a + b + 2$

$4 = a + b$ persamaan (4)

Persamaan (2) dan (3)

$0 = 4a - 2b + c$ persamaan (3)

$2 = c$ persamaan (2)

$0 = 4a - 2b + 2$

$-2 = 4a - 2b$ persamaan (5)

Persamaan (4) dan (5)

$4 = a + b$ | x2 $\quad 8 = 2a + 2b$

$-2 = 4a - 2b +$ | x1 $\quad -2 = 4a - 2b +$

$6 = 6a$

$a = 1$

Persamaan (4)

$4 = a + b$

$4 = 1 + b$

$b = 3$

Jadi persamaan kuadratnya adalah: $y = x^2 + 3x + 2$

2. Model titik koordinat-titik puncak

Persamaan kuadrat ini melalui sebuah titik tertentu A(x, y) dan titik puncak $P(x_p, y_p)$ ditentukan oleh $y = a(x - x_p)^2 + y_p$.

Contoh 4

Tentukan fungsi kuadrat dengan titik puncak (3, 5) dan dilalui oleh titik A(2, 6)

Jawaban

$y = a(x - x_p)^2 + y_p$

$6 = a(2 - 3)^2 + 5$
$1 = a(-1)^2$
$a = 1$

$y = a(x - x_p)^2 + y_p$
$y = 1(x - 3)^2 + 5$
$y = x^2 + 6x + 9 + 5$
Jadi persamaan fungsi kuadratnya adalah $y = x^2 - 6x + 14$

3. Model titik koordinat-dua titik potong sumbu x
Persamaan parabola ini grafiknya memotong sumbu x di titik berabsis $x = x_1$ dan $x = x_2$ yang dilalui sebuah titik tertentu A(x, y) adalah $y = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$

Contoh 5
Tentukan persamaan kuadrat dari grafik yang memotong sumbu x di (–1, 0) dan (–2, 0) serta melalui titik A(0, 2).

Jawaban
$y = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$
$y = a(x^2 - (-1 + -2)x + -1. -2)$
$y = a(x^2 + 3x + 2)$

Substitusikan A(0, 2)
$2 = 0(x^2 + 3x + 2)$
$2 = a(2)$
$a = 1$
Jadi persamaan kuadratnya adalah $y = x^2 + 3x + 2$

3.3.4.3. Fungsi Lingkaran

Lingkaran didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik pada suatu bidang yang mempunyai jarak tertentu dari suatu titik yang disebut pusat. Jarak antara titik-titik tersebut dengan pusat disebut jari-jari lingkaran.

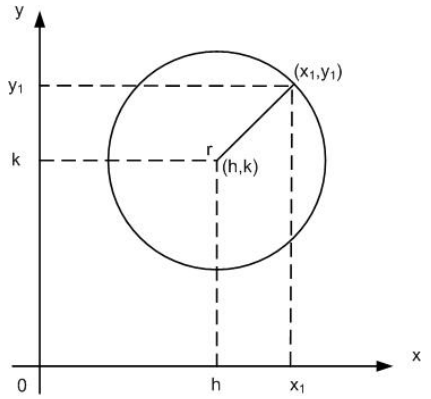
Bentuk umum dari persamaan lingkaran adalah:

$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F =0$
Dengan A = C dengan A, $C \neq 0$

Persamaan lingkaran ini dapat diubah ke dalam bentuk standar persamaan lingkaran menjadi:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

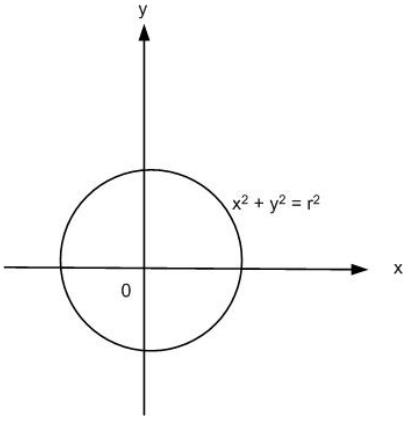
dengan (h, k) = pusat lingkaran
dan r = jari-jari lingkaran



Gambar 3.47

Jika titik pusat lingkaran berhimpit dengan titik asal (0, 0), maka:
$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$
sehingga persamaan menjadi $x^2 + y^2 = r^2$

Gambar dari persamaan tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 3.48

Untuk mengetahui apakah suatu lingkaran ada atau tidak, dapat diketahui pada jari -jari lingkarannya (r^2), yaitu:

- Jika $r^2 < 0$, tidak ada tempat kedudukan riil (tidak ada lingkaran)
- Jika $r^2 = 0$, terdapat kedudukan satu titik (jari-jari = 0 , lingkaran berupa satu titik)
- Jika $r^2 > 0$, tempat kedudukan suatu lingkaran

Contoh 1

Jika bentuk umum lingkaran adalah $x^2 + y^2 – 6x – 8y + 25 = 0$
Tentukanlah titik pusat dari jari-jari lingkaran.

Jawaban

Bentuk standar lingkaran: $(x – h)^2 + (y – k)^2 = r^2$
$x^2 + y^2 – 6x – 8y + 25 = 0$
$x^2 + y^2 – 6x – 8y = –25$
$x^2 – 6x + y^2 – 8y = –25$
$x^2 – 6x + 9 + y^2 – 8y + 16 = –25 + 9 + 16$
$(x^2 – 6x + 9) + (y^2 – 8y + 16) = –25 + 9 + 16$
$(x^2 – 6x + 9) + (y^2 – 8y + 16) = 0$
$(x – 3)^2 + (y – 4)^2 = 0 \rightarrow$ Ingat kembali rumus $(x – h)^2 + (y – k)^2 = r^2$
Dengan $r^2 = 0$ artinya terbentuk lingkaran satu titik dengan titik pusat lingkaran (3, 4).

Contoh 2

Jika bentuk umum lingkaran adalah $x^2 + y^2 – 6x – 8y + 16 = 0$
Tentukanlah titik pusat dari jari-jari lingkaran.

Jawaban

Bentuk standar lingkaran: $(x – h)^2 + (y – k)^2 = r^2$
$x^2 + y^2 – 6x – 8y + 16 = 0$
$x^2 + y^2 – 6x – 8y = –16$
$(x^2 – 6x + 9) + (y^2 – 8y + 16) = –16 + 9 + 16$
$(x^2 – 6x + 9) + (y^2 – 8y + 16) = 9$
$(x – 3)^2 + (y – 4)^2 = 9$
Dengan $r^2 = 9$ yang berarti jari-jari r = 3 , maka terbentuk lingkaran dengan titik pusat (3, 4)

1.1.1.4. Fungsi Ellip

Ellip didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik pada suatu bidang yang jarak dari dua titiknya konstan. Ellip mempunyai dua sumbu simetri yang saling tegak lurus. Sumbu yang panjang disebut sumbu utama, sedangkan sumbu yang pendek disebut sumbu minor. Titik potong sumbu tersebut disebut titik pusat ellip.

Bentuk umum dari persamaan ellip adalah:

Ax2+Cy2+Dx+Ey+F =0

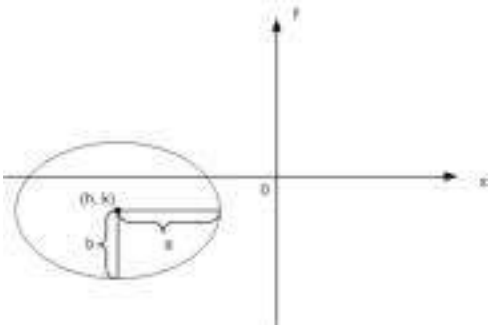
A ≠ C, A dan C bertanda sama

Persamaan ellip ini dapat diubah ke dalam bentuk standar persamaan ellip menjadi:

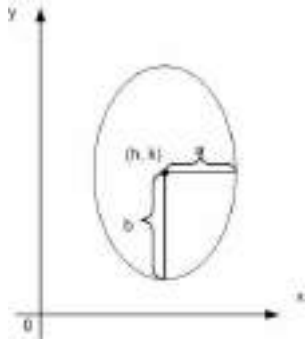
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Dengan:

- h, k = pusat ellip
- a = sumbu horisontal (sejajar sumbu x)
- b = sumbu vertikal (sejajar sumbu y)



Gambar 3.49



Gambar 3.50

Untuk mengetahui apakah suatu ellip ada atau tidak, dapat diketahui dari persamaannya, yaitu:

- Jika $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=c$, maka tidak ada tempat kedudukan riil (tidak ada ellip)

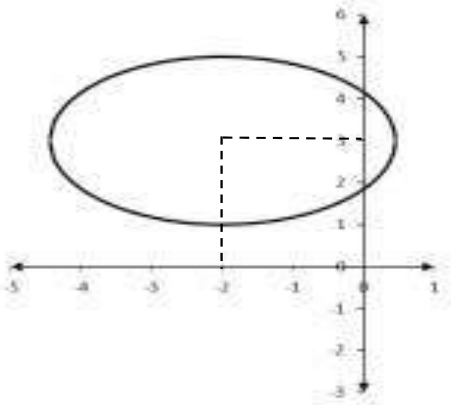
- Jika $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$, terdapat kedudukan satu titik (ellip berupa satu titik)
- Jika $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, terdapat kedudukan suatu ellips

Contoh 1
Jika bentuk umum ellip adalah $4x^2 + 6y^2 + 16x - 36y + 46 = 0$
Tentukanlah titik pusat dari ellip!

Jawaban
$4x^2 + 6y^2 + 16x - 36y + 46 = 0$
$4x^2 + 16x + 6y^2 - 36y = -46$
$4x^2 + 16x + 16 + 6y^2 - 36y + 54 = -46 + 16 + 54$
$4(x^2 + 4x + 4) + 6(y^2 - 6y + 9) = 24$
$4(x + 2)^2 + 6(y - 3)^2 = 24$

$$\frac{\cancel{4}(x+2)^2}{\cancel{4}.6}+\frac{\cancel{6}(y-3)^2}{4.\cancel{6}}=\frac{24}{4.6}$$

$$\frac{(x+2)^2}{(\sqrt{6})^2}+\frac{(y-3)^2}{(2)^2}=1 \quad \rightarrow \quad \textbf{Ingat kembali rumus } \frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



Gambar 3.51

Keterangan: Pusat ellip (–2, 3) dengan sumbu mayor = $2\sqrt{6}$ dan sumbu minor = 4

3.3.1.5. Fungsi Hiperbola

Hiperbola didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik yang jaraknya dari dua titik tertentu konstan. Hiperbola mempunyai dua sumbu simetri yang titik potongnya merupakan pusat hiperbola. Sumbu yang memotong hiperbola dengan melalui pusat hiperbola disebut sumbu lintang.
Bentuk umum dari persamaan hiperbola adalah:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

B = 0, A dan C berlawanan tanda

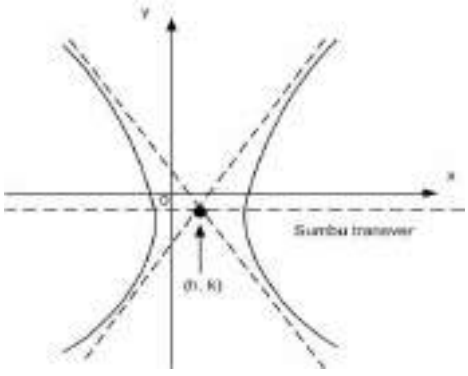
Persamaan hiperbola ini dapat diubah ke dalam bentuk standar persamaan ellip menjadi:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

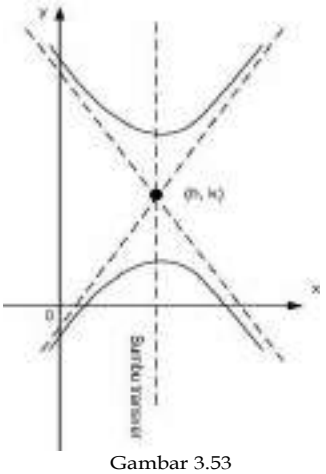
Dengan (h, k) = pusat ellip dan sumbu lintang sejajar sumbu x

$$\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$$

Dengan (h, k) = pusat ellip dan sumbu lintang sejajar sumbu y



Gambar 3.52



Gambar 3.53

Untuk hiperbola, tidak ada kemungkinan tempat kedudukannya adalah imajiner.

Contoh 1

Jika bentuk umum hiperbola adalah $2y^2 - 12y - x^2 + 6x + 7 = 0$
Tentukanlah titik pusat dari hiperbola dan gambarkan!

Jawaban

$2y^2 - 12y - x^2 + 6x + 7 = 0$
$2y^2 - 12y + 18 - x^2 + 6x - 9 = -7 + 18 - 9$
$(2y^2 - 12y + 18) - (x^2 - 6x + 9) = 2$
$2(y^2 - 6y + 9) - 1(x^2 - 6x + 9) = 2$

$$\frac{2(y-3)^2}{2.1} - \frac{1(x-3)^2}{2.1} = \frac{2}{2.1}$$

$$\frac{(y-3)^2}{(1)^2} - \frac{(x-3)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \text{Ingat kembali rumus } \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

Keterangan: Pusat hiperbola (3, 3) dengan a = √2 dan b = 1 serta sumbu lintang sejajar dengan sumbu y.

Asimtot:

$$y - 3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(x-3)$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(x-3) + 3$$

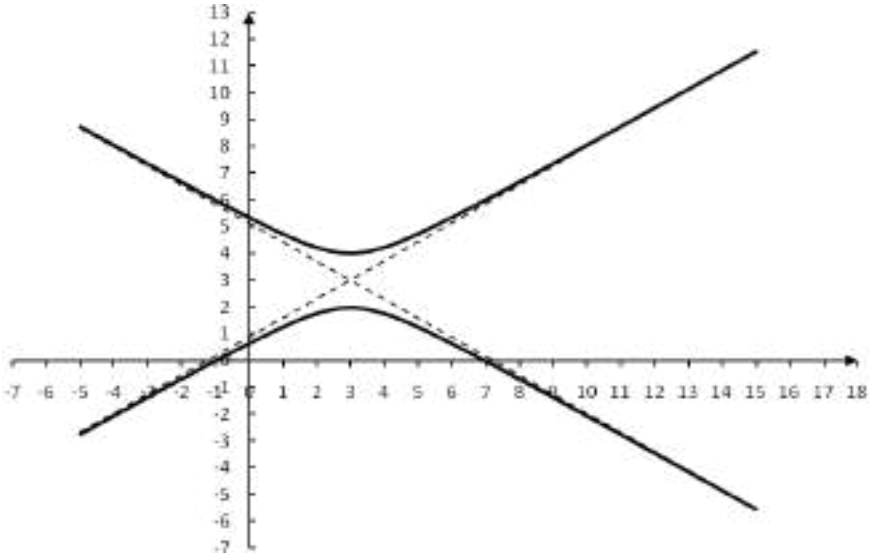
Jadi kedua asimtotnya adalah:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-3) + 3$$

Jika x = 0 maka y ≈ 0,87
Jika y = 0 maka x ≈ -1, 23

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-3) + 3$$

Jika x = 0 maka y ≈ 5,13
Jika y = 0 maka x ≈ 7, 23



Gambar 3.54

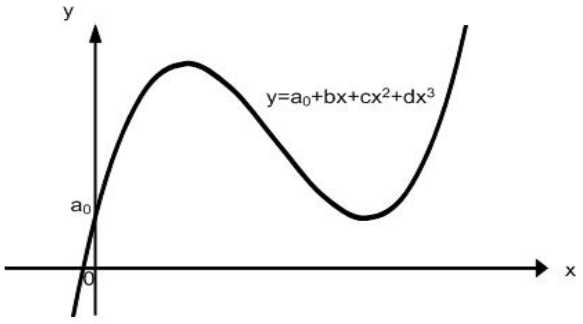
1.1.1.6. Fungsi Kubik

Polynomial berderajat 3 dengan satu variabel bebas disebut juga sebagai fungsi kubik dan mempunyai bentuk umum, yaitu:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad \text{dengan } a \neq 0$$

Pada umumnya grafik mempunyai dua titik ekstrim/kritis yaitu titik maksimum dan titik minimum, tetapi dalam kondisi khusus tidak memiliki titik maksimum dan minimum.

Fungsi kubik ini bila digambarkan kurvanya mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:



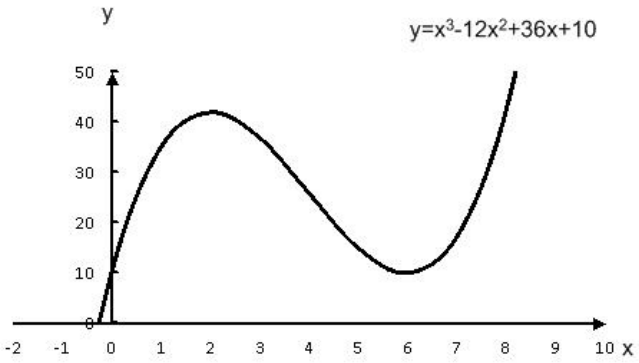
Gambar 3.55

Contoh 1
Buat grafik dari fungsi $y = x^3 - 12x^2 + 36x + 10$

Jawaban
Titik kritis :
$y' = 0$
$y' = 3x^2 - 24x + 36$
$= x^2 - 8x + 12$
$= (x - 6)(x - 2)$

Titik kritis (2, 42) , titik maksimum karena $y'' = 6x - 24 = -12$
Titik kritis (6, 10) , titik minimum karena $y'' = 6x - 24 = 12$

Titik potong grafik dengan sumbu y (saat x = 0) yaitu:
$y = 0^3 - 12(0)^2 + 36(0) + 10 = 10$
Jadi titik potong : (0,10)

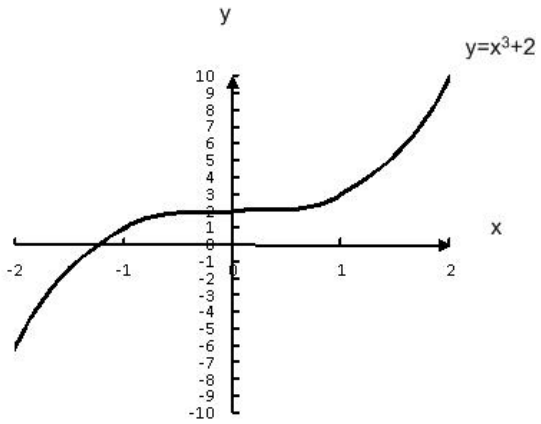


Gambar 3.56

Contoh 2
Buat grafik dari fungsi $y = x^3 + 2$

Jawaban
Titik kritis :
$y' = 0$
$y' = 3x^2$

Titik kritis (0, 2), bukan titik maksimum dan juga bukan titik minimum karena $y'' = 0$



x	y
-1	1
0	2
1	3

Gambar 3.57

1.1.1.7. Fungsi rasional

Merupakan suatu fungsi yang dibentuk dari pembagian suatu fungsi polinomial dengan fungsi polinomial yang lain dengan bentuk umum:

$$y = \frac{g(x)}{h(x)}$$

syarat $h(x) \neq 0$

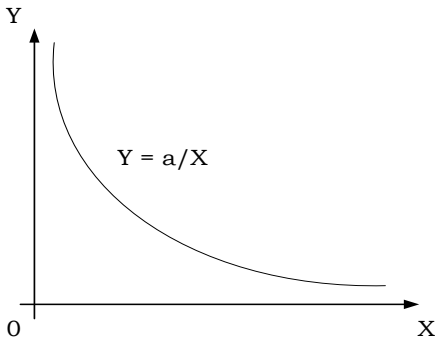
Fungsi rasional ini bila digambarkan maka kurvanya akan berbentuk hiperbola tegak (hiperbola ortogonal) dan mempunyai sepasang sumbu asimtot yaitu asimtot datar dan asimtot tegak. Sumbu asimtot adalah garis lurus yang didekati kurva hiperbola tetapi kurva tersebut tidak pernah memotong maupun menyinggung garis lurus yang ada.

Fungsi rasional ada beberapa bentuk, diantaranya:

1. Apabila fungsi rasional berbentuk:

$$y = \frac{a}{x} \text{ atau } xy = a \text{ dengan } a > 0$$

Kurva dari bentuk fungsi rasional di atas adalah hiperbola ortogonal dan mempunyai dua sumbu asimtot yaitu sumbu asimtot tegak yang berhimpit dengan sumbu Y, dan sumbu asimtot datar yang berhimpit dengan sumbu X.

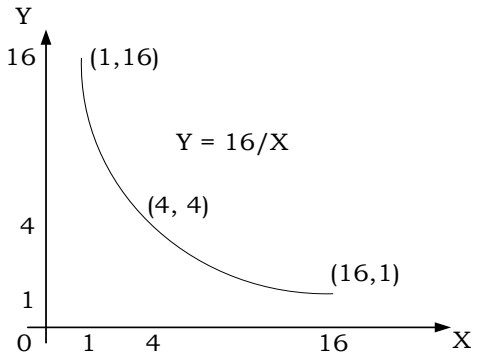


Gambar 3.58

Contoh 1
Buatkan grafik dari fungsi rasional $y = \frac{16}{x}$

Jawaban
Jika X = 1, maka Y = 16, sehingga titik koordinatnya (1, 16)
Jika X = 4, maka Y = 4, sehingga titik koordinatnya (4, 4)
Jika X = 16, maka Y = 1, sehingga titik koordinatnya (16, 1).

Asimtot datar y = 0
Asimtot tegak x = 0



Gambar 3.59

2. Apabila fungsi rasional berbentuk :

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Kurva dari bentuk fungsi rasional di atas adalah berupa hiperbola ortogonal yang memotong sumbu x di titik $(\frac{-b}{a}, 0)$ dan memotong sumbu y di titik $(0, \frac{b}{d})$. Asimtot datar yaitu garis $y = \frac{a}{c}$ dan asimtot tegak yaitu $x = \frac{-d}{c}$

Contoh 2
Buatkan grafik dari fungsi rasional $y = \frac{4x - 12}{2x - 8}$

Jawaban

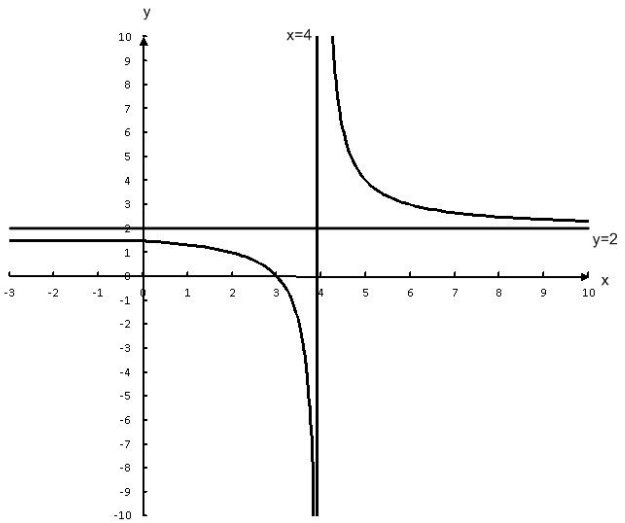
a = 4, b = 12, c = 2, d = -8, maka

Perpotongan kurva dengan sumbu x di titik $(-\frac{-12}{4}, 0)$ atau (3; 0)

Perpotongan kurva dengan sumbu y di titik $(0, \frac{-12}{-8})$ atau (0; 1,5)

Asimtot datar yaitu garis $y = \frac{4}{2} = 2$

Asimtot tegak yaitu $x = \frac{-(-8)}{2} = 4$



Gambar 3.60

1.1.1.8. Fungsi Eksponen

Fungsi eksponensial merupakan fungsi yang variabel bebasnya merupakan pangkat dari suatu konstanta dengan ketentuan konstanta tersebut bukan nol.

Bentuk umum:

$$y = a + b.c^{dx+e}$$

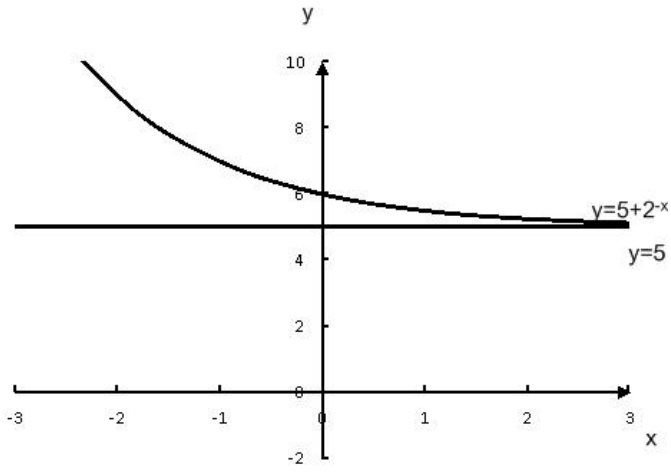
Keterangan:

- a, b, c, d, dan e adalah konstanta dengan $b \neq 0$, $c > 1$, $d \neq 0$

Grafik fungsi eksponen mempunyai asimtot datar yaitu y = a.
Apabila koefisien x positif maka grafik fungsi mendekati asimtot pada x $\rightarrow -\infty$(negatif tak terhingga)
Apabila koefisien x negatif maka grafik fungsi mendekati asimtot pada x $\rightarrow \infty$(positif tak terhingga)

Contoh 1
Buatlah grafik dari fungsi eksponen: $y = 5 + 2^{-x}$

Jawaban
A = 5, b = 1, c = 2, d = –1, dan e = 0
Asimtot datar y = 5
d negatif , maka grafik mendekati x tak terhingga yang positif
Perpotongan grafik dengan sumbu y yaitu pada saat x=0 maka diperoleh titik (0,6)



Gambar 3.61

1.1.1.9. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma merupakan fungsi *inverse* dari fungsi eksponensial, variabel bebasnya merupakan bilangan logaritma.

Bentuk umum: $y = {}^{a}\log x.$

Keterangan: a adalah bilangan pokok, a > 1 dan 0 < a < 1

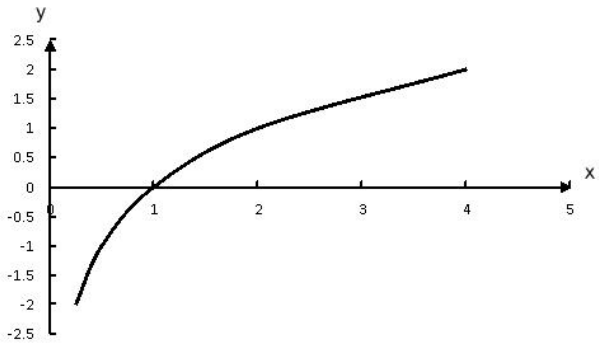
Grafik fungsi logaritma memotong sumbu x di titik (1,0), mempunyai asimtot tegak yaitu sumbu y. Apabila $0 < a < 1$ maka grafik fungsi turun, dan apabila $a > 1$ maka grafik fungsi naik.

Contoh 1

Buatlah grafik dari fungsi logaritma $y = {}^{2}\log x$

Jawaban

x	y
1/4	–2
1/2	–1
1	0
2	1
4	2



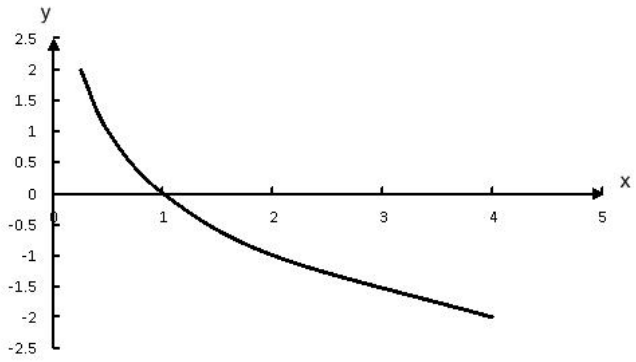
Gambar 3.62

Contoh 2

Buatlah grafik dari fungsi logaritma $y = {}^{0,5}\log x$

Jawaban

x	y
1/4	2
1/2	1
1	0
2	–1
4	–2



Gambar 3.63

3.3.4. Pergeseran fungsi

Suatu fungsi dapat digeser ke kanan atau kiri sebesar konstanta (a) dengan a > 0, dan dapat pula digeser ke atas atau ke bawah sebesar konstanta (b) dengan b > 0.

Pergeseran fungsi ke kanan sejauh a mengubah fungsi menjadi: $y = f(x - a)$
Pergeseran fungsi ke kiri sejauh a mengubah fungsi menjadi: $y = f(x + a)$
Pergeseran fungsi ke atas sejauh a mengubah fungsi menjadi: $y = f(x) + b$
Pergeseran fungsi ke kanan sejauh a mengubah fungsi menjadi: $y = f(x) - b$

Contoh 1

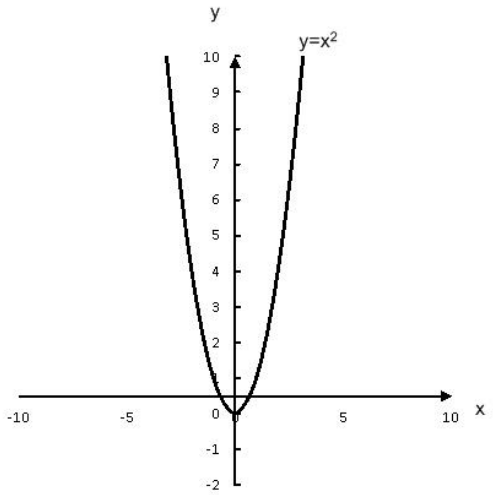
Geserlah ke kanan 3 dan ke atas 4 dari fungsi $y = x^2$, buatkan grafik sebelum dan sesudah pergeseran

Jawaban

Fungsi awal: $y = x^2$
Apabila fungsi digeser ke kanan sebesar 3 maka $y = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
Apabila fungsi digeser ke atas sebesar 4 maka $y = x^2 + 4$
Maka apabila fungsi tersebut digeser ke kanan sebesar 3 dan ke atas sebesar 4 maka fungsi menjadi :

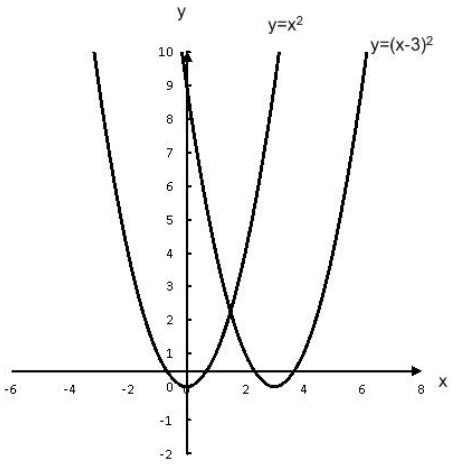
$$y = (x - 3)^2 + 4$$
$$= x^2 - 6x + 9 + 4$$
$$= x^2 - 6x + 13$$

Grafik awal



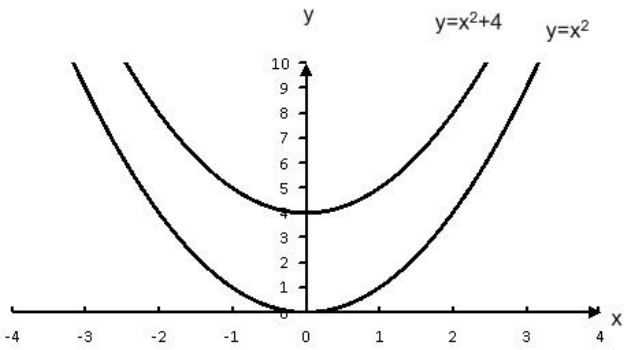
Gambar 3.64

Pergeseran grafik ke kanan



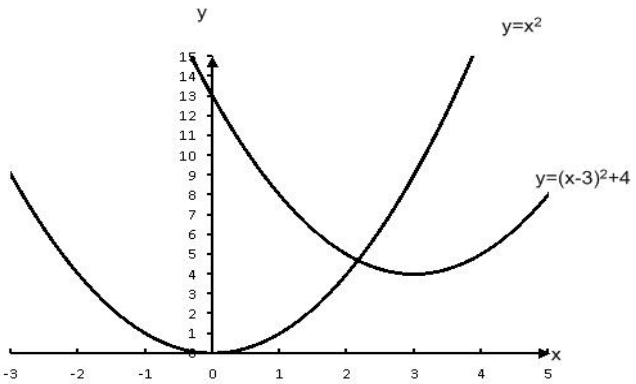
Gambar 3.65

Pergeseran grafik ke atas



Gambar 3.66

Pergeseran grafik ke kanan dan ke atas



Gambar 3.67

3.3.5. Perpotongan 2 buah grafik

Dalam dua buah persamaan linier yang saling berhubungan terdapat penyelesaian dengan melibatkan kedua persamaan tersebut. Maksud dari kalimat terebut adalah bahwa kita dapat mencari nilai-nilai dari suatu variabel dalam persamaan dengan melibatkan persamaan yang lainnya dimana kedua persamaan tersebut memiliki saling ketergantungan (berhubungan). Pencarian nilai variabel dari suatu persamaan tidak mungkin dilakukan dengan menggunakan persamaan itu sendiri. Dalam penyelesaian model ini menggunakan sistem persamaan linier. Terdapat dua metode penyelesaian yang dapat dilakukan, yaitu menggunakan metode eliminasi dan/atau substitusi.

1. Metode eliminasi

   Metode ini dilakukan dengan cara menghapus (menghilangkan) secara sementara salah satu variabel untuk mencari variabel lainnya.

   Langkah-langkah metode eliminasi (misalnya terdapat dua variabel, yaitu x dan y):

   a. pilih satu variabel yang akan dieliminasi (misalnya variabel x),
   b. samakan nilai koefisien pada variabel yang akan dieliminasi dengan cara mengalikan dengan bilangan tertentu,
   c. hilangkan variabel tersebut dengan cara mengurangi atau menambah (tergantung tanda pada koefisien tersebut),
   d. menentukan nilai variabel lainnya (variabel y).
   e. menentukan nilai variabel x dengan cara melakukan substitusi nilai variabel x ke dalam persamaan mula-mula (persamaan 1 atau 2).

2. Metode Substitusi

   Metode ini dilakukan dengan cara menggantikan nilai salah satu variabel (misalnya x) dengan sebuah persamaan lainnya sang saling berkaitan tersebut.

   Langkah-langkah metode substitusi (misalnya terdapat dua variabel, yaitu x dan y):

   a. pilih satu persamaan yang akan diubah menjadi $x = f(y)$ atau $y = f(x)$,
   b. ubahlah persamaan tersebut sesuai dengan yang diinginkan (misalnya diubah menjadi $y = f(x)$) dan diperoleh persamaan ketiga,
   c. substitusikan persamaan ketiga tersebut ke dalam persamaan yang lainnya.
   d. lakukan proses perhitungan dan kemudian diperoleh nilai variabel x,
   e. lakukan substitusi nilai x (untuk mendapatkan nilai y) pada persamaan ketiga.

Contoh 1
Tentukan nilai x dan y baik secara eliminasi maupun substitusi dari kedua persamaan di bawah ini:

7x – 3y = 5.....(1)
4x + 2y = 14.....(2)

Jawaban
Metode eliminasi:
7x – 3y = 5, persamaan ini dikalikan 2
4x + 2y = 14, persamaan ini dikalikan 3

14x – 6y = 10
12x + 6y = 42 +
26x = 52
x = 2

untuk mendapatkan nilai y, lakukan substitusi nilai x ke persamaan (1) atau (2)

7x – 3y = 5
7(2) – 3y = 5
–3y = 5 – 14
y = 3

Metode substitusi:

7x – 3y = 5
7x = 5 + 3y
x = (5 + 3y)/7
x = 5/7 + 3y/7.....(3)

4x + 2y = 14
4(5/7 + 3y/7) + 2y = 14
20/7 + 12y/7 + 2y = 14
26y/7 = 78/7
y = 3

substitusikan nilai y = 3 ke persamaan ketiga
x = 5/7 + 3y/7
x = 5/7 + 3(3)/7
x = 2

Sistem persamaan linier di atas pada prinsipnya sama dengan pencarian titik potong dari dua buah persamaan garis linier. Proses pencariannya adalah dengan menyamakan variabel untuk mendapatkan nilai variabel lain. Sebagai contoh dapat kita gunakan kedua persamaan linier di atas.

$7x - 3y = 5$.....(1)
$4x + 2y = 14$.....(2)

Persamaan (1) diubah menjadi $x = (5 + 3y)/7$ dan persamaan (2) diubah menjadi $x = (14 - 2y)/4$. Dengan menyamakan variabel, maka dapat diperoleh nilai variabel y.

$(5 + 3y)/7 = (14 - 2y)/4$
$20 + 12y = 98 - 14y$
$26y = 78$
$y = 3$

$x = (14 - 2y)/4$
$x = (14 - 2(3))/4$
$x = 2$

3.4 SOAL LATIHAN

1. Dari fungsi-fungsi di bawah ini, buatlah gambarnya dan tentukan nilai variabelnya pada f(2)
   a. $y = 2x$
   b. $y = 3x + 4$
   c. $y = 2x - 7$
   d. $y = -2 + 3x$
   e. $y = 4 - 0{,}75x$
   f. $x = 2 - 4y$
   g. $x = -4 + y$
   h. $x = 5y + 2$
   i. $x = -6y - 1$
   j. $x = 0{,}25y - 8$

2. Carilah persamaan linier dari dua buah titik koordinat di bawah ini:
   a. (0, 3) dan (2, 17)
   b. (2, –7) dan (4, –15)
   c. (1, 2) dan (3, 3)
   d. (4, –1) dan (8, 4)

3. Carilah persamaan linier yang memiliki titik potong pada (2, 5) dan mempunyai koefisien sebesar:
   a. –3
   b. 1
   c. 4
   d. 0

4. Misalkan y = 4 – 5x, tentukan
   a. f(0) c. f(-2)
   b. f(2) d. f(7)

5. Tentukan koefisien (slope) dan konstanta (intercept) dari persamaan-persamaan di bawah ini:
   a. y = x c. y = 2 – 7x
   b. y = 4x + 3 d. y = –5 – x

6. Jika diketahui konstanta pada sumbu vertikal dan horisontal masing-masing pada soal di bawah ini, tentukan persamaan garisnya tersebut
   a. –2 dan 4 c. 2 dan 2
   b. 1 dan 3 d. 4 dan –1

7. Dari fungsi-fungsi kuadrat di bawah ini, tentukan:
   - koordinat titik potong sumbu y-nya,
   - koordinat titik potong sumbu x-nya,
   - titik puncak,
   - sumbu simetris,
   - gambarkan grafiknya,
   - berapa nilai y (soal a – e) pada saat f(1) dan berapa nilai x (soal f – j) pada saat f(2)

   a. $y = x^2 + x - 2$
   b. $y = -x^2 + 4x + 5$
   c. $y = 2x^2 + x - 3$
   d. $y = x^2 - 4$
   e. $x = y^2 + 3y - 4$
   f. $x = -y^2 + 2y + 8$
   g. $x = y^2 + 2y$
   h. $x = 3y^2 - 2y - 8$

8. Buatlah grafik fungsi kubik berikut:
   a. y = -x3 + 1
   b. y = x3 + 5

9. Buatlah grafik fungsi rasional:
   $$y = \frac{20 - 15x}{5x + 10}$$

10. Buatlah grafik fungsi eksponen:
    a. $y = 3^x$
    b. $y = 3 + 2^{x+1}$
11. Buatlah grafik fungsi logaritma berikut:
    a. $y = \log x$
    b. $y = {}^{1/4}\log x$
    c. $y = \ln x$
12. Tentukan nilai x dan y dari dua buah persamaan di bawah ini.
    a. $x + y = 4$
       $2x + 3 = 9$
    b. $4x + 3y = 17$
       $3x + 4y = 18$
    c. $4x + 6y = 14$
       $8x + 7y = 18$
    d. $2x + 8y = 10$
       $3x + 10y = 11$
13. Tentukan titik potong dari persamaan-persamaan garis di bawah ini.
    a. $y = -4 + 8x$ dan $y = 4 + 4x$
    b. $y = -3 + 3x$ dan $y = 3$
    c. $y = 6$ dan $y = 12 - 2x$
    d. $y = 2 + 3x$ dan $y = 12 - 2x$
14. Tentukan nilai x, y dan z dari tiga buah persamaan di bawah ini.
    a. $x + y + z = 6$
       $2x + y + z = 7$
       $x + 2y + z = 8$
    b. $2x + 3y + 4z = 9$
       $3x + 2y + 3z = 8$
       $4x + 3y + 2z = 9$
    c. $3x - 2y - z = 4$
       $-x + 4y + 2z = 7$
       $4x - 2y - 2z = 8$
    d. $2x + 3y + 2z = 1$
       $3x + 6y + 4z = 1$
       $-0{,}5x - 2y - 0{,}5z = 1$

Bab 4

PENERAPAN FUNGSI DALAM ILMU EKONOMI

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Menentukan dan menggambarkan kurva permintaan dan kurva penawaran;
2. Menentukan titik koordinat dan menggambarkan titik keseimbangan pasar (*equilibrium*);
3. Mencari keseimbangan pasar sebelum dan sesudah pajak atau subsidi;
4. Menentukan besarnya pajak yang diterima oleh pemerintah dan yang ditanggung oleh konsumen atau produsen;
5. Menentukan besarnya subsidi diberikan pemerintah dan yang diterima oleh konsumen atau produsen;
6. Menentukan unit produksi dan satuan mata uang (smu) pulang pokoknya serta menggambarkan grafiknya;
7. Menentukan besarnya konsumsi dan tabungan pada saat pendapatan nasional tertentu dan menggambarkan grafiknya;
8. Menentukan besarnya pendapatan nasional dua, tiga, dan empat sektor serta menggambarkan grafiknya.

4.1. FUNGSI PERMINTAAN (*DEMAND FUNCTION*)

Kegiatan ekonomi melibatkan variabel-variabel yang mempengaruhi dan dipengaruhi. Dalam fungsi permintaan, jumlah produk yang diminta merupakan variabel yang dipengaruhi, sedangkan variabel yang mempengaruhi adalah harga dan beberapa variabel yang lain. Fungsi permintaan merupakan hubungan antara jumlah produk yang akan dibeli konsumen dengan beberapa variabel lain yang mempengaruhinya pada jangka waktu tertentu.

Variabel yang mempengaruhi permintaan terhadap suatu produk adalah:

1. Harga produk itu sendiri;
2. Harga produk-produk lain yang berkaitan erat dengan produk tersebut (produk substitusi/komplementer);
3. Pendapatan rumah tangga dan pendapatan rata-rata masyarakat;
4. Pendapatan dalam masyarakat;
5. Selera masyarakat;
6. Jumlah penduduk (population);
7. Ekspektasi mengenai kondisi di masa yang akan datang.

Secara matematis fungsi permintaan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Qx = f(Px, Py, Y, S, Qp)$$

Keterangan:

Q_x = jumlah produk X yang diminta oleh konsumen
P_x = harga produk X
P_y = harga produk-produk lain yang memiliki hubungan dengan produk X, hubungan tersebut dapat bersifat substitusi atau komplementer
Y = pendapatan konsumen
S = selera dari konsumen
Qp = jumlah penduduk

Hubungan jumlah produk (Q_x) yang diminta dengan harga (P_x) pada umumnya memiliki hubungan negatif, yaitu apabila harga produk naik maka jumlah produk yang diminta turun dan sebaliknya. Pengaruh harga produk lain (P_y) terhadap jumlah produk yang diminta memiliki hubungan positif apabila produk lain tersebut adalah bersifat substitusi dari produk X dan memiliki hubungan negatif apabila produk lain tersebut adalah bersifat komplementer. Hubungan pendapatan (Y) dengan produk X yang diminta tergantung pada jenis produk (produk normal/keharusan, produk bermutu rendah atau produk mewah). Hubungan selera (S) dengan produk X memiliki hubungna positif apabila menyukai produk tersebut maka permintaan akan bertambah tinggi dan sebaliknya. Hubungan jumlah penduduk (Qp) dengan produk X memiliki hubungan positif artinya bertambah jumlah penduduk maka jumlah produk yang diminta akan bertambah pula dan sebaliknya.

Dalam fungsi permintaan suatu produk, pada umumnya yang menjadi pertimbangan utama konsumen adalah harga dari produk itu sendiri (Px). Berdasarkan hal tersebut, variabel-variabel selain harga barang itu sendiri diasumsikan konstan (*ceteris paribus)*, yaitu dengan menganggap variabel-variabel lain tersebut tidak mengalami perubahan.

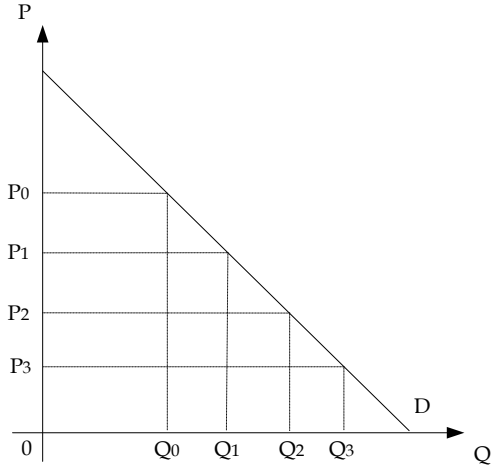
Dengan demikian, penulisan fungsi permintaan adalah:

$$Q_x = f(P_x)$$

Hukum permintaan:
Jika harga produk naik, maka jumlah produk yang diminta akan turun dan sebaliknya jika harga produk turun maka jumlah produk yang diminta akan naik (dengan asumsi variabel lain yang memperngaruhi permintaan tidak berubah/ tetap).

Kurva permintaan (*Demand curve*)

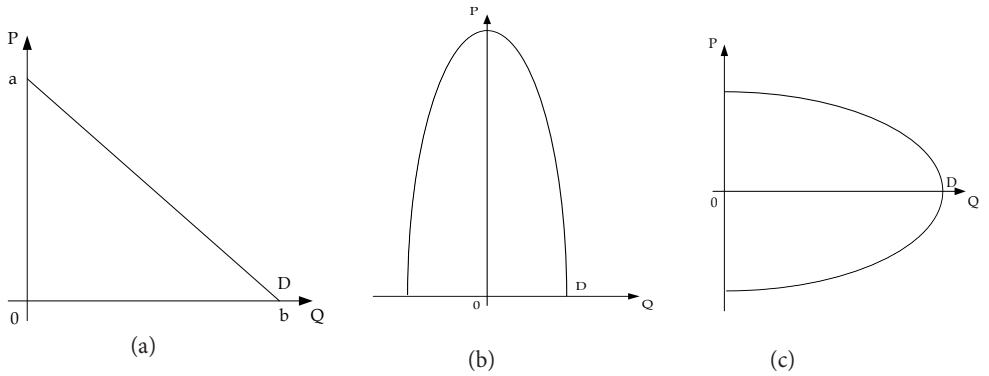
Kurva permintaan merupakan tempat kedudukan titik-titik dari berbagai jumlah produk yang diminta pada berbagai tingkat harga tertentu. Berdasarkan ciri hubungan antara permintaan dan harga maka dapat dibuat grafik kurva permintaan sebagai berikut:



Gambar 4.1.

Keterangan :
D = kurva permintaan (*Demand Curve*)

Pembentukan kurva permintaan dapat dinyatakan dalam bentuk linier maupun non-linier.



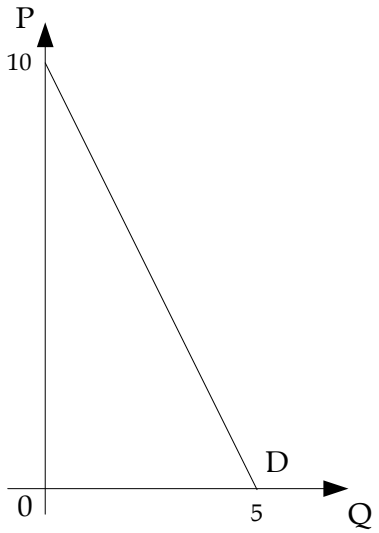
Gambar 4.2.

Keterangan:
Gambar 4.2.(a) adalah kurva permintaan linier
Gambar 4.2.(b) dan (c) adalah kurva permintaan non linier
Harga per unit maupun kuantitas produk selalu berada pada kuadran pertama sehingga P maupun Q lebih besar sama dengan nol.

Contoh 1
Gambarkan grafik fungsi permintaan Q = 5 – 0,5P. Tentukan kuantitas maksimal yang dibeli konsumen dan harga tertinggi yang sanggup dibayar.

Jawaban
Titik potong pada sumbu Q terjadi jika P = 0,
Q = 5 – 0,5P
Q = 5 – 0,5(0)
Q = 5
(5 ; 0)

Titik potong pada sumbu P terjadi jika Q = 0,
Q = 5 – 0,5P
0 = 5 – 0,5P
0,5P = 5
P = 10
(0 ; 10)



Gambar 4.3.

Kuantitas maksimal yang dibeli konsumen (terjadi pada saat P = 0) adalah 5. Harga tertinggi yang dibayar konsumen (terjadi pada saat Q = 0) adalah 10.

Contoh 2

Gambarkan grafik fungsi permintaan $Q = 16 - P^2$. Tentukan kuantitas produk maksimal yang dibeli konsumen dan harga tertinggi yang sanggup dibayar.

Jawaban

Titik potong pada sumbu Q terjadi jika P = 0 ,

$Q = 16 - 0$

$Q = 16$

(16 ; 0)

Titik potong pada sumbu P terjadi jika Q = 0,

$0 = 16 - P^2$

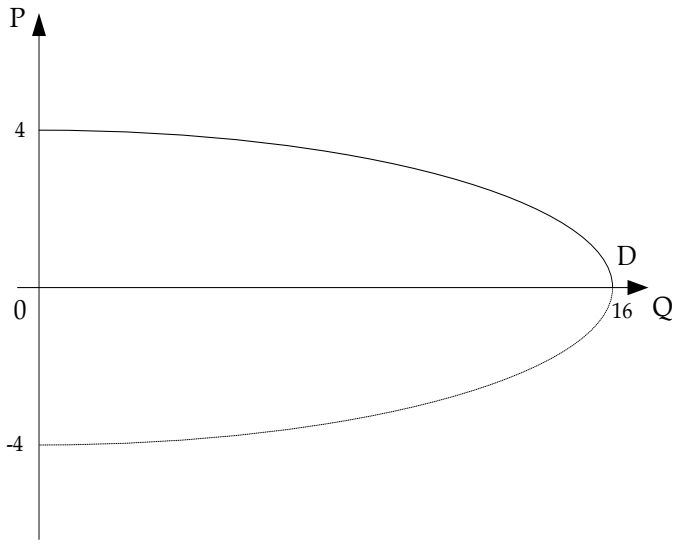
$P^2 = \sqrt{16}$

$P = \pm 4$

$P_1 = -4$ (tidak memenuhi syarat)

$P_2 = 4$

(0 ; 4) dan (0 ; -4)



Gambar 4.4.

Kuantitas maksimal yang dibeli konsumen (terjadi pada saat P = 0) adalah 16. Harga tertinggi yang dibayar konsumen (terjadi pada saat Q = 0) adalah 4.

Contoh 3

Gambarkan fungsi permintaan yang memenuhi persamaan $Q = P^2 - 7P + 12$. Berapa jumlah yang diminta pada saat harga jual 2 satuan mata uang?

Jawaban

Titik potong pada sumbu Q terjadi jika P = 0 ,

$Q = P^2 - 7P + 12$

$Q = 12$

(12 ; 0)

Titik potong pada sumbu P terjadi jika Q = 0,

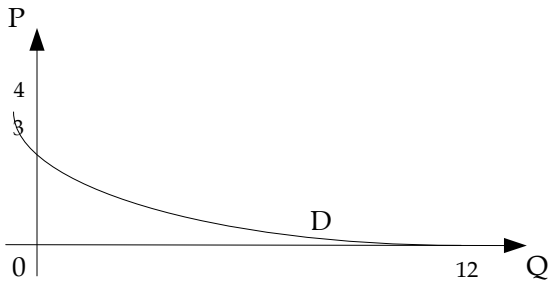
$0 = P^2 - 7P + 12$

$(P - 3)(P - 4) = 0$

$P_1 = 3$

$P_2 = 4$

(0 ; 3) dan (0 ; 4)



Gambar 4.5.

Pada saat harga adalah 2 satuan mata uang, maka jumlah yang diminta adalah:

$Q = (2)^2 - 7(2) + 12 = 2$ unit

Contoh 4

Pada saat Harga Rp 1000,- jumlah produk yang diminta 20 unit dan bila harga turun menjadi Rp 500,- jumlah yang diminta menjadi 30 unit. Tentukan fungsi permintaan dan gambarkan.

Jawaban

Diketahui:

$P_1 = 1000$ maka $Q_1 = 20$

$P_2 = 500$ maka $Q_2 = 30$

$$\frac{Q - Q_1}{P - P_1} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1}$$

$$\frac{Q - 20}{P - 1000} = \frac{30 - 20}{500 - 1000}$$

$-500 (Q - 20) = 10 (P - 1000)$

$-500Q + 10.000 = 10P - 10.000$

$-500Q = 10P - 20.000$

$Q = -0{,}02P + 40$

Titik potong pada sumbu Q terjadi jika $P = 0$,

$Q = 40 - 0{,}02P$

$Q = 40 - 0{,}02(0)$

$Q = 40$

$(40 ; 0)$

Titik potong pada sumbu P terjadi jika Q = 0,

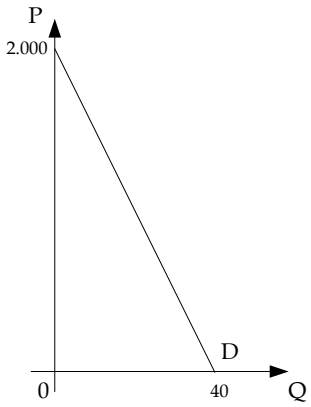
$Q = 40 - 0{,}02P$

$0 = 40 - 0{,}02P$

$0{,}02P = 40$

$P = 2.000$

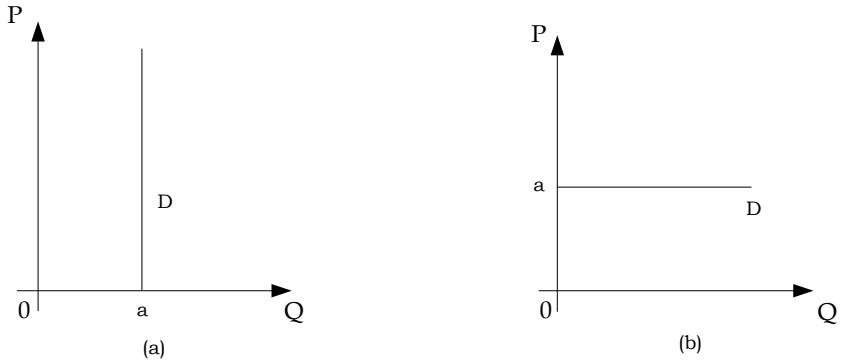
$(0 ; 2.000)$



Gambar 4.6.

Fungsi permintaan khusus

Fungsi permintaan di atas adalah fungsi permintaan linier yang normal, di mana kemiringannya adalah negatif. Sedangkan fungsi permintaan linier yang mempunyai kemiringan nol dan tak terhingga disebut fungsi permintaan khusus. Fungsi permintaan ini akan kita jumpai pada pasar persaingan sempurna dan pada produk-produk khusus. Adapun gambar fungsi permintaan tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 4.7.

Kedua fungsi permintaan di atas adalah fungsi konstan. Pada gambar 4.7.(a) jika harga produk berubah-ubah, maka jumlah produk yang diminta konstan pada Q tertentu. Sedangkan pada gambar 4.7.(b), untuk P tertentu maka jumlah produk yang diminta dapat berubah-ubah.

4.2. FUNGSI PENAWARAN (*SUPPLY FUNCTION*)

Fungsi penawaran merupakan hubungan antara jumlah produk yang ditawarkan oleh produsen dengan beberapa variabel lain yang mempengaruhinya pada jangka waktu tertentu.

Terdapat beberapa variabel yang mempengaruhi penawaran, antara lain:

1. Harga produk itu sendiri,
2. Harga produk-produk lain,
3. Biaya/faktor-faktor produksi produksi, yaitu biaya yang dikeluarkan perusahaan dalam kaitannya dengan produksi,
4. Teknologi yang digunakan dalam proses produksi,
5. Pajak (t_x),
6. Subsidi (s_x).

Secara matematis fungsi penawaran suatu produk adalah:

$$Qx = f(Px, Py, Pf, T, tx, sx)$$

Keterangan:

Q_x = jumlah produk X yang ditawarkan oleh produsen
P_x = harga produk X
P_y = harga produk lain yang berhubungan
P_F = harga faktor-faktor produksi
T = Teknologi yang tersedia
tx = pajak
sx = subsidi

Hubungan jumlah produk (Q_x) yang diminta dengan harga (P_x) pada umumnya memiliki hubungan positif, yaitu apabila harga produk naik maka jumlah produk yang ditawarkan naik dan sebaliknya. Pengaruh harga produk lain (P_y) terhadap jumlah produk yang ditawarkan memiliki hubungan positif apabila produk lain tersebut adalah bersifat substitusi dari produk X dan memiliki hubungan negatif apabila produk lain tersebut adalah bersifat

komplementer. Hubungan harga-harga faktor produksi (Pf) dengan produk X yang ditawarkan memiliki hubungan negatif. Hubungan teknologi yang tersedia (T) dengan produk X memiliki hubungan positif apabila teknologi mendukung maka penawaran akan bertambah tinggi. Hubungan pajak (tx) dan subsidi (sx) dengan produk X memiliki hubungan negatif artinya bertambah banyak pajak atau subsidi pada suatu barang maka jumlah produk yang ditawarkan akan berkurang dan sebaliknya.

Pada umumnya yang menjadi pertimbangan utama produsen dalam menawarkan suatu produk adalah harga dari produk itu sendiri (Px). Berdasarkan hal tersebut, variabel-variabel lain selain harga barang itu sendiri diasumsikan konstan (*ceteris paribus)*.

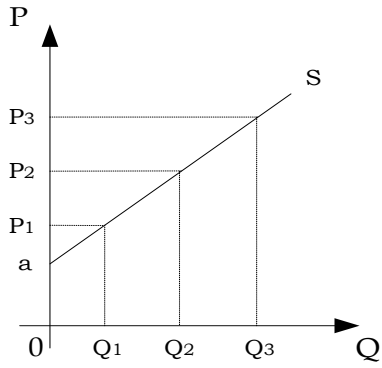
Dengan demikian, penulisan fungsi penawaran adalah:

$$Qx = f(Px)$$

Hukum penawaran:
Jika harga produk naik, maka jumlah produk yang ditawarkan akan naik dan sebaliknya jika harga produk turun maka jumlah produk yang ditawarkan akan turun (dengan asumsi variabel lain yang memperngaruhi permintaan tidak berubah/tetap).

Kurva penawaran (Supply curve)

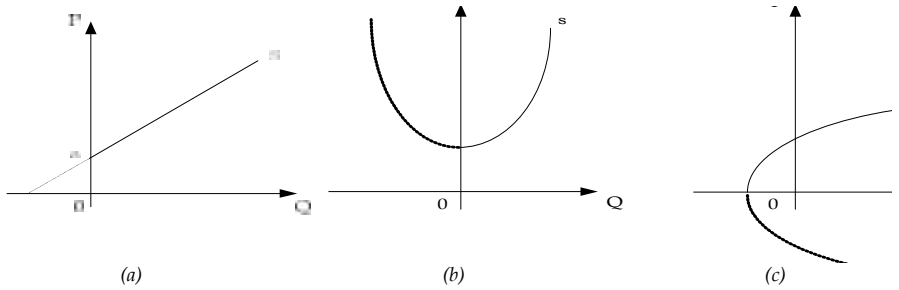
Kurva penawaran merupakan tempat kedudukan titik-titik dari berbagai jumlah produk yang ditawarkan pada berbagai tingkat harga tertentu. Berdasarkan ciri hubungan antara penawaran dan harga maka dapat dibuat grafik kurva penawaran sebagai berikut:



Gambar 4.8.

Keterangan:
S = kurva penawaran (*Supply Curve*)

Berikut ini disajikan kurva penawaran dalam bentuk linier dan non linier:



(a) *(b)* *(c)*

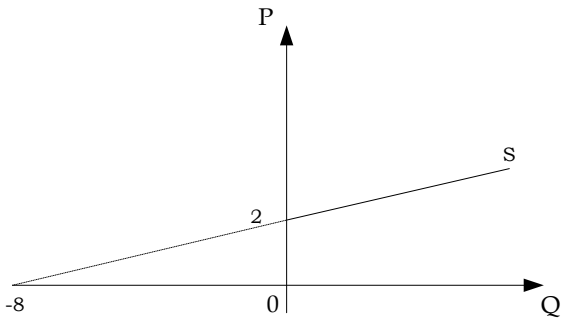
Gambar 4.9.

Keterangan:
Gambar 4.9.(a) adalah kurva penawaran linier
Gambar 4.9.(b) dan (c) adalah kurva penawaran non linier

Contoh 1
Diketahui fungsi penawaran Q = –8 + 4P. Gambarkan grafik fungsi penawaran tersebut.

Jawaban
Titik potong pada sumbu Q terjadi jika P = 0,
Q = –8 + 4P
Q = –8 + 4(0)
Q = –8
(–8 ; 0)

Titik potong pada sumbu P terjadi jika Q = 0,
Q = –8 + 4P
0 = –8 + 4P
4P = 8
P = 2
(0 ; 2)



Gambar 4.10.

Contoh 2

Pada saat harga $50 jumlah yang ditawarkan 50 unit dan bila harga naik $75 jumlah yang ditawarkan menjadi 100 unit. Tentukan fungsi penawarannya dan gambarkan grafiknya.

Jawaban

Diketahui:

$P_1 = 50$ $P_2 = 75$

$Q_1 = 50$ $Q_2 = 100$

$$\frac{Q - Q_1}{P - P_1} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1}$$

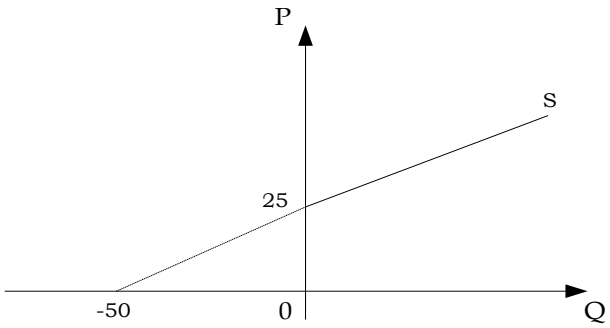
$$\frac{Q - 50}{P - 50} = \frac{100 - 50}{75 - 50}$$

$50P - 2500 = 25Q - 1250$

$50P = 25Q + 1250$

$2P = Q + 50$

$Q = 2P - 50$



Gambar 4.11.

Contoh 3

Jika konstanta sebuah garis pada sumbu harga dan sumbu kuantitas masing-masing 30 dan –60, maka tentukan fungsi penawarannya dan gambarkan grafik tersebut.

Jawaban

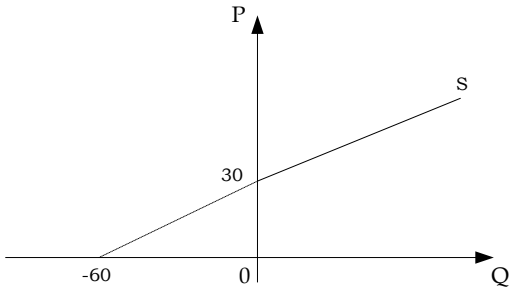
$b_1 = 30$

$b_2 = -60$

$$P = b_1 - \frac{b1}{b2}Q$$

$$P = 30 - \frac{30}{-60}Q$$

$$P = 30 + 0{,}5Q$$



Gambar 4.12.

Contoh 4

Gambarkan grafik fungsi penawaran $Q = P^2 + P - 2$.

Jawaban

Cara pembuatan grafik menggunakan konsep penggambaran parabola.

Cara pintas adalah sebagai berikut:

Titik potong pada sumbu Q terjadi jika $P = 0$,

$Q = P^2 + P - 2$

$Q = -2$

$(-2 ; 0)$

Titik potong pada sumbu P terjadi jika $Q = 0$,

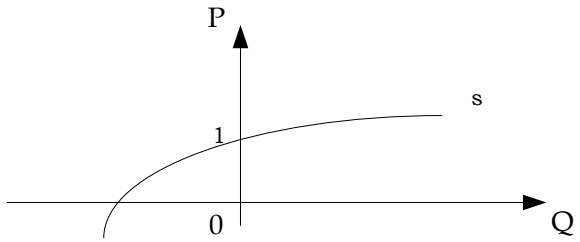
$Q = P^2 + P - 2$

$(P + 2)(P - 1) = 0$

$P_1 = -2$

$P_2 = 1$

$(0 ; -2)$ dan $(0 ; 1)$



Gambar 4.13.

Contoh 5

Gambarkan fungsi penawaran yang memenuhi persamaan $P = Q^2 + 3Q + 2$.

Jawaban

Titik potong sumbu P terjadi jika $Q = 0$,

$P = Q^2 + 3Q + 2$

$P = 2$

$(0 ; -2)$

Titik potong sumbu Q terjadi jika $P = 0$,

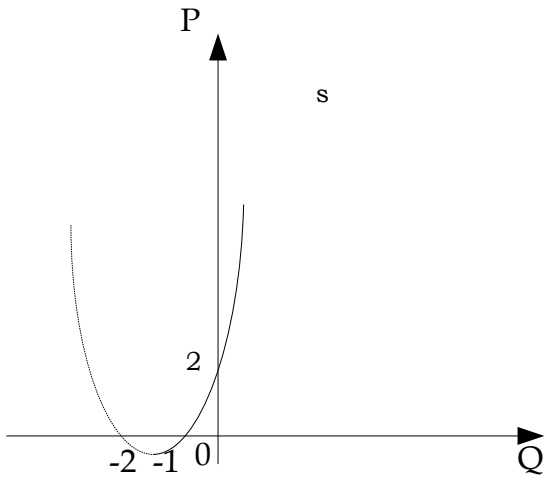
$0 = Q^2 + 3Q + 2$

$(Q + 2)(Q + 1) = 0$

$P_1 = -2$

$P_2 = -1$

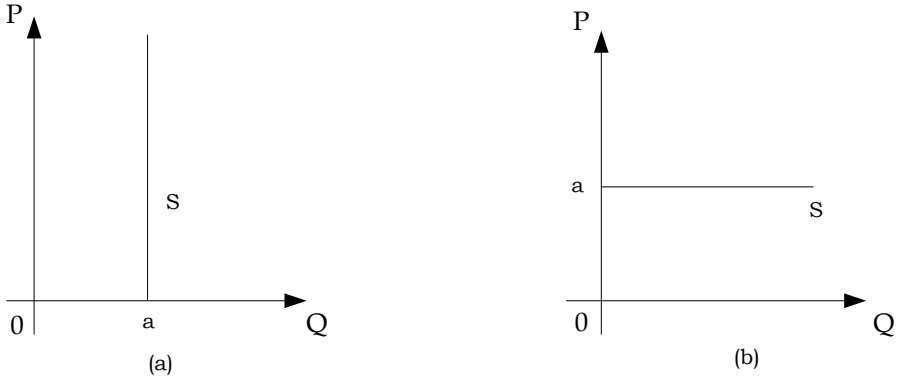
$(0 ; -2)$ dan $(0 ; -1)$



Gambar 4.14.

Fungsi penawaran khusus

Sama dengan fungsi permintaan, fungsi penawaran juga memiliki fungsi penawaran khusus. Fungsi penawaran normal memiliki kemiringan positif. Sedangkan fungsi penawaran khusus adalah fungsi penawaran yang mempunyai kemiringan nol dan tak terhingga. Berikut ini adalah fungsi penawaran khusus.



Gambar 4.15.

Pada gambar (a) jika harga produk berubah-ubah, maka jumlah produk yang ditawarkan akan tetap konstan pada Q = a. Sedangkan pada gambar (b), bila jumlah produk yang ditawarkan berubah-ubah, maka harga akan tetap konstan pada P = a.

4.3. KESEIMBANGAN PASAR (MARKET EQUILIBRIUM)

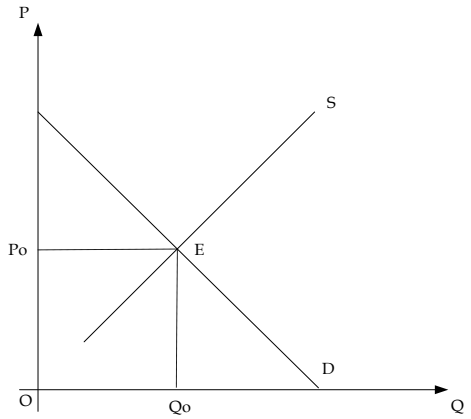
Harga dan jumlah produk yang diperjualbelikan ditentukan oleh permintaan dan penawaran dari produk tersebut. Untuk menganalisis mekanisme penentuan harga dan jumlah produk yang diperjualbelikan perlu dianalisis permintaan dan penawaran tersebut. Pasar dikatakan berada dalam keseimbangan (*equilibrium*) apabila jumlah (atau harga) permintaan sama dengan jumlah (atau harga) penawaran.

Secara matematis keseimbangan pasar tercapai pada saat:

$$QD = QS \text{ atau } PD = PS$$

Kurva Keseimbangan Pasar (*equilibrium*) merupakan pertemuan antara kurva permintaan dan kurva penawaran. Keseimbangan pasar akan menciptakan harga dan jumlah keseimbangan di pasar. Keseimbangan pasar secara aljabar terbentuk melalui proses eksekusi dari fungsi

permintaan dan penawaran. Sedangkan secara geometri ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva permintaan dengan kurva penawaran.



Gambar 4.16.

Keterangan:
P_e = harga keseimbangan (*equilibrium price*)
Q_e = jumlah keseimbangan (*equilibrium quantity*)
E = titik keseimbangan (*equilibrium*)
S = fungsi penawaran
D = fungsi jumlah permintaan

Contoh 1
Diketahui fungsi permintaan: P = 5 – Q dan fungsi penawaran: P = 2 + 0,5Q. Tentukan harga dan jumlah produk pada keseimbangan pasar dan gambarkan pula kurvanya. Apabila harga jual sebesar 4 setiap unitnya tentukan besarnya kuantitas yang diminta dan yang ditawarkan serta jelaskan arti ekonominya.

Jawaban
Keseimbangan pasar:

$$D = S$$
$$5 - Q = 2 + 0{,}5Q$$
$$1{,}5Q = 3$$
$$Q = 2$$

Jika Q = 2, maka:

$$P = 5 - Q$$
$$P = 5 - 2$$
$$P = 3$$

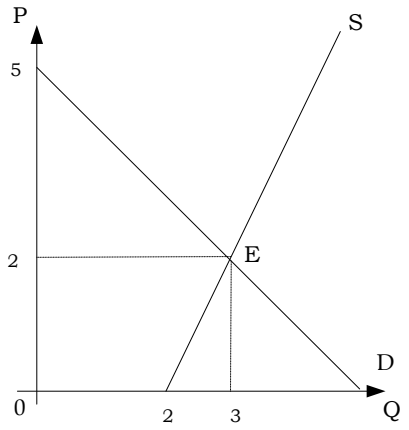
Jadi, harga keseimbangan terjadi pada saat $P_e = 3$ dan jumlah produk pada keseimbangan terjadi pada saat $Q_e = 2$ unit

Fungsi permintaan: P = 5 – Q
Titik potong pada sumbu P terjadi jika Q = 0,
P = 5 – Q
P = 5
(0 ; 5)

Titik potong pada sumbu Q terjadi jika P = 0,
P = 5 – Q
Q = 5
(5 ; 0)

Fungsi penawaran: P = 2 + 0,5Q
Titik potong pada sumbu P terjadi jika Q = 0,
P = 2 + 0,5Q
P = 2
(0 ; 2)

Titik potong pada sumbu Q terjadi jika P = 0,
P = 2 + 0,5Q
–0,5Q = 2
Q = –4
(–4 ; 0)



Gambar 4.17.

Pada saat P = 4 maka jumlah permintaan:

$P_d = 5 - Q$

$4 = 5 - Q$

$Q = 1$

Sedangkan jumlah penawaran:

$P_s = 2 + 0{,}5Q$

$4 = 2 + 0{,}5Q$

$0{,}5Q = 2$

$Q = 4$

Jadi pada saat P = 4 terjadi kondisi kelebihan jumlah produk yang ditawarkan (*excess supply*).

Contoh 2

Diketahui: fungsi permintaan: $Q = -2P + 8$ dan fungsi penawaran: $Q = P^2 + P - 2$. Berapakah harga dan jumlah keseimbangan dan gambarkan grafiknya.

Jawaban

Keseimbangan pasar:

$D = S$

$-2P + 8 = P^2 + P - 2$

$P^2 + 3P - 10 = 0$

$(P + 5)(P - 2) = 0$

$P_1 = -5$ (*Tidak Mungkin*)

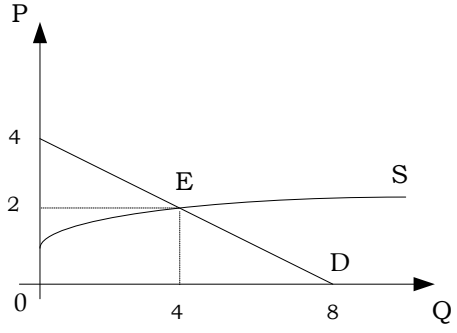
$P_2 = 2$ (*Mungkin*)

$Q = -2P + 8$

$Q = -2(2) + 8$

$Q = 4$

Jadi harga keseimbangan pasar terjadi pada saat P = 2 dan Q = 4.



Gambar 4.18.

Contoh 3

Diketahui fungsi permintaan dengan persamaan 2Q + 4P = 29 dan fungsi penawaran $2Q = P^2 - 16$. Tentukan jumlah produk dan harga produk pada keseimbangan pasar dan gambarkan kurva tersebut.

Jawaban

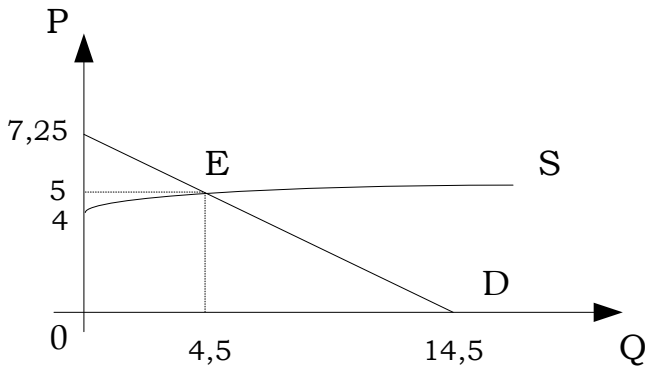
Permintaan: 2Q + 4P = 29
2Q = 29 – 4P
Q = 29/2 – 2P

Penawaran: $2Q = P^2 - 16$
$Q = \frac{1}{2}P^2 - 8$

Keseimbangan pasar:

D = S
29/2 – 2P = ½P2 – 8
29 – 4P = P2 – 16
P2 + 4P – 45 = 0
(P – 5)(P + 9) = 0
P1 = 5 (Mungkin)
P2 = -9 (Tidak mungkin)
Q = 29/2 – 2(5)
= 14,5 – 10
Q = 4,5

Jadi harga keseimbangan pasar terjadi pada saat P = 5 dan Q = 4,5.



Gambar 4.19.

4.4. KESEIMBANGAN DUA MACAM PRODUK

Dalam fungsi permintaan yang sebelumnya yaitu model suatu pasar tertutup, yaitu Qd dan Qs dari suatu barang adalah fungsi dari barang itu sendiri. Dalam prakteknya, tidak ada barang yang tidak memiliki hubungan dengan barang lain. Hubungan dengan barang lain dapat bersifat saling menggantikan (subtitusi) dan hubungan saling melengkapi (komplementer), oleh karena itu fungsi permintaan selalin memasukkan harga barang itu sendiri, juga memperhitungkan pengaruh harga barang lain yang memiliki hubungan dengan barang tersebut. Model pasar dengan dua produk dapat diambil contoh hubungan antara produk X dan produk Y.

Fungsi permintaan dari masing-masing produk adalah:

$Q_{dx} = f\ (P_x, P_y)$
$Q_{dy} = g\ (P_x, P_y)$

Keterangan:
Q_{dx} = jumlah produk x yang diminta
Q_{dy} = jumlah produk y yang diminta
P_x = harga produk x setiap unit
P_y = harga produk y setiap unit

Fungsi permintaan masing-masing produk merupakan fungsi dari harga kedua produk. Oleh karena itu, keseimbangan pasar yang diperoleh adalah keseimbangan pasar untuk kedua produk. Harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan untuk tiap produk dapat dianalisis secara bersama-sama.

Jika harga Px konstan dan harga Py meningkat, maka permintaan produk Y akan menurun, tetapi untuk produk X dapat saja meningkat atau menurun. Jika permintaan barang produk X meningkat maka kedua barang tersebut saling bersaing satu sama lain atau merupakan barang subtitusi. Jika harga Px konstan sedangkan harga Py menurun maka permintaan produk Y akan meningkat. Apabila permintaan produk X ikut meningkat maka kedua barang tersebut memiliki hubungan komplementer sebab peningkatan permintaan produk Y diikuti pula dengan peningkatan permintaan produk X.

Apabila nilai perubahan permintaan produk X terhadap Py dan perubahan permintaan produk Y terhadap Px adalah negatif, maka barang-barang tersebut memiliki hubungan komplementer karena menurunnya harga menyebabkan bertambahnya permintaan kedua jenis barang. Apabila perubahan permintaan produk X terhadap Py dan perubahan permintaan produk Y terhadap Px adalah

positif, maka kedua barang tersebut memiliki hubungan pengganti (substitusi) yang artinya penurunan harga dari salah satu produk akan mengakibatkan bertambahnya permintaan produk yang lain. Apabila nilai perubahan permintaan produk X terhadap Py dan perubahan permintaan produk Y terhadap Px memiliki tanda yang tidak sama, berarti produk tersebut bukan subtitusi maupun komplementer tetapi mempunyai pengertian penurunan harga satu produk akan menambah kedua permintaan. Keadaan seperti ini tidak boleh terjadi.

Contoh 1

Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran dari produk X dan Y adalah sebagai berikut:

Produk X:

$Q_{dx} = 16 - 2Px + P_y$

$Q_{sx} = -2 + 3P_x$

Produk Y:

$Q_{dy} = 15 + P_x - P_y$

$Q_{sy} = -1 + 2P_y$

Carilah keseimbangan pasar dari kedua produk tersebut!

Jawaban:

Keseimbangan pasar produk X:

$Q_{dx} = Q_{sx}$

$16 - 2P_x + P_y = -2 + 3P_x$

$18 - 5P_x + P_y = 0$ ……(1)

Keseimbangan pasar produk Y:

$Q_{dy} = Q_{sy}$

$15 + P_x - P_y = -1 + 2P_y$

$16 + P_x - 3P_y = 0$ ……(2)

Persamaan (1) dan (2)

$18 - 5P_x + P_y = 0$ (x 1)

$16 + P_x - 3P_y = 0$ (x 5)

$18 - 5P_x + P_y = 0$

$\underline{80 + 5P_x - 15P_y = 0} +$

$98 - 14P_y = 0$

$P_y = 7$

$P_x = 5$

$Q_{dx} = Q_{sx} = 13$

$Q_{dy} = Q_{sy} = 13$

Jadi keseimbangan pasar untuk produk X adalah Qx = 13 dan Px = 5 dengan Py = 7, sedangkan keseimbangan pasar untuk produk Y adalah Qy = 13 dan Py = 7 dengan Px = 5.

Keseimbangan pasar kasus 2 macam produk ini dapat pula diterapkan pada kasus-kasus lebih dari 2 macam produk.

4.5. PAJAK

Pajak merupakan bagian dari penerimaan pemerintah/negara yang dibebankan kepada produsen dan konsumen. Dengan adanya pajak tersebut maka harga jual barang akan meningkat. Sesuai dengan hukum permintaan apabila harga naik maka jumlah barang yang diminta akan berkurang (menurun), dengan demikian pajak akan berpengaruh terhadap keseimbangan pasar (keseimbangan pasar setelah pajak akan bergerak ke kanan atas). Dasar pengenaan pajak yang dibebankan dapat dilakukan berdasarkan unit barang tersebut yang ditetapkan secara spesifik per unit barang (t) atau berdasarkan persentase (proporsi) yang dikenakan berdasarkan harga jual (r).

Efek pajak

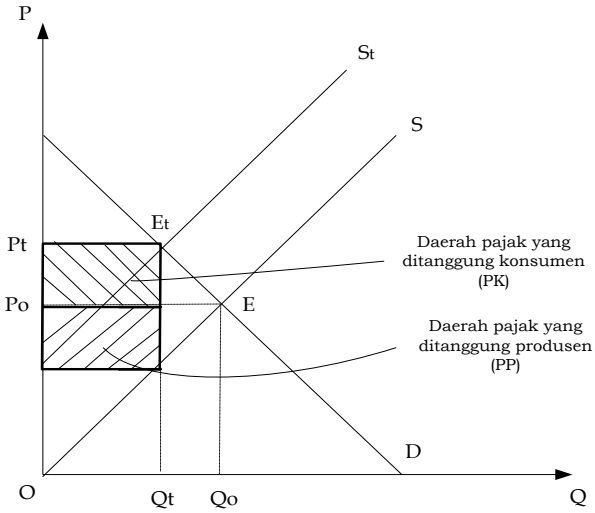
a. Menggeser kurva penawaran sejajar ke kiri atas (berlaku untuk pajak per unit);
b. membentuk harga dan kuantitas keseimbangan pasar yang baru (harga setelah pajak akan meningkat dan kuantitas setelah pajak akan menurun);
c. terdapat sejumlah penerimaan pemerintah dari pajak tersebut;
d. terdapat sejumlah pengeluaran produsen dan konsumen (produsen akan berusaha mengalihkan sebagian beban pajak kepada konsumen dengan menawarkan harga jual yang lebih tinggi atas produknya).

4.5.1. Pajak per Unit Barang

Pengenaan pajak akan merubah fungsi penawaran (sementara fungsi permintaan tetap). Perubahan fungsi penawaran setelah pajak adalah sebagai berikut:

Sebelum Pajak (So)	P = f (Q) Contoh: P = 8 + 2Q	Q = g (P) Contoh: Q =
Setelah Pajak (St)	P = f (Q) + t Contoh: Jika t = 2/ unit Pt = 8 + 2Q + 2 Pt = 10 + 2Q	Q = g (P-t) Contoh: Jika t = 2/ unit $Q = \frac{1}{2}(P - 2) - 4$ $Q = \frac{1}{2}P - 5$

Keseimbangan pasar setelah pajak



Gambar 4.20.

Keterangan:

D = kurva *demand* (permintaan)
S_o = kurva *supply* (penawaran)
P_o = harga keseimbangan sebelum pajak
Q_o = kuantitas keseimbangan sebelum pajak
E = titik keseimbangan pasar
P_t = harga keseimbangan setelah pajak
Q_t = kuantitas keseimbangan setelah pajak
E_t = ekuilibrium setelah pajak
S_t = penawaran setelah pajak

	Pajak Per Unit	**Pajak Total**
Pajak yang ditanggung konsumen	tk = Pt - Po	Tk = tk. Qt
Pajak yang ditanggung produsen	tp = t – (Pt – Po)	Tp = tp. Qt
Pajak yang diterima pemerintah	t = tk + tp	T = Tk + Tp

Contoh 1

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan Q = 13 – P, sedangkan penawarannya P = 3 + Q. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar 2 per unit.

Pertanyaan:

a. Tentukan harga dan jumlah keseimbangan sebelum pajak.
b. Tentukan harga dan jumlah keseimbangan sesudah pajak.
c. Berapa pajak total yang diterima pemerintah.
d. Berapa pajak per unit dan total yang ditanggung oleh konsumen.
e. Berapa pajak per unit dan total yang ditanggung oleh produsen.
f. Gambarkan grafik dan berikan penjelasan.

Jawaban

a. Keseimbangan pasar sebelum pajak:

D: $Q = 13 - P$

$P = 13 - Q$

$D = S$

$13 - Q = 3 + Q$

$10 = 2Q$

$Q = 5$

$P = 13 - (5)$

$P = 8$

Jadi keseimbangan pasar sebelum pajak adalah E(5 ; 8)

b. Keseimbangan pasar setelah pajak: $D = S_t$

Fungsi penawaran setelah pajak: $P_t = 3 + Q + t$

$P_t = 3 + Q + 2$

$P_t = 5 + Q$

$D = St$

$13 - Q = 5 + Q$

$8 = 2Q$

$Q_t = 4$

$P = 13 - (4)$

$P_t = 9$

Jadi keseimbangan pasar setelah pajak adalah $E_t(4 ; 9)$

c. Pajak total yang diterima pemerintah: $T = t \times Q_t$

$T = 2 X 4$

$T = 8$

Jadi besarnya pajak total yang diterima oleh pemerintah adalah 8.

d. Pajak per unit (t_k) dan total (T_k) yang ditanggung oleh konsumen

$t_k = P_t - P_o$

$= 9 - 8$

$= 1$

$T_k = (P_t - P_o) \times Q_t$

$T_k = (9 - 8) \times 4$

$T_k = 1 \times 4 = 4$

Jadi besarnya pajak per unit yang ditanggung konsumen adalah 1 dan total pajak yang ditanggung oleh konsumen adalah 4.

e. Pajak per unit (t_p) dan total (T_p) yang ditanggung oleh produsen

$t_p = t - (P_t - P_o)$

$= 2 - (9 - 8)$

$= 1$

$T_p = \{t - (P_t - P_o)\} \times Q_t$

$= 2 - (9 - 8) \times 4$

$= 1 \times 4 = 4$

Jadi besarnya pajak per unit yang ditanggung oleh produsen adalah 1 dan dan pajak total yang ditanggung oleh produsen adalah 4.

f. Titik potong grafik permintaan dan penawaran

D: $P = 13 - Q$

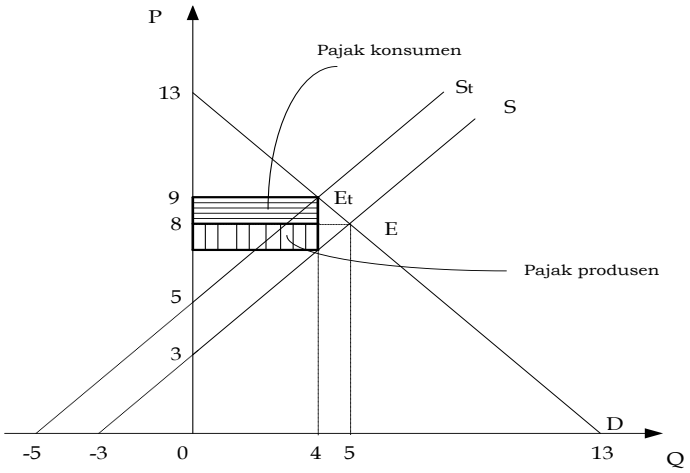
P	0	13
Q	13	0

S: $P = 3 + Q$

P	0	3
Q	–3	0

S_t: $P_t = 5 + Q$

P	0	5
Q	–5	0



Gambar 4.21.

Contoh 2

Apabila diketahui fungsi permintaan akan suatu barang yang ditunjukkan oleh persamaan $Q = \sqrt{16 - P}$ sedangkan fungsi penawarannya P = 4 + Q. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar 6 per unit.

Pertanyaan:

a. Tentukan harga dan jumlah keseimbangan sebelum pajak.
b. Tentukan harga dan jumlah keseimbangan sesudah pajak.
c. Berapa pajak total yang diterima pemerintah.
d. Berapa pajak per unit dan total yang ditanggung oleh konsumen.
e. Berapa pajak per unit dan total yang ditanggung oleh produsen.
f. Gambarkan grafik dan berikan penjelasannya.

Jawaban

a. Keseimbangan pasar sebelum pajak:

$D : Q = \sqrt{16 - P}$

$Q^2 = (\sqrt{16 - P})^2$

$Q^2 = 16 - P$

$P = 16 - Q^2$

$D = S$

$16 - Q^2 = 4 + Q$

$-Q^2 - Q + 12 = 0$

$Q^2 + Q - 12 = 0$

$(Q + 4)(Q - 3) = 0$

$Q_1 = -4$ dan $Q_2 = 3$

Dipilih nilai Q yang positif, yaitu Q = 3

$P = 4 + (3)$
$P = 7$
Jadi keseimbangan pasar sebelum pajak adalah E(3 ; 7)

b. Keseimbangan pasar setelah pajak: $D = S_t$
Fungsi penawaran setelah pajak: $P_t = 4 + Q + t$
$P_t = 4 + Q + 6$
$P_t = 10 + Q$

$D = S_t$
$16 - Q^2 = 10 + Q$
$-Q^2 - Q + 6 = 0$
$Q^2 + Q - 6 = 0$
$(Q + 3)(Q - 2) = 0$
$Q_1 = -3$ dan $Q_2 = 2$
Dipilih nilai Q yang positif, yaitu $Q_t = 2$

$P_t = 10 + Q$
$P_t = 10 + (2)$
$P_t = 12$
Jadi keseimbangan pasar setelah pajak adalah $E_t(2 ; 12)$

c. Pajak total yang diterima pemerintah: $T = t \times Q_t$
$T = 6 \text{ X } 2$
$T = 12$
Jadi besarnya pajak total yang diterima oleh pemerintah adalah 12.

d. Pajak per unit (t_k) dan total (T_k) yang ditanggung oleh konsumen
$t_k = P_t - P_o$
$= 12 - 7$
$= 5$
$T_k = (P_t - P_o) \times Q_t$
$= (12 - 7) \text{ X } 2$
$= 5 \times 2 = 10$
Jadi besarnya pajak per unit yang ditanggung oleh konsumen adalah 5 dan pajak total yang ditanggung oleh konsumen adalah 10.

e. Pajak per unit (t_p) dan total (T_p) yang ditanggung oleh produsen
$t_p = t - (P_t - P_o)$
$= 6 - (12 - 7)$
$= 1$

T_p = t – (P_t – P_o) X Q_t
= 6 – (12 – 7) X 2
= 1 x 2 = 2

Jadi besarnya pajak per unit yang ditanggung oleh produsen adalah 1 dan pajak total yang ditanggung oleh produsen 2.

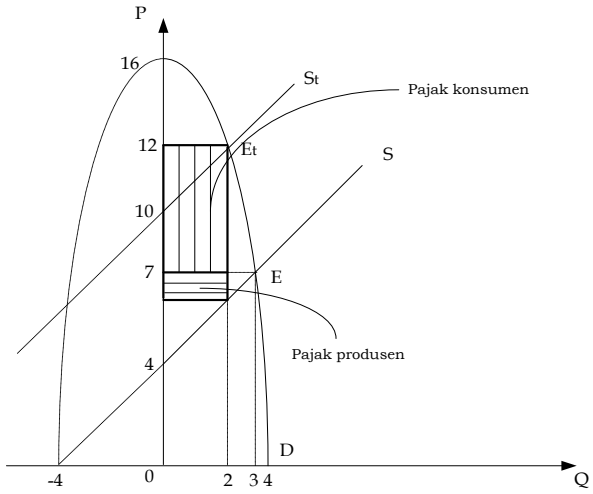
f. Titik potong grafik permintaan dan penawaran
D: P = 16 – Q^2
Titik potong sumbu P, terjadi pada saat Q = 0.
P = 16 – Q^2
P = 16 – $(0)^2$
P = 16
Titik potong sumbu Q, terjadi pada saat P = 0.
P = 16 – Q^2
0 = 16 – Q^2
Q^2 = 16
Q_1 = 4 dan Q_2 = –4
Terdapat tiga koordinat titik potong, yaitu: (0 ; 16), (4 ; 0), dan (–4 ; 0).

S: P = 4 + Q

P	0	4
Q	–4	0

St: Pt = 10 + Q

P	0	10
Q	–10	0



Gambar 4.22.

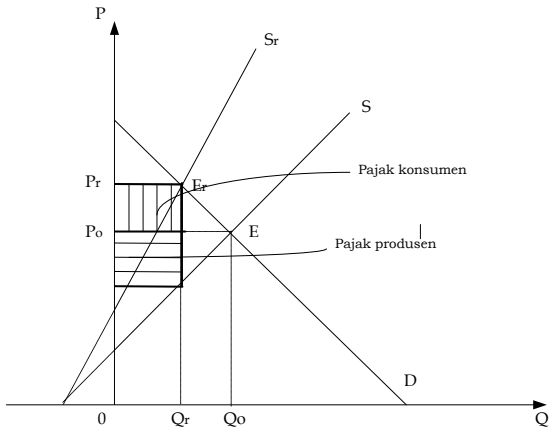
4.5.2. Pajak Persentase (Proporsional)

Pajak persentase (proporsional) merupakan pajak yang dikenakan terhadap suatu barang tertentu dimana dasar pengenaan pajaknya berdasarkan persentase (%). Meskipun pengaruh pajak ini serupa dengan pengaruh yang ditimbulkan oleh pajak per unit, yaitu menaikkan harga keseimbangan dan mengurangi kuantitas (jumlah) keseimbangan, namun proses analisisnya terhadap kurva penawarannya berbeda. Efek dari pajak persentase ini tidak seperti efek pajak per unit yang menyebabkan kurva bergeser ke atas sejajar dikarenakan memiliki koefisien yang besarnya tetap melainkan kurva penawaran setelah pajak persentase memiliki koefisien yang lebih besar daripada kurva penawaran sebelum ada persentase pajak.

Pengenaan pajak persentase akan merubah fungsi penawaran setelah pajak (dengan asumsi fungsi permintaan tetap) menjadi:

Sebelum Pajak (So)	P = f (Q) Contoh: P = 8 + 2Q	Q = g (P) Contoh: Q = ½P − 4
Setelah Pajak (Sr)	P = f (Q) + r.f(Q) Pr = f(Q)(1 + r) Contoh: Jika r = 10% = 0,1 Pr = (8 + 2Q) (1 + 0,1) = 8,8 + 2,2Q	$Q_r = g\frac{P}{(1+r)}$ Contoh: Jika r = 10% = 0,1 $Q = \frac{1}{2}\frac{P}{(1+0,1)} - 4$ $Q = \frac{P}{2,2} - 4$

Keseimbangan pasar setelah pajak



Gambar 4.23.

Untuk mencari besarnya pajak yang diterima oleh pemerintah, pajak yang ditanggung konsumen dan produsen harus dicari terlebih dahulu nilai pajak per unit (t) yang diterima oleh pemerintah. Setelah nilai t diperoleh, maka dengan menggunakan rumus yang sama pada pajak per unit (tetapi harga setelah pajak menggunakan P_r) diperoleh nilai-nilai tersebut di atas.

Pajak per unit didapat dengan menggunakan rumus:

$$t = Pr - Px \quad \text{atau} \quad t = r.\,Px$$

Keterangan:

P_r = harga jual setelah pajak persentase.

P_x = nilai P yang diperoleh dengan mensubstitusi Q_r pada fungsi S_o

Contoh 1

Apabila harga barang sebesar Rp 300,- jumlah barang yang diminta 250 buah sedangkan jika harga naik menjadi Rp 500,- jumlah barang yang diminta turun menjadi 50 buah. Fungsi penawaran barang tersebut adalah P =. Pemerintah mengenakan pajak sebesar 10%.

Pertanyaan:

a. Tentukan keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak.
b. Tentukan nilai pajak per unitnya.
c. Berapa beban pajak per unit dan pajak total yang ditanggung oleh konsumen.
d. Berapa beban pajak per unit dan pajak total yang ditanggung oleh produsen.
e. Berapa total pajak yang diterima pemerintah.
f. Gambarkan grafiknya dan tunjukkan daerah pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen.

Jawaban:

Diketahui:

Fungsi permintaan:

$P_1 = 300 \qquad Q_1 = 250$

$P_2 = 500 \qquad Q_2 = 50$

$$\frac{Q - Q_1}{P - P_1} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1}$$

$$\frac{Q - 250}{P - 300} = \frac{50 - 250}{500 - 300}$$

200 (Q-250) = -200 (P-300)
200 Q – 50.000 = -200P + 60.000
Q = -P + 550
P = -Q + 550

a. Keseimbangan pasar sebelum pajak: D = So
$P_D = P_S$
550 – Q = 2/3Q + 100
5/3Q = 450
Q = 270
P = 550 – Q
P = 550 – 270
P = 280
Jadi, keseimbangan pasar sebelum pajak adalah E (270 ; 280)

Fungsi penawaran setelah pajak:
P_{Sr} = (2/3Q + 100) (1 + 0,1)
P_{Sr} = 0,73Q + 110
Keseimbangan pasar setelah pajak: D = S_r
$P_D = P_{Sr}$
550 – Q = 0,73Q + 110
1,73Q = 440
Q_r = 254,35
P_r = 550 – Q
P_r = 295,66
Jadi, keseimbangan pasar setelah pajak adalah E_r(254,35 ; 295,66).

b. Pajak per unit.
P_r = 295,66
Mencari nilai P_x
P_x = 2/3Q + 100
P_x = 2(254,35) + 100
P_x = 269,57
Jadi besarnya pajak per unit adalah:
t = P_r – P_x
= (295,66 – 269,57)
= 26,09

c. Pajak yang ditanggung konsumen:
Pajak per unit tk = $(P_t - P_o)$
= (295,66 – 280)
= 15,66
Pajak total yang ditanggung oleh konsumen:
T_k = $(P_r - P_o)$ X Q_r
= (295,66 – 280) X 254,35
= 15,66 X 254,35
= 3.983,12

d. Pajak yang ditanggung produsen:
Pajak per unit (tp) = $t - t_k$
= 26,09 – 15,66
= 10,43
Pajak total yang ditanggung oleh produsen:
T_p = tp.Qt
= 10,43 x 254,35
= 2.652,87

e. Pajak total yang diterima pemerintah:
T = t x Q_r
T = 26,09 x 254,35
T = 6.635,99
atau
T = $T_k + T_p$
= 3.983,12 + 2.652,87
= 6.635,99

f. Gambar
Titik potong kurva permintaan
D: P = 550 – Q

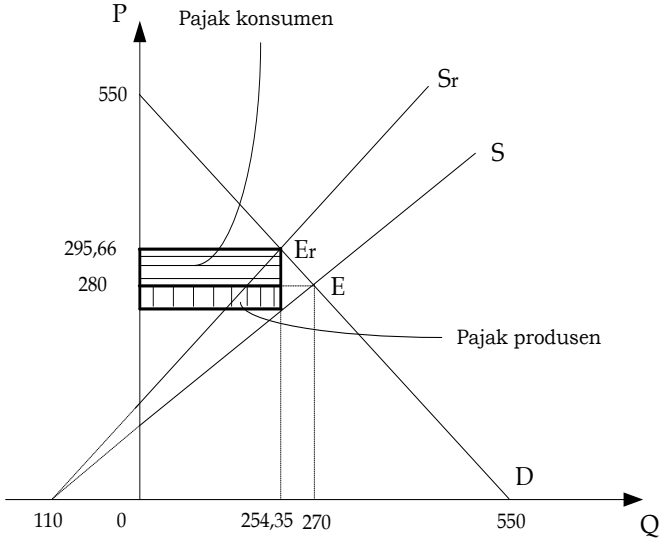
P	550	0
Q	0	550

Titik potong kurva penawaran sebelum pajak
S: P = 2/3Q + 100

P	100	0
Q	0	-150

Titik potong kurva penawaran setelah pajak
Sr: PSr = 0,73Q + 110

P	110	0
Q	0	-150



Gambar 4.24.

Contoh 2
Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang Q = 15 – P dan fungsi penawaran Q = 2P – 6 dan terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar 25%.

Pertanyaan:
a. Tentukan keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak.
b. Tentukan nilai pajak per unitnya.
c. Berapa beban pajak per unit dan pajak total yang ditanggung oleh konsumen.
d. Berapa beban pajak per unit dan pajak total yang ditanggung oleh produsen.
e. Berapa total pajak yang diterima pemerintah.
f. Gambarkan grafiknya dan tunjukkan daerah pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen.

Jawaban

a. Sebelum pajak:

Keseimbangan pasar sebelum pajak: $D = S_o$

$Q_d = Q_s$

$15 - P = 2P - 6$

$3P = 21$

$P_o = 7$

$Q = 15 - P$

$Q = 15 - 7$

$Q_o = 8$

Jadi keseimbangan pasar sebelum pajak adalah E(8 ; 7).

Fungsi penawaran sesudah pajak:

$$Q = 2\frac{P}{(1+0{,}25)} - 6$$

$Q_r = 1{,}6P - 6$

Keseimbangan pasar setelah pajak: $D = S_r$

$Q_d = Q_s$

$15 - P = 1{,}6P - 6$

$21 = 2{,}6P$

$P_r = 8{,}08$

$Q = 15 - P$

$Q = 15 - 8{,}08$

$Q_r = 6{,}92$

Jadi, keseimbangan pasar setelah pajak adalah $E_r(6{,}92 ; 8{,}08)$

b. Pajak per unit.

$P_r = 8{,}08$

Mencari nilai P_x:

$Q = 2P - 6$

$P = 0{,}5Q + 3$

$P = 0{,}5(6{,}92) + 3$

$P_x = 6{,}46$

Jadi besarnya pajak per unit adalah:

$t = P_r - P_x$
$= 8{,}08 - 6{,}46$
$= 1{,}62$

c. Pajak per unit yang ditanggung konsumen:
Pajak per unit $= (P_r - P_o)$
$= (8{,}08 - 7)$
$= 1{,}08$
Pajak total yang ditanggung oleh konsumen:
$T_k = (P_r - P_o) \times Q_r$
$= (8{,}08 - 7) \times 6{,}92$
$= 1{,}08 \times 6{,}92$
$= 7{,}47$

d. Pajak per unit yang ditanggung produsen:
Pajak per unit $= t - (P_r - P_o)$
$= 1{,}62 - (8{,}08 - 7)$
$= 0{,}54$
Pajak total yang ditanggung oleh produsen:
$T_p = (t - (P_r - P_e)) \times Q_r$
$= (1{,}62 - (8{,}08 - 7)) \times 6{,}92$
$= 0{,}54 \times 6{,}92$
$= 3{,}74$

e. Pajak total yang diterima pemerintah:
$T = t \times Q_r$
$T = 1{,}62 \times 6{,}92$
$T = 11{,}21$

f. Gambar
Titik potong kurva permintaan
D: $Q = 15 - P$

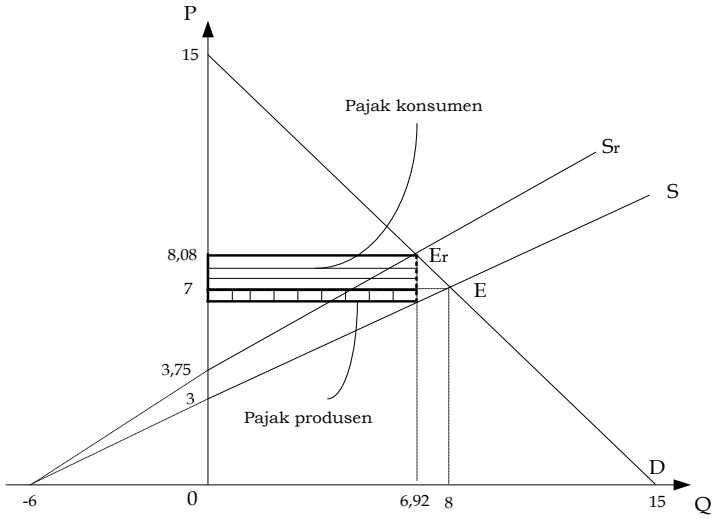
P	0	15
Q	15	0

Titik potong kurva penawaran sebelum pajak
S: $Q = 2P - 6$

P	0	3
Q	-6	0

Titik potong kurva penawaran setelah pajak
S_r: $Q_r = 1{,}6P - 6$

P	0	3,75
Q	-6	0



Gambar 4.25.

4.6. SUBSIDI

Subsidi merupakan bagian dari pengeluaran pemerintah/negara yang diberikan kepada produsen dan konsumen. Dengan adanya subsidi tersebut maka harga jual barang akan menurun. Keseimbangan pasar setelah subsidi akan bergerak ke kiri bawah. Pengaruh subsidi terhadap keseimbangan pasar berbanding terbalik dengan pengaruh pajak terhadap keseimbangan pasar.

Efek subsidi:

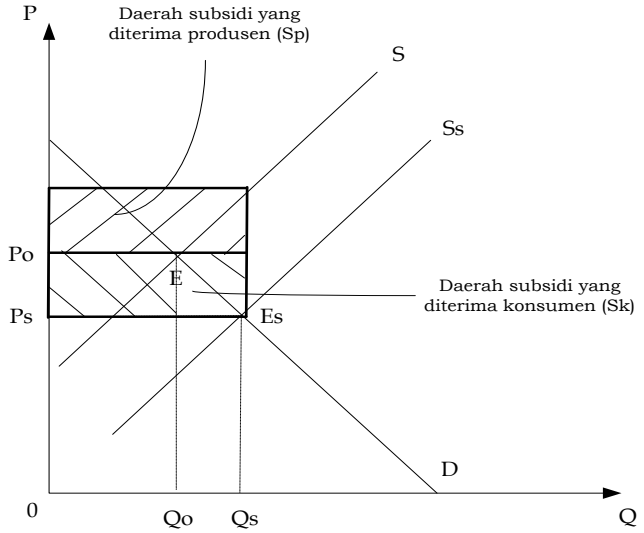
a Menggeser kurva penawaran sejajar ke kanan bawah;
b membentuk harga dan kuantitas keseimbangan yang baru (harga setelah setelah subsidi menurun dan kuantitas setelah subsidi meningkat);
c terdapat pengeluaran pemerintah;
d terdapat penerimaan produsen dan konsumen dari subsidi tersebut.

Subsidi per Unit Barang

Pengenaan subsidi akan merubah fungsi penawaran (sementara fungsi permintaan tetap). Perubahan fungsi penawaran setelah subsidi adalah sebagai berikut:

Sebelum Subsidi (So)	P = f (Q) Contoh: P = 2Q + 3	Q = g (P) Contoh: $Q = {}^{1}/_{2}\,P - {}^{3}/_{2}$
Setelah Subsidi (Ss)	P = f (Q) – s Contoh: Jika s = 2/unit Ps = 2Q + 3 – 2 Ps = 2Q + 1	Q = g (P + s) Contoh: Jika s = 2/unit $Q = ½(P + 2) - {}^{3}/_{2}$ $Q = ½P - ½$

Keseimbangan pasar setelah subsidi



Gambar 4.26.

Keterangan:

D = kurva *demand* (permintaan)
S = kurva *supply* (penawaran)
P_o = harga keseimbangan sebelum subsidi
Q_o = kuantitas keseimbangan sebelum subsidi
E = titik keseimbangan pasar
P_s = harga keseimbangan setelah subsidi
Q_s = kuantitas keseimbangan setelah subsidi
E_s = ekuilibrium setelah subsidi
S_s = penawaran setelah subsidi

	Subsidi Per Unit	Subsidi Total
Subsidi yang diterima konsumen	$s_k = P_o - P_s$	$S_k = s_k . Q_s$
Subsidi yang diterima produsen	$s_p = s - (P_o - P_s)$	$S_p = s_p . Q_s$
Subsidi yang diberikan pemerintah	$s = s_k + s_p$	$S = S_k + S_p$

Contoh 1

Jika diketahui fungsi permintaan P = 10 – 0,5Q, dan pada saat harga Rp 20,- maka jumlah barang yang ditawarkan adalah 32 unit, sedangkan jika ditawarkan seharga Rp 40,- jumlah barang yang ditawarkan menjadi 72 unit. Besarnya subsidi yang diberikan oleh pemerintah adalah Rp 2,- per unit barang.

Pertanyaan:

a. Tentukan harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi.
b. Berapa besar subsidi per unit dan total yang diterima konsumen.
c. Berapa besar subsidi per unit dan total yang diterima produsen.
d. Berapa besar subsidi total yang diberikan oleh pemerintah.
e. Gambarkan grafik dalam satu gambar.

Jawaban

a. Fungsi penawaran:

$P_1 = 20 \qquad P_2 = 40$

$Q_1 = 32 \qquad Q_2 = 72$

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{Q - Q_1}{Q_2 - Q_1}$$

$$\frac{P - 20}{40 - 20} = \frac{Q - 32}{72 - 32}$$

$40(P - 20) = 20(Q - 32)$

$40P - 800 = 20Q - 640$

$40P = 20Q + 160$

f_s: $P = 0{,}5Q + 4$

Keseimbangan sebelum subsidi: D = S

$10 - 0{,}5Q = 0{,}5Q + 4$

$Q = 6$

$P = 10 - 0{,}5Q$

$P = 7$

Jadi, keseimbangan pasar sebelum subsidi adalah E(6 ; 7).

Fungsi penawaran setelah subsidi:
F_{ss}: P_s = 0,5Q + 4 – 2
P_s = 0,5Q + 2

Keseimbangan setelah subsidi:
10 – 0,5Q = 0,5Q + 2
Q = 8
P = 10 – 0,5Q
P = 6
Jadi, keseimbangan pasar setelah subsidi adalah E_s(8 ; 6).

b. Subsidi yang diterima konsumen:
Subsidi per unit = (P_o – P_s)
= (7 – 6)
= 1
Subsidi total yang diterima konsumen:
S_k = (P_o – P_s) X Q_s
S_k = (7 – 6) X 8
S_k = 1 X 8
= 8

c. Subsidi yang diterima produsen:
Subsidi per unit = s – (P_o – P_s)
= 2 – (7 – 6)
= 1
Subsidi total yang diterima produsen:
S_p = (s – (P_o – P_s)) X Q_s
S_p = (2 – (7 – 6)) X 8
S_p = 1 X 8
= 8

d. Subsidi total yang diberikan pemerintah:
S = s X Q_s
S = 2 X 8
S = 16

e. Gambar
Titik potong kurva permintaan
D: P = 10 – 0,5Q

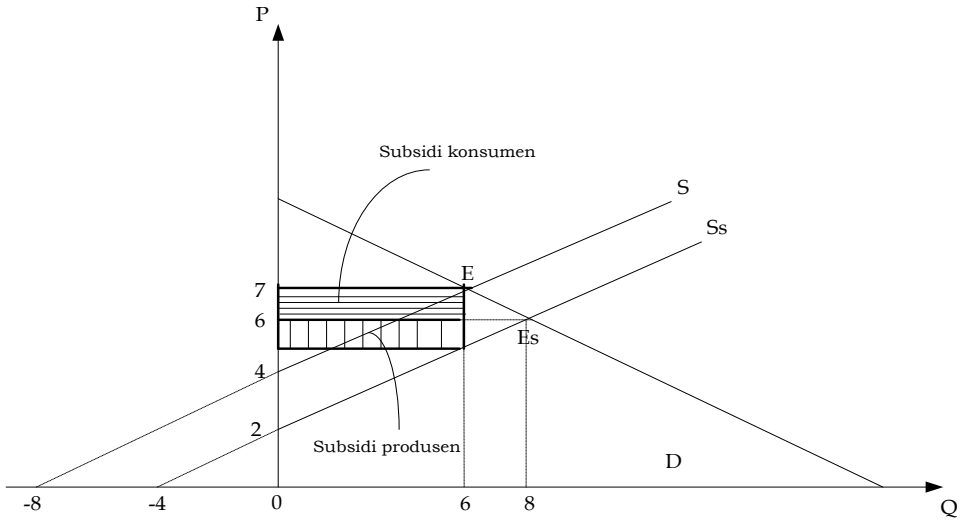
P	10	0
Q	0	20

Titik potong kurva penawaran sebelum subsidi
S: P = 0,5Q + 4

P	4	0
Q	0	-8

Titik potong kurva penawaran setelah subsidi
S_s: P = 0,5Q + 2

P	2	0
Q	0	-4



Gambar 4.27.

Contoh 2

Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang Q = 49 – P^2, dan fungsi penawaran adalah Q = P^2 – 4. Pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp.4 per unit terhadap barang tersebut.

Pertanyaan:

a. Tentukan harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi.
b. Berapa besar subsidi per unit dan total yang diterima konsumen.
c. Berapa besar subsidi per unit dan total yang diterima produsen.
d. Berapa besar subsidi total yang diberikan oleh pemerintah.

Jawaban

a. Keseimbangan sebelum subsidi: D = S

$49 - P^2 = P^2 - 4$

$2P^2 = 53$

$P^2 = 26{,}5$

$P_1 = -5{,}15$ (tidak mungkin)

$P_2 = 5{,}15$

$Q = P^2 - 4$

$Q = (5{,}15)^2 - 4$

$Q = 22{,}5$

Jadi, keseimbangan pasar sebelum subsidi adalah E(22,5 ; 5,15).

Fungsi penawaran setelah subsidi:

F_{ss}: $Q = P^2 - 4$

$Q_s = (P + 4)^2 - 4$

$Q_s = P^2 + 8P + 16 - 4$

$Q_s = P^2 + 8P + 12$

Keseimbangan setelah subsidi:

$49 - P^2 = P^2 + 8P + 12$

$2P^2 + 8P - 37 = 0$

$a = 2$

$b = 8$

$c = -37$

$d = b^2 - 4ac$

$d = (8)^2 - 4(2)(-37)$

$d = 360$

$$P_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

$$P_{12} = \frac{-8 \pm \sqrt{360}}{2(2)}$$

$$P_1 = \frac{-8 + \sqrt{360}}{2(2)}$$

$= 2{,}74$

$$P_2 = \frac{-8 - \sqrt{360}}{2(2)}$$

$= -6{,}74$ (tidak mungkin)

$Q = 49 - P^2$
$Q = 49 - (2,74)^2$
$Q = 41,49$
Jadi, keseimbangan pasar setelah subsidi adalah $E_s(41,49 ; 2,74)$.

b. Subsidi yang diterima konsumen:
Subsidi per unit $= (P_o - P_s)$
$= (5,15 - 2,74)$
$= 2,41$
Subsidi total yang diterima konsumen:
$S_k = (P_o - P_s) \text{ X } Q_s$
$S_k = (5,15 - 2,74) \text{ X } 41,49$
$S_k = 2,41 \text{ X } 41,49$
$= 99,99$

c. Subsidi yang diterima produsen:
Subsidi per unit $= s - (P_o - P_s)$
$= 4 - (5,15 - 2,74)$
$= 1,59$
Subsidi total yang diterima produsen:
$S_p = (s - (P_o - P_s)) \text{ X } Q_s$
$S_p = (4 - (5,15 - 2,74)) \text{ X } 41,49$
$S_p = 1,59 \text{ X } 41,49$
$= 65,97$

d. Subsidi total yang diberikan pemerintah:
$S = s \text{ X } Q_s$
$S = 4 \text{ X } 41,49$
$S = 165,96$

4.7. FUNGSI BIAYA

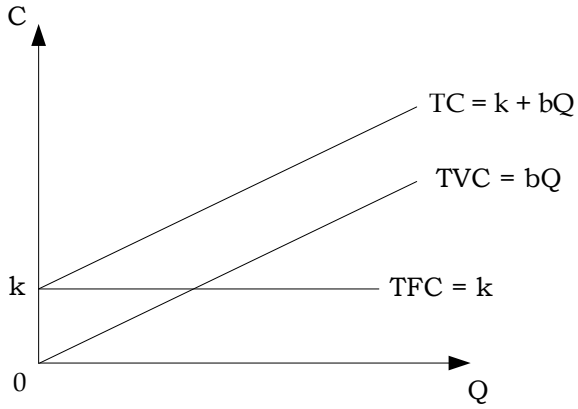
Biaya merupakan sejumlah dana yang dikeluarkan perusahaan dalam rangka melakukan kegiatan produksinya. Keseluruhan biaya yang dikeluarkan perusahaan untuk kegiatan produksinya dinyatakan dalam biaya total/ *total cost* (TC).

Unsur biaya total meliputi biaya tetap total (*total fixed cost*) dan biaya variabel total (*total variable cost*). Biaya tetap tidak tergantung dari besarnya tingkat produksi, berapapun tingkat produksi perusahaan selama masih dalam

kapasitas mesin perusahaan. Oleh karena itu biaya tetap berbentuk sebuah konstanta. Unsur biaya tetap dalam perusahaan antara lain biaya pembelian mesin, sewa gedung/pabrik, depresiasi dan sebagainya. Biaya tetap jika digambarkan berbentuk horisontal dan sejajar dengan garis sumbu Q.

Biaya variabel merupakan biaya yang tergantung pada jumlah barang yang dihasilkan. Semakin tinggi jumlah barang yang dihasilkan semakin besar pula biaya variabelnya. Oleh karena biaya variabel merupakan fungsi dari jumlah barang yang dihasilkan, maka biaya variabel merupakan fungsi dari kuantitas (Q). Kurva biaya variable yang berbentuk garis lurus bergerak dari kiri bawah ke kanan atas.

Berikut ini penggambaran kurva fungsi biaya total, biaya tetap total, dan biaya variabel total:



Gambar 4.28.

Keterangan:

TC	= biaya total
TFC	= biaya tetap total
TVC	= biaya variabel total
a	= kemiringan yang merupakan AVC
b	= konstanta, berupa TFC

Sumbu horisontal mencerminkan Q (kuantitas) barang dalam satuan tertentu, sedangkan sumbu vertical mencerminkan biaya total (C).

Fungsi biaya total biasanya merupakan fungsi linier, sehingga jika dinyatakan dalam model linier berbentuk Y = aX + b dengan Y mengindikasikan biaya total, b adalah konstanta yang menunjukkan biaya tetap total, dan aX

adalah biaya variabel total. Jika biaya total tersebut diaplikasikan sesuai dengan model linier, maka besarnya biaya total adalah:

$$TC = TFC + TVC$$

Keterangan:
TC = biaya total (aX + b)
TFC = biaya tetap total (b)
TVC = biaya variabel total (aX)

TC dan TVC merupakan fungsi dari kuantitas (TC = f(Q) dan TVC = f(Q)), artinya besar kecilnya TC dan TVC sangat bergantung dari besar kecilnya kuantitas.

Besarnya biaya juga dapat dinyatakan dalam rata-rata (*average*), yaitu merupakan hasil bagi antara biaya total dengan kuantitas. Biaya variabel rata-rata merupakan biaya variabel total dibagi kuantitas dan biaya tetap rata-rata merupakan hasil bagi antara biaya tetap total dengan kuantitas. Semua kondisi di atas dinyatakan dalam rumus di bawah ini.

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$AVC = \frac{TVC}{Q}$$

$$AFC = \frac{TFC}{Q}$$

Keterangan:
AC = biaya rata-rata (*average cost*)
AFC = biaya tetap rata-rata (*average fixed cost*)
AVC = biaya variabel rata-rata (*average variable cost*)
Q = kuantitas

Dengan demikian AC = AFC + AVC atau $AC = \frac{TFC + TVC}{Q}$

Contoh 1

PT ABC merupakan perusahaan yang bergerak pada bidang produksi kancing. Saat ini biaya tetap perusahaan adalah sebesar Rp 20.000.000,- sedangkan untuk menghasilkan satu unit kancing dibutuhkan biaya sebesar Rp 100,-.

Pertanyaan:

a. Tunjukkan persamaan biayanya.
b. Tentukan berapa biaya total yang dikeluarkan jika perusahaan tersebut memproduksi 300.000 unit kancing.
c. Tentukan besarnya jumlah produksi kancing jika biaya total perusahaan sebesar Rp. 60.000.000,-.
d. Pada jawaban (c), tentukan besarnya biaya rata-rata, biaya variabel rata-rata dan biaya tetap rata-ratanya.
e. Gambarkan kurva biayanya.

Jawaban

Diketahui:

TFC = Rp 20.000.000,-

VC/unit = Rp 100,-

a. TC = TFC + TVC
   TC = TFC + VC/unit.Q
   TC = 20.000.000 + 100Q

b. Q = 300.000 unit
   TC = 20.000.000 + 100 (300.000)
   TC = 50.000.000

c. TC = Rp. 40.000.000,-
   TC = TFC + VC/unit.Q
   60.000.000 = 20.000.000 + 100Q
   40.000.000 = 100Q
   Q = 400.000 unit kancing

d. $AC = \frac{TC}{Q}$

$$AC = \frac{60.000.000}{400.000}$$

AC = Rp 150,-

$$AVC = \frac{TVC}{Q}$$

$$AVC = \frac{40.000.000}{400.000}$$

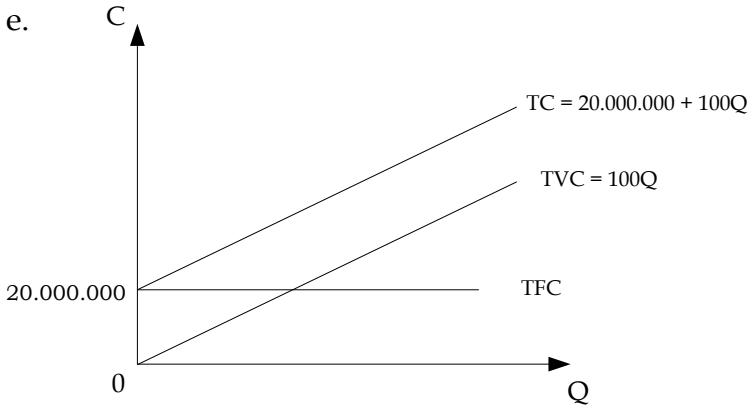
AVC = Rp 100,-

$$AFC = \frac{TFC}{Q}$$

$$AFC = \frac{20.000.000}{400.000}$$

AFC = Rp 50,-

e.



Gambar 4.29.

4.8. FUNGSI PENERIMAAN

Penerimaan merupakan sejumlah uang yang diterima oleh produsen sehubungan penjualan produknya. Semakin banyak unit barang terjual maka semakin banyak penerimaan total yang diperoleh dan sebaliknya. Dengan demikian penerimaan total merupakan fungsi dari kuantitas (Q). Penerimaan total/*total revenue* (TR) dinyatakan dalam:

$$TR = PQ$$

Keterangan:
TR = penerimaan total (*total revenue*)
P = harga jual
Q = kuantitas yang terjual

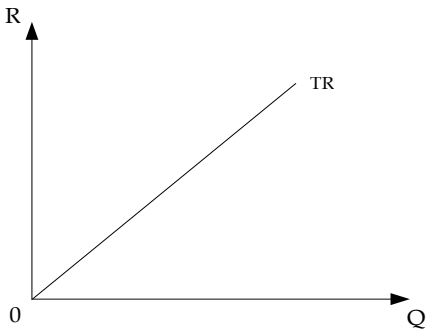
TR merupakan fungsi dari kuantitas (TR = f(Q)), artinya besar kecilnya TR sangat bergantung dari besar kecilnya kuantitas.

Besarnya penerimaan rata-rata (*average revenue*) merupakan hasil bagi dari penerimaan total (TR) dengan kuantitas (Q), dengan demikian sering pula disebut penerimaan rata-rata sama dengan harga jual (P).

$$AR = \frac{TR}{Q}$$

$$AR = \frac{PQ}{Q} = P$$

Kurva penerimaan total yang berbentuk linier sebagai berikut:



Gambar 4.30.

Keterangan:
TR = penerimaan total

Kondisi di atas berlaku apabila pasar berbentuk persaingan sempurna. Jika pasar berbentuk persaingan tidak sempurna (monopoli, oligopoli, dan lainnya), maka penggambaran kurva penerimaan total berbentuk non linier (misalnya parabolik).

Contoh 1

PT Senang Hati merupakan perusahaan penghasil boneka beruang untuk keperluan dalam negeri. Saat ini perusahaan menjual produknya dengan harga Rp 20.000,- per unit.

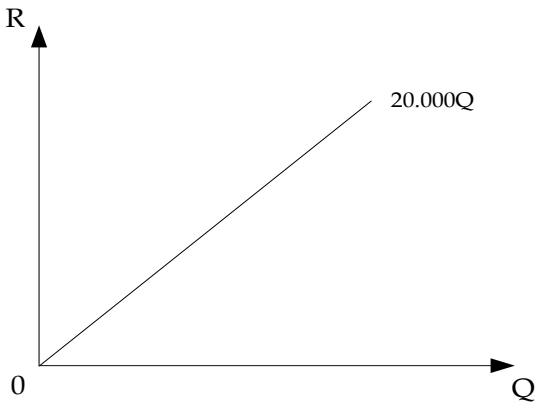
Pertanyaan:

a. Buatlah persamaan penerimaan totalnya.
b. Berapa penerimaan totalnya jika produk yang terjual sebanyak 400 unit
c. Jika perusahaan menginginan penerimaan total sebesar Rp 7.000.000,- tentukan berapa unit perusahaan harus menjual produknya.
d. Buatlah kurva penerimaan totalnya.

Jawaban
Diketahui:
P = Rp 20.000

a. TR = PQ
   TR = 20.000Q
b. Q = 400 unit
   TR = 20.000 (400)
   TR = Rp 8.000.000,-
c. TR = Rp 7.000.000,-
   7.000.000 = 20.000Q
   Q = 350 unit

d.

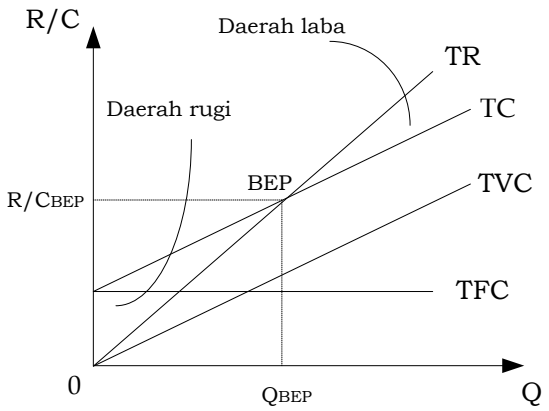


Gambar 4.31.

4.9. ANALISIS PULANG POKOK (*BREAK EVEN POINT*/BEP)

Suatu keadaan dikatakan pulang pokok apabila besarnya penerimaan total (*Total Revenue*) sama dengan pengeluaran total (*Total Cost*). Dengan diketahuinya penerimaan total (TR) yang diperoleh dan biaya total (TC) yang dikeluarkan, maka kita dapat melakukan analisis apakah perusahaan mendapat keuntungan atau mengalami kerugian. Keuntungan terjadi apabila TR > TC, sedangkan kerugian terjadi pada saat TR < TC.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa analisis pulang-pokok (*break-even*) merupakan suatu konsep yang digunakan untuk menganalisis jumlah minimum produk yang harus dihasilkan atau terjual agar perusahaan tidak mengalami kerugian.



Gambar 4.32.

Keterangan:
Q = jumlah produk
TR = penerimaan total
TC = biaya total
BEP = *Break Even Point*

Q_{BEP} mencerminkan posisi tingkat produksi/penjualan pulang-pokok tertentu, pada tingkat produksi ini perusahaan mengalami laba normal atau dengan kata lain perusahaan tidak mengalami keuntungan atau kerugian (π = 0). Area di sebelah kanan Q_{BEP} merupakan area keuntungan dimana besarnya penerimaan total (TR) lebih besar dari biaya total (TC) sehingga nilai laba adalah positif ($\pi > 0$), sedangkan area sebelah kiri Q_{BEP} merupakan area kerugian dimana besarnya penerimaan total (TR) lebih kecil dari biaya total (TC) sehingga nilai laba adalah negatif ($\pi < 0$).

Besarnya kuantitas pada saat terjadi *Break Even Point* (TF=0) adalah:

$$\pi = TR - TC$$
$$0 = TR - TC$$
$$TR = TC$$
$$PQ = TFC + AVC.Q$$
$$PQ - AVC.Q = TFC$$
$$Q = \frac{TFC}{P - AVC}$$

a BEP maka $\pi = 0$ sehingga $Q = \frac{TFC}{P - AVC}$

Harga dikurangi dengan biaya variabel rata-rata disebut kontribusi marjin (*margin contribution*), dengan rumus:

Kontibusi margin = P– TVC

Contoh 1

Andaikan biaya total yang dikeluarkan perusahaan ditunjukkan oleh persamaan TC = 2.000.000 + 100Q dan produk dijual dengan harga Rp 200 per unit.

Pertanyaan:

a. Pada tingkat produksi berapa unit perusahaan ini berada dalam posisi peluang-pokok (*break even*).
b. Apa yang tejadi jika perusahaan memproduksi sebanyak 30.000 unit.
c. Jika perusahaan menginginkan laba sebesar Rp. 5.000.000,- tentukan berapa unit produk harus terjual.
d. Jika perusahaan mengalami kerugian sebesar Rp. 500.000,- tentukan berapa unit produk yang terjual.
e. Gambarkan kurvanya.
f. Jika harga jual meningkat 20%, tentukan tingkat produksi pulang pokok yang baru.
g. Jika biaya tetap total turun 10%, tentukan tingkat produksi pulang pokok yangbaru.
h. Apabila biaya tetap total berada pada kondisi mula-mula, maka jika barang yang terjual sebanyak 18.000 unit dan perusahaan mengharapkan keuntungan sebesar Rp 1.000.000,- berapa harga jual yang ditetapkan perusahaan untuk memperoleh keuntungan yang diharapkan tersebut.

Jawaban

Diketahui:

TC = 2.000.000 + 100Q
TFC = Rp. 2.000.000,-
AVC = Rp. 100,-
P = Rp. 200 per unit

a. $Q = \frac{\text{TFC}}{(\text{P - AVC})}$

$$Q = \frac{2.000.000}{(200 - 100)}$$

Q = 20.000 unit

b. Q = 30.000 unit

π = TR – TC

π = PQ – (TFC + AVC.Q)

π = 200 (30.000) – (2.000.000 + 100 (30.000))

π = 6.000.000 – (2.000.000 + 3.000.000)

π = 1.000.000

c. π = Rp. 5.000.000

$$Q = \frac{2.000.000 + 5.000.000}{(200 - 100)}$$

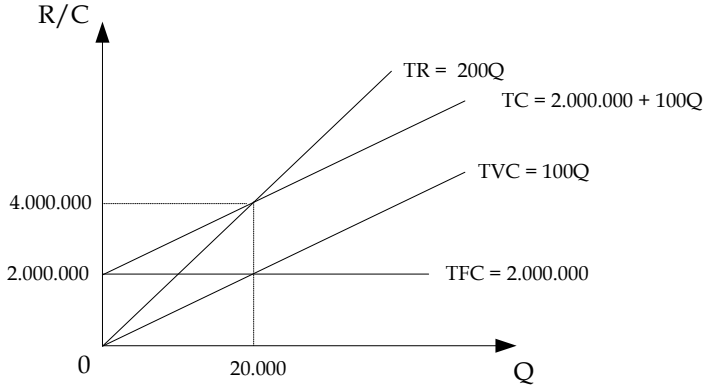
Q = 70.000 unit

d. Rugi Rp. 500.000,-

$$Q = \frac{2.000.000 - 500.000}{(200 - 100)}$$

Q = 15.000 unit

e



Gambar 4.33.

f. Harga yang baru Rp 240,-

$$Q = \frac{2.000.000}{(240 - 100)}$$

Q = 14.286 unit

g. Biaya tetap total yang baru Rp 1.800.000,-

$$Q = \frac{1.800.000}{(200 - 100)}$$

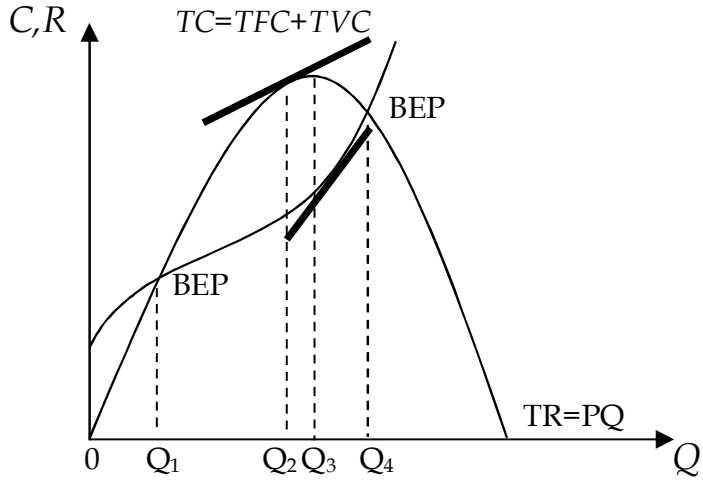
Q = 18.000 unit

h. Q = 18.000 unit; laba yang diharapkan Rp 1.000.000,-

$$18.000 = \frac{2.000.000 + 1.000.000}{(P - 100)}$$

18.000P – 1.800.000 = 3.000.000
18.000P = 4.800.000
P = 266,67,-

Pada kasus TC berbentuk fungsi lain yang non linier misal parabola atau kubik, maka ditunjukkan pada gambar berikut ini:



Gambar 4.34.

Perusahaan akan mengalami kondisi pulang pokok atau *break even point* (BEP) jika memproduksi pada Q_1 dan Q_4 hal ini dikarenakan besarnya penerimaan total sama dengan biaya total (TR=TC). Jika perusahaan memproduksi di bawah Q_1 atau di atas Q_4 maka perusahaan akan mengalami kerugian karena besarnya biaya total lebih besar dari penerimaan total (TR<TC). Perusahaan akan memperoleh keuntungan jika memproduksi di antara Q_1 dan Q_4, dimana semakin besar rentang jarak antara TR dengan TC maka semakin besar keuntungan yang diperoleh dan sebaliknya. Pada gambar di atas di posisi Q_3 merupakan jarak terlebar antara TR dengan TC, dengan demikian pada tingkat produksi tersebut perusahaan memperoleh keuntungan yang maksimum.

Contoh 2
Apabila diketahui besarnya penerimaan total suatu perusahaan ditunjukkan oleh persamaan TR = $-0{,}10Q^2 + 20Q$, sedangkan fungsi biaya total yang dikeluarkan adalah TC = $0{,}25Q^3 - 3Q^2 + 7Q + 20$. Tentukan keuntungan perusahaan ini pada tingkat produksi dan penjualan sebesar 10 dan 20 unit.

Jawaban
Diketahui:
TR = $-0{,}10Q^2 + 20Q$
TC = $0{,}25Q^3 - 3Q^2 + 7Q + 20$

Laba = TR – TC
= $-0{,}10Q^2 + 20Q - (0{,}25Q^3 - 3Q^2 + 7Q + 20)$
= $-0{,}10Q^2 + 20Q - 0{,}25Q^3 + 3Q^2 - 7Q - 20$
= $-0{,}25Q^3 + 2{,}9Q^2 + 13Q - 20$

Q = 10
Laba = $-0{,}25(10)^3 + 2{,}9(10)^2 + 13(10) - 20$
= $-0{,}25(1.000) + 2{,}9(100) + 13(10) - 20$
= –250 + 290 + 130 – 20
= 150 (keuntungan)

Q = 20
Laba = $-0{,}25(20)^3 + 2{,}9(20)^2 + 13(20) - 20$
= $-0{,}25(8000) + 2{,}90\ (400) + 13(20) - 20$
= –2000 + 1160 + 260 – 20
= –600 (kerugian)

4.10. FUNGSI KONSUMSI DAN TABUNGAN

Dalam ilmu ekonomi makro, pendapatan masyarakat dalam suatu negara dapat dialokasikan pada sektor konsumsi dan tabungan, artinya jika masyarakat memiliki suatu penghasilan tertentu, maka dari penghasilan tersebut sebagian digunakan untuk konsumsi dan sebagian lagi untuk ditabung. Apabila dinyatakan dalam model persamaan akan tertera seperti di bawah ini.

$$Yd = C + S$$

Keterangan:

Y_d = *disposible income* (pendapatan yang siap untuk digunakan)

$Y_d = Y - Tx + Tr$

Dalam perekonomian tertutup sederhana (2 sektor), nilai Tax (Tx) dan *transfer payment* (Tr) adalah 0 sehingga Yd=Y.

C = konsumsi (*consumption*)

S = tabungan (*saving*)

Besar kecilnya nilai konsumsi dan tabungan tergantung dari besarnya pendapatan nasional. Semakin besar pendapatan nasional maka semakin besar pula konsumsi dan tabungannya dan sebaliknya, apabila pendapatan berkurang maka konsumsi dan tabungan pun akan berkurang pula.

Persamaan dari fungsi konsumsi adalah sebagai berikut:

$$C = aYd + b$$

Keterangan:

a = koefisien dari Yd = MPC

b = konsumsi otonom (*autonomous consumption*) = Co

Seseorang yang belum memiliki pendapatan (Y = 0) bukan berarti tidak ada konsumsi. Jika seseorang belum memiliki pendapatan maka besarnya konsumsi minimum adalah b. Sedangkan MPC (*marginal propensity to consume*) atau a merupakan tingkat kecenderungan untuk mengkonsumsi dimana hal ini mengindikasikan besarnya tambahan konsumsi sebagai akibat adanya tambahan pendapatan nasional sejumlah tertentu. MPC juga dapat berarti besarnya perubahan konsumsi sebagai akibat perubahan pendapatan ($\Delta C/\Delta Y$).

Persamaan dari fungsi tabungan adalah sebagai berikut:

$Y_d = C + S$

$S = Y_d - C$

$S = Y_d - (b + aY_d)$

$S = Y_d - b - aY_d$

$S = -b + Y_d - aY_d$

$S = -b + (1 - a)Y_d$

Keterangan:

b = tabungan otonom (*autonomous saving*)

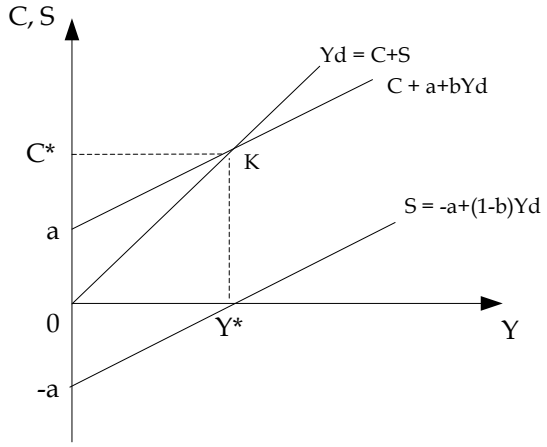
(1 – a) = koefisien dari Yd = MPS

Jika dilihat dari fungsi konsumsi di atas, pada saat Y = 0 diperoleh nilai konsumsi sebesar b (konsumsi otonom). Sesuai dengan rumus $Y_d = C + S$, efek dari konsumsi otonom berpengaruh pada tabungan, dimana pada saat Y = 0 diperoleh nilai tabungan –b (untuk menutupi nilai b pada konsumsi). Sementara itu (1 – a) atau MPS merupakan tingkat kecenderungan untuk menabung dimana terdapat tambahan tabungan sebagai akibat meningkatnya pendapatan nasional. MPS juga dapat berarti besarnya perubahan tabungan sebagai akibat perubahan pendapatan ($\Delta S/\Delta Y$).

Dengan demikian jika MPC dijumlahkan dengan MPS adalah sama dengan 1.

MPC + MPS = 1

Penggambaran kurva konsumsi dan tabungan dapat digambarkan secara bersama-sama dengan kurva pendapatan nasional sebagai berikut:



Gambar 4.35.

Keterangan:

K = keseimbangan pendapatan nasional ($Y_d = C$)
C* = besarnya konsumsi pada saat keseimbangan
Y* = besarnya pendapatan pada saat keseimbangan
a = konsumsi otonom
–a = tabungan otonom

Kurva Y membentuk sudut 45^0 merupakan penjumlahan dari kurva C dan kurva S. Kurva konsumsi (C) berbentuk linier dimulai dari titik a (konsumsi otonom), karena pada saat Y = 0 masyarakat tetap melakukan konsumsi. Kemiringan dari kurva C mengikuti nilai b (MPC). Kurva tabungan (S) juga berbentuk linier dan dimulai dari titik –a (tabungan otonom). Keseimbangan

pendapatan nasional (di titik K) terjadi pada saat $Y_d = C$ atau pada saat $S = 0$. Pada titik keseimbangan mengindikasikan bahwa seluruh pendapatan nasional digunakan untuk konsumsi. Pada bagian kanan keseimbangan pendapatan nasional adalah Y>C, berarti terdapat bagian dana yang digunakan untuk tabungan. Sedangkan pada bagian kiri dari titik keseimbangan adalah Y<C, berarti nilai S adalah negatif untuk menutupi konsumsi yang lebih besar dari pendapatan. Karena mungkin saja terjadi untuk membiayai konsumsinya dilakukan dengan cara meminjam atau hutang.

Angka pengganda (multiplier)

Angka pengganda merupakan suatu bilangan yang menjelaskan besarnya tambahan pendapatan nasional sebagai akibat adanya perubahan pada variabel-variabel tertentu dalam perekonomian. Secara umum dalam model perekonomian yang sederhana, angka pengganda (*multiplier*) dirumuskan sebagai berikut:

$$k = \frac{1}{MPS} = \frac{1}{(1 - MPC)}$$

Keterangan:
k = nilai pengganda

Contoh 1
Dalam perekonomian yang paling sederhana diketahui besarnya konsumsi masyarakat pada suatu negara yang ditunjukkan oleh persamaan $C = 30 + 0{,}8Y_d$.

Pertanyaan:
a. Tentukan fungsi tabungannya.
b. Berapa nilai konsumsi pada saat tingkat pendapatan Rp 40M.
c. Tentukan besarnya nilai keseimbangan pendapatan nasional.
d. Tentukan besarnya konsumsi pada saat tabungan sebesar Rp 20M.
e. Gambarkan grafiknya.

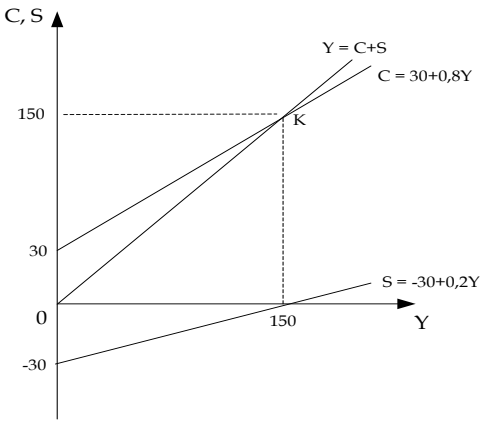
Jawaban
a. $S = Yd - C$
$= Yd - (30 + 0{,}8Yd)$
$= Yd - 30 - 0{,}8Yd$
$= -30 + 0{,}2Yd$

b. Y = Rp 40M
C = 30 + 0,8Yd
= 30 + 0,8(40)
= Rp 62M

c. Keseimbangan pendapatan nasional Yd = C atau S = 0
Yd = 30 + 0,8Y
0,2Yd = 30
Yd = 150M
atau:
S = 0
0 = –30 + 0,2Yd
Yd = 150M

d. S = 20
20 = –30 + 0,2Yd
0,2Yd = 50
Yd = 250M
C = 30 + 0,8Yd
= 30 + 0,8(250)
= 230
atau:
C = Yd – S
= 250 – 20
= Rp 230M

e.



Gambar 4.36.

Contoh 2

Dalam perekonomian tertutup sederhana diketahui fungsi konsumsi C = 20 + 0,75Yd, dan besarnya investasi otonom I = 10 satuan mata uang (smu) per tahun.

Pertanyaan:

a. Tentukan fungsi tabungan.
b. Tentukan besarnya pendapatan nasional keseimbangan.
c. Tentukan besarnya konsumsi dan tabungan saat pendapatan nasional keseimbangan.
d. Tentukan angka penggandaannya.
e. Jika investasi mengalami perubahan (ΔI) sebesar 5 smu, maka berapa besarnya perubahan pendapatan nasional.
f. Buatkan grafiknya.

Jawaban

a. Yd = C + S
   S = Yd – C
   S = Yd – (20 + 0,75Yd)
   S = -20 + 0,25Yd

b. Yd = C + I
   Yd = 20 + 0,75Yd + 10 , (keterangan: Yd = Y)
   Y = 30 + 0,75 Y
   0,25Y = 30
   Y = 120

c. C = 20 + 0,75Y
   = 20 + 0,75(120)
   = 110
   S = -20 + 0,25Y
   = -20 + 0,25(120)
   = 10

Dalam perekonomian 2 sektor, saat pendapatan nasional keseimbangan besarnya S=I.

d. $k = \frac{1}{MPS} = \frac{1}{1-MPC} = \frac{1}{1-0,75} = \frac{1}{0,25} = 4\ kali$

e.

$\Delta I = 5$

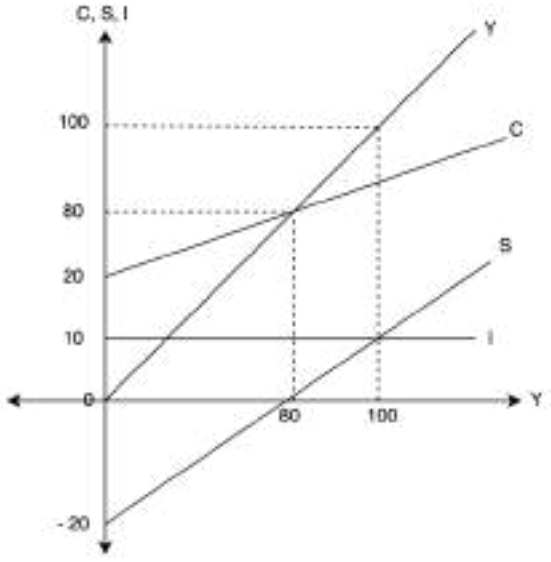
$K = \frac{\Delta Y}{\Delta I}$

$4 = \frac{\Delta Y}{5}$

$\Delta Y = 20$

Keterangan:
Perubahan investasi (ΔI) sebesar 5 satuan mata uang mengakibatkan perubahan pendapatan (ΔY) sebesar 4 kalinya dari perubahan investasi (ΔI).

f. Gambar



4.11. PENDAPATAN NASIONAL

Pendapatan nasional merupakan konsep keseimbangan nasional yang menyatakan bahwa besarnya pengeluaran pemerintah agregat (*aggregate expenditure*/ AE) sama dengan besarnya pendapatan nasional (Y). Pendapatan nasional dihitung berdasarkan sektor-sektor yang dimiliki oleh negara tersebut, dapat terdiri dari dua sektor (rumah tangga dan perusahaan), tiga sektor

(rumah tangga, perusahaan, dan pemerintah), dan empat sektor (rumah tangga, perusahaan, pemerintah, dan luar negeri).

Perekonomian dua sektor, pendapatan nasional didasarkan atas pengeluaran untuk konsumsi (C) dan investasi (I). Sementara itu untuk perekonomian tiga sektor ditambah dengan pengeluaran pemerintah (G), dan untuk empat sektor ditambahkan kembali dengan net ekspor (X – M). Berikut ini rumus-rumus dari sektor-sektor yang ada.

Perekonomian dua sektor : $AE = C + I$
Perekonomian tiga sektor : $AE = C + I + G$
Perekonomian empat sektor : $AE = C + I + G + (X - M)$

Dikarenakan terjadi keseimbangan pendapatan nasional dimana AE = Y, maka konsep rumus di atas dapat menjadi:

Perekonomian dua sektor : $Y = C + I$
Perekonomian tiga sektor : $Y = C + I + G$
Perekonomian empat sektor : $Y = C + I + G + (X - M)$

Keterangan:

Y = pendapatan nasional
C = konsumsi, dinyatakan dalam $a + bY_d$
I = investasi pemerintah, dinyatakan dalam I_0
G = pengeluaran pemerintah, dinyatakan dalam G_0
(X–M) = net ekspor (ekspor dikurangi dengan impor), dinyatakan dalam X_0 dan I_0

Perekonomian saat semua kapasitas produksi dalam penggunaan penuh dikatakan bahwa perekonomian tersebut dalam keadaan *full employment*. Perbedaan antara besarnya jumlah investasi yang terjadi dengan besarnya *full employment saving* (*saving* pada tingkat *full employment*) menunjukkan terjadinya:

Inflationary gap $I > S$
Deflationary gap $I < S$

Perekonomian suatu negara dikatakan memiliki surplus anggaran jika besarnya penerimaan pemerintah dari pajak lebih besar dari pengeluaran pemerintah dalam bentuk *transfer payment* dan *government expenditure* (G) begitu pula sebaliknya.

Surplus : Tx > (Tr + G)
Defisit : Tx < (Tr + G)

Surplus neraca perdagangan dapat dilihat dari besarnya ekspor (X) dan impor (M) atau dengan kata lain dapat dilihat pada net ekspor. jika net ekspor bernilai positif berarti terdapat surplus neraca perdagangan dan sebaliknya.

Surplus : X > M
Defisit : X < M

Contoh 1

Misalkan perekonomian pada suatu negara tertentu memiliki data seperti di bawah ini (dalam miliar satuan mata uang).

Konsumsi	: $C = 150 + 0.6Y_d$
Investasi	: I = 40
Pengeluaran pemerintah	: G = 60
Pajak	: Tx = 250 + 0,25Y
Transfer payment	: Tr = 150
Ekspor	: X = 50
Impor	: M = 10 + 0,15Y

Pertanyaan:

a. Tentukan besarnya keseimbangan pendapatan nasional dan konsumsi saat itu, jika negara tersebut menganut perekonomian dua sektor, tiga sektor, dan empat sektor.
b. Tentukan besarnya surplus/defisit dari anggaran dan neraca perdagangan untuk perekonomian empat sektor.
c. Gambarkan grafik keseimbanga untuk perekonomian 3 sektor.

Jawaban

a. Dua sektor: Y = C + I
   $Y = 150 + 0.6Y_d + 40$
   Y = 190 + 0,6Yd , 2 sektor Y = Yd
   Y = 190 + 0,6Y
   0,4Y = 190
   Y = 475 M

C = 50 + 0,6Yd
C = 50 + 0,6Y
C = 50 + 0,6(475)
C = 475 M

Tiga sektor: Y = C + I + G
Y = 150 + 0,6Yd + 40 + 60
Y = 150 + 0,6 {Y – (250 + 0,25Y) + 150} + 40 + 60
Y = 150 + 0,6 {0,75Y – 100) + 40 + 60
Y = 150 + 0,45Y – 60 + 40 + 60
Y = **90 + 0,45Y** + 40 +60
Y = 190 + 0,45Y
0,55Y = 190 + 0,45Y
Y = 345,45M

C = **90 + 0,45Y**
= 90 + 0,45Y(345,45)
= 245,45M

Empat sektor: Y = C + I + G + (X – M)
Y = **90 + 0,45Y** + 40 + 60 + {50 – (10 + 0,15Y)}
Y = 230 + 0,3Y
0,7Y = 230
Y = 328,57M

b. Pengeluaran pemerintah : G = 60
Pajak : Tx = 250 + 0,25Y
Transfer payment : 150

Tx = 250 + 0,25(328,57)
= 332,14M
Tr+G = 150 + 60
= 210M

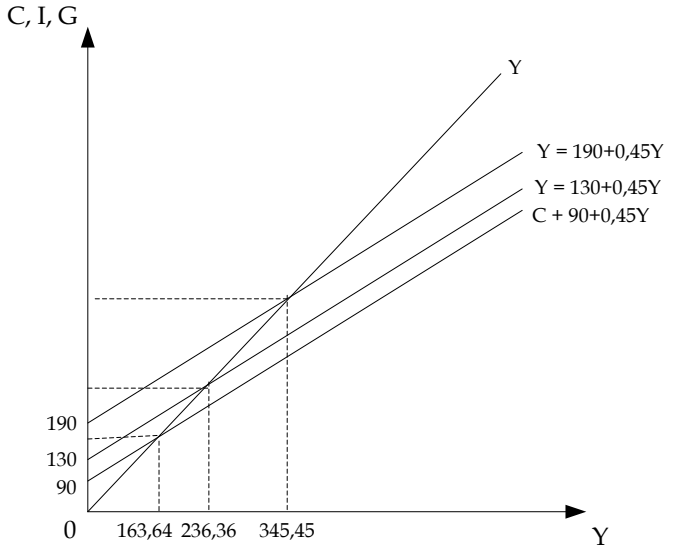
Karena Tx > (Tr + G) maka terjadi surplus anggaran sebesar 122,14M

Ekspor : 50
Impor : M = 10 + 0,15Y

M = 10 + 0,15(328,57)
= 59,29M

Karena X < M, maka terdapat defisit neraca perdagangan sebesar 9,29M

d.



Gambar 4.37.

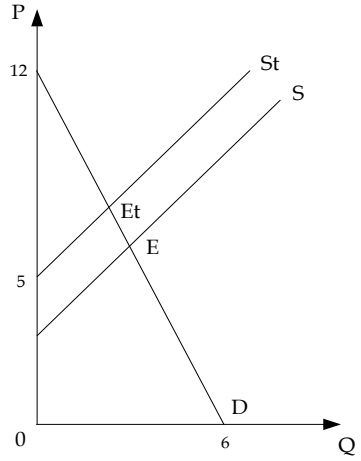
4.12 SOAL LATIHAN

1. Apabila diketahui fungsi permintaan P = 20 – 5Q, tentukan besarnya jumlah produk yang diminta jika harga jual Rp 5,-, tentukan besarnya harga jual jika jumlah yang diminta sebanyak 4 unit, serta gambarkan kurva permintaannya dari persamaan tersebut di atas.
2. Apabila diketahui fungsi penawaran P = 3Q + 4, tentukan besarnya harga jual jika jumlah yang ditawarkan Rp 2 unit,-, tentukan besarnya jumlah yang ditawarkan pada saat harga Rp 1,- dan gambarkan kurva penawarannya dari persamaan tersebut di atas.
3. Diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah Q = 6 – 0,75P dan fungsi penawaran pada 4P = 2Q + 10. Tentukan harga dan kuantitas keseimbangan pasar dan gambarkan kedua kurva tersebut dalam satu gambar. Apabila harga turun sebesar USD 1, berapa persen perubahan jumlah yang diminta dan ditawarkan.
4. Sebuah perusahaan menghadapi fungsi permintaan dalam P = Q^2 – 13Q + 30, sementara itu fungsi penawaran terbentuk dalam Q = , tentukan harga

dan kuantitas keseimbangan pasar dan gambarkan kedua fungsi tersebut dalam satu gambar.

5. Jika diketahui fungsi permintaan dan penawaran dari dua macam barang seperti tertera di bawah ini:
   $Q_{dA} = 10 - 4P_A + 2P_B$
   $Q_{dB} = 12 + 2P_A - 2P_B$
   $Q_{sA} = -10 + 8P_A - 2P_B$
   $Q_{sB} = -8 - 2P_A + 6P_B$

   Harga barang A dan B dinyatakan dalam satuan USD, sedangkan kuantitas A dan B dinyatakan dalam unit. Bagaimana sifat kedua barang tersebut dan tentukan keseimbangan pasar (harga dan kuantitas) dari kedua barang tersebut di atas.
6. Jika diketahui fungsi permintaan dan penawaran dari dua macam barang seperti tertera di bawah ini:
   $P_{dA} = 24 - Q_A - 2Q_B$
   $P_{dB} = 27 - Q_A - 3Q_B$
   $Q_{sA} = -6 + 2P_A - P_B$
   $Q_{sB} = -3 - P_A + 8P_B$
   Bagaimana sifat kedua barang tersebut dan tentukan keseimbangan pasar (harga dan kuantitas) dari kedua barang tersebut di atas.
7. Bila diketahui fungsi permintaan $Q = 20 - 2P$ dan pada saat harga ditawarkan Rp.20,- maka jumlah barang yang ditawarkan adalah 32 unit, sementara jika ditawarkan seharga Rp 40,- jumlah barang yang ditawarkan menjadi 72 unit. Besarnya pajak yang dibebankan oleh pemerintah adalah Rp 2,- per unit barang.
   Pertanyaan:
   a. Tentukan harga dan jumlah keseimbangan sebelum pajak.
   b. Tentukan harga dan jumlah keseimbangan sesudah pajak.
   c. Berapa pajak total yang diterima pemerintah.
   d. Berapa pajak per unit dan total yang ditanggung oleh konsumen.
   e. Berapa pajak per unit dan total yang ditanggung oleh produsen.
   f. Gambarkan grafik untuk kasus di atas.
8. Jika diketahui gambar dibawah ini mempunyai keseimbangan setelah pajak adalah E_t (2 1/3 ; 7 1/3) dan besarnya pajak per unit yang dibebankan pemerintah adalah Rp.2,- per unit.



Pertanyaan:

a. Tentukan fungsi permintaan, penawaran, dan penawaran setelah pajak.
b. Tentukan keseimbangan sebelum pajak.
c. Berapa pajak total yang diterima pemerintah.
d. Berapa pajak per unit dan total yang ditanggung oleh konsumen.
e. Berapa pajak per unit dan total yang ditanggung oleh produsen.

9. Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $P = Q^2 - 11Q + 30$ dan fungsi penawaran $Q = \sqrt{(P - 1)}$, dan terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar Rp 3,- per unit. Maka tentukan:
   a. Harga dan jumlah keseimbangan sebelum pajak.
   b. Harga dan jumlah keseimbangan sesudah pajak.
   c. Berapa pajak total yang diterima pemerintah.
   d. Berapa pajak per unit dan total yang ditanggung oleh konsumen.
   e. Berapa pajak per unit dan total yang ditanggung oleh produsen.
   f. Gambarkan grafik untuk kasus di atas.
10. Bila diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $P = Q^2 - 15Q + 56$ dan fungsi penawaran $Q = \sqrt{(P - 5)}$. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar 25%.

    Pertanyaan:

    a. Tentukan keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak.
    b. Tentukan nilai pajak per unitnya.
    c. Berapa beban pajak per unit dan pajak total yang ditanggung oleh konsumen.
    d. Berapa beban pajak per unit dan pajak total yang ditanggung oleh produsen.
    e. Berapa total pajak yang diterima pemerintah.

f. Gambarkan grafiknya dan tunjukkan daerah pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen.

11. Apabila diketahui fungsi permintaan adalah P – 12 + 2Q = 0 dan fungsi penawarannya adalah 3 + Q – P = 0. Pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp 1 per unit terhadap produk tersebut. Tentukan:
    a. Keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi.
    b. Berapa besarnya subsidi yang ditanggung oleh pemerintah.
    c. Besarnya subsidi yang diterima konsumen dan produsen.
    d. Gambarkan grafiknya.
12. Jika fungsi penawaran dinyatakan dalam $P = \sqrt{(Q+4)}$, dan fungsi permintaan dinyatakan dalam $P = \sqrt{(14-Q)}$. jika terhadap barang tersebut mendapatkan subsidi sebesar Rp. 1,- per unit.
    a. Tentukan harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi.
    b. Berapa besar subsidi per unit dan total yang diterima konsumen.
    c. Berapa besar subsidi per unit dan total yang diterima produsen.
    d. Berapa besar subsidi total yang diberikan oleh pemerintah.
    e. Gambarkan grafik dalam satu gambar.
13. PT Vendy bergerak dalam bidang produksi pembuatan baju anak-anak. Baju tersebut digunakan untuk memenuhi permintaan salah satu pasar tradisional yang berada di wilayah Jakarta Barat. Untuk menghasilkan satu potong baju dibutuhkan biaya sebesar Rp 10.000,-. Saat ini biaya tetap yang dikeluarkan perusahaan adalah sebesar Rp 40.000.000,-.
    Pertanyaan:
    a. Tunjukkan persamaan biayanya.
    b. Tentukan berapa biaya total yang dikeluarkan jika perusahaan tersebut memproduksi 100 lusin baju.
    c. Tentukan besarnya jumlah baju yang diproduksi jika biaya total perusahaan sebesar Rp. 80.000.000,-.
    d. Dari jawaban (c), tentukan besarnya biaya rata-rata, biaya variabel rata-rata dan biaya tetap rata-ratanya.
    e. Gambarkan kurva biayanya.
14. Jika diketahui fungsi biaya dari suatu perusahaan adalah $TC = 2Q^2 + 4Q + 6$, tentukan:
    a. Biaya tetap total dan fungsi biaya variabel total.
    b. Biaya total jika perusahaan memproduksi sebesar 2 unit.
    c. Besarnya kuantitas yang diproduksi jika biaya total perusahaan sebesar 36 satuan mata uang.

d. Besarnya biaya variabel total pada saat jumlah yang diproduksi 5 unit.
e. Fungsi biaya rata-rata, biaya variabel rata-rata, dan biaya tetap rata-rata.

15. PT Bahagia Selalu adalah perusahaan penghasil lemari kaca untuk keperluan dalam negeri. Saat ini produk tersebut dijual dengan harga Rp 700.000,- per unit.

    Pertanyaan:
    a. Buatlah persamaan penerimaan totalnya.
    b. Berapa penerimaan totalnya jika produk yang terjual sebanyak 200 unit.
    c. Tentukan berapa unit perusahaan harus menjual produknya jika perusahaan menginginan penerimaan total sebesar Rp 63.000.000,-.
    d. Buatlah kurva penerimaan totalnya.

16. Jika diketahui harga jual suatu produk adalah HK$ 50 dan biaya variabel rata-rata sebesar 40% dari harga jual serta besarnya biaya tetap total yang dikelaurkan perusahaan sebesar HK$ 30,000.

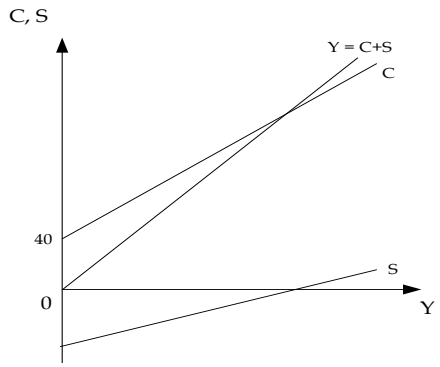
    Pertanyaan:
    a. Pada tingkat produksi berapa unit perusahaan ini berada dalam posisi peluang-pokok (*break even*).
    b. Berapa keunyungan/kerugian jika produk yang terjual sebesar 1.500 unit.
    c. Gambarkan kurvanya.
    d. Berapa unit tingkat produksi pulang pokok yang baru jika harga jual naik 20%.
    e. Apabila perusahaan menginginkan keuntungan sebesar HK$ 10,000, berapa unit produk harus terjual jika disaat bersamaan terjadi kenaikan biaya tetap total menjadi HK$ 40,000.
    f. Apabila unit yang terjual sebanyak 1.500 dan perusahaan mengharapkan keuntungan sebesar HK$ 24,000, berapa harga jual yang ditetapkan perusahaan untuk memperoleh keuntungan yang diharapkan tersebut.

17. Seorang pengrajin mainan anak-anak jenis boneka plastik dapat menjual produknya dengan harga Rp 50.000,-. Pada saat perusahaan memproduksi sebanyak 100 unit, maka perusahaan mengalami *break even*. Jika tingkat produksi perusahaan meningkat 25% dari tingkat produksi pada saat *break even*, perusahaan akan memperoleh laba sebesar Rp 500.000,-.

    Pertanyaan:
    a. Tentukan fungsi penerimaan total (TR), fungsi biaya variabel total (TVC), dan besarnya biaya tetap total (TFC).
    b. Berapa unit yang harus diproduksi jika perusahaan menginginkan keuntungan sebesar Rp 2.000.000,-.

c. Jika marjin kontribusi berubah menjadi Rp 25.000,-, tentukan tingkat produksi pulang pokoknya.
d. Berdasarkan soal (c), berapa harga jualnya jika besarnya biaya variabel rata-rata adalah 60% dari harga jual.

18. Apabila diketahui fungsi konsumsi dalam suatu negara adalah $C = 50 + 0{,}7Y_d$ dan di negara tersebut pemerintah tidak membebankan pajak ataupun memberikan *transfer* payment. Dengan menggunakan pendekatan rumus $Y = C + S$, tentukan:
    a. Fungsi tabungannya.
    b. Berapa nilai konsumsi pada saat tingkat pendapatan 70M satuan mata uang.
    c. Tentukan besarnya nilai keseimbangan pendapatan nasional.
    d. Tentukan besarnya konsumsi pada saat tabungan sebesar 40M smu.
    e. Gambarkan grafiknya.
    f. Tentukan angka penggandanya dan jelaskan artinya.
19. Pada suatu negara tertentu, fungsi konsumsi terbentuk berdasarkan besarnya tingkat pendapatan nasional negara tersebut. Pada saat negara tersebut tidak memiliki pendapatan, maka besarnya konsumsi yang terjadi sebesar 80M smu. Besarnya tingkat kecenderungan untuk melakukan menabung (MPS) adalah 0,3.
    Pertanyaan:
    a. Tentukan besarnya keseimbangan pendapatan nasional.
    b. Berapa besarnya pendapatan nasional pada saat tabungan sebesar 30M smu.
    c. Gambarkan grafiknya.
20. Tingkat keseimbangan pendapatan nasional dalam suatu negara terjadi pada Y = 40M smu. Apabila diketahui jika pendapatan meningkat sebanyak 200M smu maka diikuti dengan peningkatan konsumsi sebesar 70M smu.
    Pertanyaan:
    a. Tentukan fungsi konsumsi dan tabungannya.
    b. Tentukan besarnya konsumsi pada saat tabungan 12M smu.
21. Dalam perekonomian tertutup sederhana diketahui grafik berikut ini:



Apabila saat pendapatan nasional sebesar 200M satuan mata uang (smu), maka seluruh pendapatan digunakan untuk konsumsi. Tentukan besarnya tabungan pada saat konsumsi sebesar 280M smu.

22. Diketahui model pendapatan nasional suatu negara seperti tertera di bawah ini (dalam miliar satuan mata uang).

Konsumsi	: C = 20 + 0.75Yd
Investasi	: I = 40
Pengeluaran pemerintah	: G = 50
Ekspor	: X = 50
Impor	: M = 40

Pertanyaan:

a. Tentukan besarnya keseimbangan pendapatan nasional jika negara tersebut menganut perekonomian dua sektor, tiga sektor, dan empat sektor.
b. Gambarkan grafik keseimbangan untuk dua sektor.
c. Gambarkan grafik keseimbangan untuk tiga sektor.

Bab 5

BARIS DAN DERET

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:
1. Menyebutkan perbedaan baris dan deret;
2. Menghitung baris dan deret aritmatika;
3. Menghitung baris dan deret geometrika.

5.1. PENGERTIAN BARIS DAN DERET

Baris (*sequence*) adalah suatu susunan bilangan dengan urutan tertentu. Bilangan-bilangan yang tersusun tersebut disebut suku. Perubahan di antara suku-suku yang berurutan ditentukan oleh suatu kelipatan atau pertumbuhan bilangan tertentu. Johannes dan Budiono (1994) menyebut baris sebagai banjar yang lebih lanjut didefinisikan sebagai suatu fungsi yang wilayahnya ialah set bilangan alam, atau secara sederhana disebut sebagai suatu set bilangan bernomor satu, dua, tiga, dan seterusnya, yaitu

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \ldots, S_n, \ldots$

S_n = dinamakan suku umum baris

Contoh:
2, 4, 6, 8, 10, 12 …

Sementara yang dimaksud dengan deret (*series*) adalah jumlah dari bilangan dalam suatu baris.

Contoh:
2, 6, 12, 20, 30, 42, ...

Dimana, deretan bilangan tersebut tersusun dengan aturan dimana suku pertamannya sama dengan suku pertama baris hitungnya, suku keduanya merupakan penjumlahan dua suku pertama baris hitungnya, suku ketiganya merupakan penjumlahan tiga suku pertama baris hitungnya, dan seterusnya.

Atau secara matematis:
$d_1 = S_1 = 2$
$dn = S_{n-1} + S_1 x\ n$

Sehingga,
d1 = 2
$d2 = S_1 + S_1 \times 2 = 2 + 2x2 = 6$
$d3 = S_2 + S_1 \times 3 = 6 + 2x3 = 12$, dst…

Namun, karena pola perubahan suku pada baris berbeda-beda, maka baris dan deret pun kembali dibedakan menjadi dua yaitu secara aritmatika dan geometri.

5.2. BARIS DAN DERET ARITMATIKA

5.2.1. Baris Aritmatika (Baris Hitung)

Baris aritmatika (*arithmetic sequence*) atau selanjutnya akan disebut sebagai baris hitung, adalah baris yang suku berurutannya mempunyai pertambahan bilangan yang konstan atau memiliki beda yang sama dan pada umumnya dilambangkan dengan huruf b.

Suatu baris aritmatika dapat ditentukan jika suku pertama (a_1) dan beda yang sama (b) diketahui. Maka secara umum, suku barisan artimatika adalah

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \ldots, S_n, \ldots$

Keterangan:
$S_2 = S_1 + b$
$S_3 = S_2 + b = (S_1 + b) + b = S_1 + 2b$
$S_4 = S_3 + b = (S_1 + 2b) + b = S_1 + 3b$
$S_5 = S_4 + b = (S_1 + 3b) + b = S_1 + 4b$

dengan koefisien dari b > 1. Sehingga, untuk mencari suku ke-n dalam baris aritmatika dapat digunakan rumus:

$$Sn = Sa1 + (n - 1)\, b$$

Keterangan:
S_1 = suku pertama
b = $S_n - S_{n-1}$ = beda yang sama (*common differences*)
n = banyaknya suku

Contoh:
Carilah suku ke 8 dari baris berikut ini

2, 4, 6, 8, 10, …

Jawaban
S_1 = 2
b = 2
n = 8

$S_n = S_1 + (n - 1)\, b$
$S_8 = 2 + (8 - 1)\, 2$
$= 16$

5.2.2. Deret Aritmatika (Deret Hitung)

Imbas dari adanya baris aritmatika adalah munculnya deret aritmatika yang selanjutkan akan disebut sebagai deret hitung. Deret hitung adalah jumlah dari suku suku dalam suatu baris hitung.

Baris hitung : 2, 4, 6, 8, 10, …
Deret hitung : 2, 6, 12, 20, 30, 42, ...

Keterangan:
S1 = a = 2
S2 = 2 + 4 = 6
S3 = 2 + 4 + 6 = 12
S4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20, …

Atau untuk menghitung jumlah dari suku suku dalam suatu baris hitung dapat diterapkan rumus:

$$D_n = \frac{n}{2}\{2.S_1 + (n-1)\,b\}$$

Keterangan:
S_1 = suku pertama
b = pembeda
n = indeks suku

Contoh:
Sebuah baris hitung mempunyai suku pertama yang bernilai 140. Perbedaan antar suku adalah 5. Hitunglah suku ke-10 nya dan berapakah jumlah lima suku pertamanya.

Jawaban
S1 = a = 140
b = 5
S10 = ?

Sn = S1 + (n – 1) b
S10 = 140 + (10 – 1) 5
= 185

Jadi, suku ke 10 adalah 185.

Sementara jumlah dari lima suku pertama adalah:

$$D_n = \frac{n}{2}\{2.S_1 + (n-1)\,b\}$$

$$D_5 = \frac{5}{2}\{2.140 + (5-1)\,5\}$$

$$= \frac{5}{2}(280 + 20)$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 300$$

$$= 750$$

5.3. BARIS DAN DERET GEOMETRI

5.3.1. Baris Geometri (Baris Ukur)

Baris geometri atau selanjutnya disebut sebagai baris ukur adalah susunan bilangan yang pola perubahan dari satu suku ke suku berikutnya memiliki besaran yang tetap dengan pola perubahan diperoleh dari perbandingan antara

satu suku dengan suku sebelumnya. Perbandingan antar suku dengan suku sebelumnya disebut sebagai rasio tetap yang dilambangkan dengan r.

Contoh:
2, 6, 18, 54, 162, …

Jawaban

$$r = \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \frac{162}{54} = 3$$

S_1 (suku pertama) $= S_1 = 2$
S_2 (suku kedua) $= S_1.r = 2.3 = 6$
S_3 (suku ketiga) $= S_1.r^2 = 2.3^2 = 2.9 = 18$
S_4 (suku keempat) $= S_1.r^3 = 2.3^3 = 2.27 = 54$
S_5 (suku kelima) $= S_1.r^4 = 2.3^4 = 2.8 = 162$

Sehingga disimpulkan untuk menentukan suku ke n diperoleh dengan menerapkan rumus:

$$S_n = S_1.r^{n-1}$$

Keterangan:
Sn = Suku ke n
r = rasio pengganda

Contoh:
Tentukan suku ke-8 dari baris ukur jika diketahui suku pertama dari baris tersebut adalah 16 dengan pengganda sebesar 2.

Jawaban
$S_1 = 16$
r = 2
n = 8

$S_n = a_1.r^{n-1}$
$S_8 = 16.2^7$
$S_8 = 2.048$

Contoh:
Carilah suku ke-11 dalam suatu baris ukur di mana suku ke-4 adalah 24 dan suku ke-9 adalah 768.

Jawaban
$S_4 = S_1\, r^3 = 24$
$S_9 = S_1\, r^8 = 768$

$$\frac{S_1 r^8}{S_1 r^3} = \frac{768}{24}$$

$r^5 = 32$
$r = 2$

$r^5 = 32$
$r = 2$

Karena $S_1.r^3 = 24$ dan $r = 2$, maka $S_1 = 3$

Sehingga,
$S_{11} = S_1\, r^{10}$
$= 3.2^{10}$
$= 3.072$

5.3.2. Deret Geometri (Deret Ukur)

Deret geometri atau selanjutnya disebut deret ukur adalah jumlah dari suku-suku atau bilangan-bilangan dalam suatu baris ukur atau dapat juga dikatakan bahwa deret ukur terdiri dari suku pertama yang sama dengan suku pertama baris ukurnya, suku kedua merupakan penjumlahan dua suku pertama baris ukurnya, suku ketiga merupakan penjumlahan tiga suku pertama baris ukurnya, dan seterusnya.

Contoh:
Baris Ukur : 2, 6, 18, 54, 162, …
Deret Ukur : 2, 8, 26, 80, 242, ...

Jawaban
$D_1 = 2$
$D_2 = 2 + 6 = 8$
$D_3 = 2 + 6 + 18 = 26$; dan seterusnya …

Jadi, untuk memperoleh jumlah suku ke-n dari suatu baris ukur dengan a_1 sebagai suku pertama dan r adalah sebagai rasio yang tetap, sehingga diperoleh rumus:

$$Dn = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)} \text{ dengan } r<1; \quad \text{atau} \quad Dn = \frac{a_1(r^n-1)}{(1-r)} \text{ dengan } r>1; \quad \text{dan} \quad Dn=n.a_1 \text{ dengan } r=1$$

5.4. SOAL LATIHAN

1. Carilah suku ke-15 dari deret aritmatika berikut ini:
   a. 5, 8, 11, 14, …
   b. 100, 98, 96, 94, …
   c. -9, -18, -27, -36, …
   d. -50, -45, -40, -35, …
2. Jika dari sebuah deret aritmatika yang suku pertamanya 300 dan pembeda antar suku-sukunya adalah 20, hitunglah:
   a. S_5
   b. S_{15}
   c. D_5
   d. D_{10}
3. Sebuah baris hitung mempunyai suku pertama yang bernilai 280. Perbedaan antar suku adalah 20. Hitunglah suku ke-10 nya dan berapakah jumlah lima suku pertamanya.
4. Jika S_3 dan S_7 dari sebuah deret aritmatika masing-masing adalah 40 dan 80, tentukan berapakah:
   a. S_1
   b. S_{20}
   c. D_{30}
   d. D_{50}
5. Jika S_6=30.000 dan $S1_0$=36.000, berapakah:
   a. b
   b. Pada suku ke berapakah terletak angka 0?
   c. D_{30}
   d. D_{35}
6. Jika suku ke 5 sebuah deret aritmatika adalah 70 dan jumlah 7 suku pertama adalah 455, hitunglah:
   a. S_1

b. b
c. S_{15}
d. D_{10}

7. Dari deret geometri 5, 15, 45, 135, 405,… tentukanlah
   a. S_{10}
   b. S_{20}
   c. S_{30}
   d. D_4
   e. D_{50}
8. Jika suku ke 3 suatu deret geometri adalah 800 dan suku ke 7 adalah 204.800, tentukan besarnya:
   a. S_1
   b. r
   c. S_{10}
   d. D_{15}
9. Jika diketahui rasio pengganda sebuah deret geometri adalah sebesar 7 dan suku ke 5 adalah sebesar 7.000, tentukanlah:
   a. S_1
   b. S_9
   c. D_5
   d. D_{10}
10. Tentukanlah baris geometri yang suku ke 3 nya adalah kuadrat dari suku pertama dan suku ke 5 nya adalah 64.

Bab 6

PENERAPAN BARIS DAN DERET DALAM ILMU EKONOMI

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

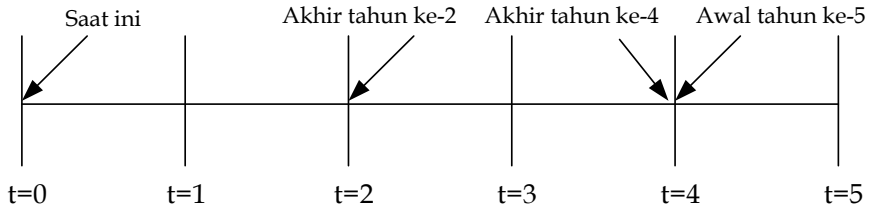
Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Menghitung nilai yang akan datang dari sejumlah uang yang ditanam sekarang berdasarkan bunga sederhana/majemuk/anuitas;
2. Menghitung nilai sekarang dari sejumlah uang yang diinginkan di masa yang akan datang berdasarkan bunga sederhana/majemuk/ anuitas;
3. Menetukan besarnya bunga dari suatu kondisi tertentu berdasarkan bunga sederhana/majemuk/anuitas;
4. Menentukan waktu yang dibutuhkan untuk mencapai tujuan tertentu berdasarkan bunga sederhana/majemuk/anuitas.

6.1. KONSEP DASAR MODEL BUNGA

Konsep dasar model bunga mengukur nilai waktu uang (*time value of money*). Maksudnya, apabila seseorang memiliki sejumlah uang tertentu dan mengalokasikan uang tersebut pada bank tertentu, maka jumlah uang yang dimiliki orang tersebut akan berbeda antara nilai sekarang dan nilai di masa yang akan datang. Hal ini terjadi karena terdapat sejumlah bunga yang diberikan oleh pihak bank terhadap dana orang tersebut yang ditanam di bank. Dengan demikian konsep ini menyatakan bahwa nilai Rp.1 sekarang akan berbeda dengan nilai Rp.1 tahun yang akan datang. Faktor-faktor yang mempengaruhi nilai dari suatu uang antara lain inflasi, bunga, waktu, dan pajak.

Garis waktu (*time line*) digunakan untuk memahami nilai waktu dari uang. T= 0 berarti nilai uang saat ini (sekarang), sedangkan t= 4 berarti nilai uang di akhir tahun ke-3 atau di awal tahun ke-4, dst.



Gambar 6.1

6.2. MODEL BUNGA SEDERHANA (*SIMPLE INTEREST*)

Penerapan model bunga sederhana merupakan bagian dari aplikasi ekonomi untuk baris dan deret. Model ini dihitung berdasarkan bunga yang dibayarkan dan tidak diakumulasikan. Apabila seseorang melakukan investasi pada deposito dan bunga diterima setiap tahun, maka untuk setiap tahun orang tersebut akan menerima sejumlah uang tertentu dalam jumlah yang sama dari bunga yang diberikan oleh bank.
Secara rumus besaran bunga yang diterima di tahun ke-n adalah:

$$I = P_o.i.t$$

Dan besarnya nilai keseluruhan (nilai pokok dan bunga) yang diterima di akhir tahun ke-n adalah:

$$P_t = P_o + (P_o.i.t) \quad \text{atau} \quad P_t = P_o(1 + i.t) \quad \text{atau} \quad P_o = \frac{P_t}{1 + t}$$

Keterangan:
I = bunga total yang diterima pemilik dana sampai akhir tahun ke-t
P_t = nilai keseluruhan yang diterima di akhir tahun ke-t
P_o = nilai sekarang uang yang ditanamkan
t = jangka waktu uang tersebut ditanamkan
i = bunga yang berlaku

$$I = Po.i.t$$
$$Pt = Po(1 + it)$$
$$P_o = \frac{P_t}{1 + it}$$

Contoh:
Tentukan besarnya bunga total yang diterima oleh pemilik dana di akhir tahun ke-5 dari Rp.1.000.000,- yang ditanamkan pada bank Prima yang memberikan bunga sebesar 6% per tahun dan tentukan berapa nilai keseluruhannya (bunga + pokok). Apabila pemilik dana menginginkan dana yang dimiliki menjadi Rp.1.480.000,- tentukan berapa lama keinginannya dapat tercapai jika bunga yang diberikan bank Prima adalah tetap.

Jawaban

P_o = Rp.1.000.000,-
t = 5 tahun
i = 6%

$I = P_o it$
I = Rp.1.000.000,- X 0,06 X 5
I = Rp.300.000,-
Jadi besarnya bunga total yang diterima oleh pemilik dana di akhir tahun ke-5 adalah Rp.300.000,-

$P_t = P_o + I$
P_5 = Rp.1.000.000,- + Rp.300.000,-
= Rp.1.300.000,-
atau

$P_t = P_o(1 + it)$
P_5 = Rp.1.000.000,- (1 + 0,06 X 5)
= Rp.1.000.000,- (1,3)
= Rp.1.300.000,-

Jadi besarnya nilai keseluruhan (bunga + pokok) yang diterima oleh pemilik dana di akhir tahun ke-5 adalah Rp.1.300.000,-
$P_t = P_o(1 + it)$
Rp.1.480.000,- = Rp.1.000.000,- (1 + 0,06 X t)
1,48 = (1 + 0,06t)
0,06t = 0,48
t = 8

Jadi apabila pemilik dana menginginkan dana yang dimiliki menjadi Rp.1.480.000,- maka keinginannya dapat tercapai di akhir tahun ke-8.

Contoh:
Apabila seseorang menginginkan dana sebesar Rp.2.012.500,- di akhir tahun ke-3, tentukan uang yang ditanam saat ini untuk mendapatkan dana tersebut jika bunga yang diberikan bank sebesar 5%. Jika saat ini orang tersebut memiliki dana sebesar Rp.1.500.000,- berapa bunga yang diberikan bank untuk mencapai keinginannya tersebut di akhir tahun ke-3.

Jawaban
P_3 = Rp.2.012.500,-
t = 3 tahun
i = 5%

$$P_o = \frac{P_t}{1 + it}$$

$$P_o = \frac{2.012.500}{1 + 0,05X3}$$

P_o = Rp.1.750.000,-

Jadi besarnya uang yang ditanam saat ini untuk mendapatkan dana sebesar Rp.2.012.500,- adalah Rp.1.750.000,-

$$P_o = \frac{P_t}{1 + it}$$

$$1.500.000 = \frac{2.012.500}{1 + 3i}$$

1.500.000 (1 + 3i) = 2.012.500
1.500.000 + 4.500.000i = 2.012.500
4.500.000i = 512.500
i = 0,1139 atau 11,39%

Jika saat ini orang tersebut memiliki dana sebesar Rp.1.500.000,- dan ingin memiliki dana sebesar Rp.2.012.500,- di akhir tahun ke-3 maka bunga yang harus diberikan oleh bank adalah sebesar 11,39%.

6.3. MODEL BUNGA MAJEMUK (*COMPOUND INTEREST*)

Model bunga majemuk juga merupakan bagian dari aplikasi ekonomi untuk baris dan deret. Perbedaan model ini dengan model bunga sederhana adalah pada perlakuan terhadap bunga. Jika pada model bunga sederhana bunga dihitung berdasarkan bunga yang dibayarkan dan tidak diakumulasikan, maka pada model bunga majemuk bunga yang dihitung tersebut diakumulasikan. Maksud dari model bunga majemuk adalah apabila seseorang melakukan investasi pada tabungan/deposito, maka untuk setiap tahun orang tersebut tidak menerima sejumlah bunga tertentu, karena bunga tersebut diakumulasikan kembali pada nilai pokok sehingga nilai dana di tahun ke-2 tidak sama dengan nilai mula-mula pada saat orang tersebut menabung dan tentunya bunga ditahun ke-2 lebih besar dibandingkan bunga tahun pertama. Kondisi tersebut terjadi secara berkelanjutan sampai pada tahun tertentu pada saat orang tersebut menarik keseluruhan dana di bank.

Misalkan David memiliki dana sebesar Rp.1.000.000,- dan uang tersebut ditanamkan pada bank ABC yang memberikan bunga sebesar 10% per tahun bunga dihitung secara tahunan, maka besarnya bunga yang diterima David di akhir tahun ke-1 adalah Rp.100.000,- (Rp.1.000.000,- X 10%) sehingga di akhir tahun pertama David memiliki dana sebesar Rp.1.100.000,-. Untuk tahun kedua bunga yang didapatkan oleh David adalah Rp.210.000,- ((Rp.1.100.000,- X 10%) + Rp.100.000,-) dan di akhir tahun ke-2 dana total yang dimiliki David adalah Rp.1.210.000,-. Perhitungan tersebut dapat dilakukan secara terus menerus dalam tahunan sampai tahun ke-n.

Untuk mempersingkat proses perhitungan maka dapat digunakan rumus sebagai berikut dalam pencarian besarnya bunga yang diterima di akhir tahun ke-n:

$$B_n = P(i)^n$$

Apabila pembayaran bunga dilakukan beberapa kali dalam periode satu tahun, maka besarnya bunga yang diterima di akhir tahun ke-n adalah:

$$B_n = P\left(\frac{i}{m}\right)^m$$

B_n = Bunga total yang diterima di akhir tahun ke-n
P = nilai sekarang
i = bunga yang berlaku
n = jangka waktu dana ditanamkan
m = periode pembayaran bunga

Besarnya dana total (pokok + bunga) yang diterima mengacu pada rumus: F_n= P(1 + i). Untuk tahun ke-1 nilai yang diperoleh adalah F_1= Rp.1.000.000,- (1 + 0,1) dan untuk tahun ke-2 nilai yang diperoleh adalah F_2= F_1(1 + i) = Rp.1.100.000,- (1 + 0,1).

Perhitungan tahun-tahun yang akan datang (misalnya tahun ke-10) dapat dilakukan dengan cara F_{10}= F_9(1 + i). Cara ini tentunya memiliki perhitungan yang tidak efisien, karena untuk mencari nilai yang akan datang di akhir tahun ke-10 terlebih dahulu mencari nilai F_9, begitu pula untuk mencari F_9 harus terlebih dahulu mencari F_8 dan seterusnya. Dengan demikian Untuk menghitung nilai di masa datang dari nilai yang dimiliki sekarang dapat menggunakan model bunga majemuk:

$$B_n = P(i)^n$$

Apabila pembayaran bunga dilakukan lebih dari satu kali dalam satu tahun, maka rumus nilai yang akan datang menjadi:

$$F_n = P(1 + \frac{i}{m})^{mn}$$

Keterangan:

F_n = nilai total di akhir tahun ke-n
P = nilai sekarang
i = bunga yang berlaku
n = jangka waktu dana ditanamkan
m = periode pembayaran bunga

Konsep perhitungan nilai yang akan datang dapat juga menggunakan pendekatan tabel FVIF (*Future Value Interest Factor*), yaitu dengan cara mengalikan nilai sekarang dengan nilai pada tabel tersebut yang sesuai dengan *interest* (bunga) dan jangka waktu (n).

$$n = P(FVIFi,n)$$

atau jika bunga dibayarkan lebih dari satu kali dalam satu tahun maka nilai yang akan datang menjadi:

$$FVn = P(FVIFi/m;n)$$

Jika m sangat besar, bunga diperhitungkan sangat sering (terus menerus) dalam setahun, jumlah di masa datang tersebut dapat dirumuskan menjadi:

$$F_n \approx Pe^{in} \qquad e \approx 2{,}72$$

Bentuk ini dinamakan model bunga majemuk terus-menerus (*continuous compound interest*). Bunga majemuk terus-menerus dapat terjadi dalam kasus pinjam-meminjam yang seringkali dipraktikkan oleh para "lintah darat" yang menetapkan atau memperhitungkan bunga atas uang yang dipinjamkannya secara harian (m = 365), oleh karenanya model ini dapat pula disebut "model lintah darat".

Contoh:

1. Seorang investor menginginkan besarnya tingkat pengembalian sebesar 15% per tahun dari uang yang ditanamnya dalam surat berharga. Ia menanamkan uangnya dalam jangka waktu sepuluh tahun. Uang yang ditanam saat ini sebesar Rp.500.000.000,- Tentukan berapa besarnya uang investor tersebut diakhir tahun ke-sepuluh jika bunga dihitung berdasarkan:
   a. Tahunan;
   b. Semesteran;
   c. Kuartalan;
   d. Bulanan;
   e. Harian;
   f. Terus Menerus.
2. Apabila ia menginginkan uangnya menjadi empat kali lipat dari uang semula, berapa tahun ia harus menginvestasikan uangnya apabila tingkat pengembalian diasumsikan tetap selama tahun tersebut dan bunga dihitung berdasarkan bulanan.
3. Jika ia menginginkan uangnya menjadi dua kali lipat dari jumlah uang yang ditanamnya di akhir tahun kesepuluh, tentukan berapa bunga yang diharapkan untuk mendapatkan hasil tersebut (bunga dihitung secara harian).

Jawaban

1. a. $F_n = P(1 + \frac{i}{m})^{mn}$

$$F_{10} = 500.000.000\ (1 + \frac{0{,}15}{1})^{1.10}$$

F_{10} = Rp. 2.022.778.868,-

Perhitungan menggunakan tabel FVIF:

$F_n = P(FVIF_{i,n})$

$F_{10} = 500.000.000\ (FVIF_{15\%,10})$

$= 500.000.000\ (4,0456)$

=Rp.2.022.800.000,- (perbedaan terjadi karena pembulatan desimal tabel)

b. $F_{10} = 500.000.000\ (1 + \frac{0,15}{2})^{2.10}$

F_{10} = Rp. 2.123.925.550,-

c. $F_{10} = 500.000.000\ (1 + \frac{0,15}{4})^{4.10}$

F_{10} = Rp.2.180.189.379,-

d. $F_{10} = 500.000.000\ (1 + \frac{0,15}{12})^{12.10}$

F_{10} = Rp.2.220.106.614,-

e. $F_{10} = 500.000.000\ (1 + \frac{0,15}{365})^{365.10}$

F_{10} = Rp.2.240.154.126,-

f. $F_{10} = 500.000.000\ (e)^{0,15.10}$

F10 = Rp.2.240.844.535,-

2. Uang yang dimiliki saat ini adalah Rp.500.000.000,- dan menginginkan menjadi empat kali lipat, yaitu Rp.2.000.000.000,-

$$F_n = P(1 + \frac{i}{m})^{mn}$$

$$2.000.000.000 = 500.000.000(1 + \frac{0,15}{12})^{12.n}$$

$$4 = (1 + 0,0125)^{12.n}$$

$$12n = \frac{\log 4}{\log 1,0125}$$

n = 9,2996 (9 tahun, 3 bulan, 18 hari)

3. Uang yang dimiliki saat ini adalah Rp.500.000.000,- dan menginginkan menjadi dua kali lipat, yaitu Rp.1.000.000.000,-

$$F_n = P(1+\frac{i}{m})^{mn}$$

$$1.000.000.000 = 500.000.000\,(1+\frac{i}{365})^{10.365}$$

$$2 = (1+\frac{i}{365})^{10.365}$$

$$1{,}00019 = (1+\frac{i}{365})$$

$$0{,}00019 = \frac{i}{365}$$

$$i = 6{,}93\%$$

Penerapan bunga majemuk di atas berlaku untuk menetapkan nilai di masa yang akan datang dari sejumlah uang yang ditanamkan sekarang. Apabila seseorang menginginkan sejumlah dana tertentu di masa yang akan datang dari dana yang dimiliki sekarang, maka hal ini dapat dicari menggunakan rumus:

$$P = \frac{F_n}{(1+i)^n}$$

Apabila pembayaran bunga dilakukan lebih dari satu kali dalam satu tahun, maka rumus nilai sekarang menjadi:

$$P = \frac{F_n}{(1+\frac{i}{m})^{mn}}$$

Keterangan:

P = Nilai sekarang
F_n = Nilai total yang diinginkan di akhir tahun ke-n
i = Bunga yang berlaku
n = Jangka waktu dana ditanamkan
m = Periode pembayaran bunga

Konsep perhitungan nilai sekarang dapat juga menggunakan pendekatan tabel PVIF (*Present Value Interest Factor*), yaitu dengan cara mengalikan nilai yang akan datang dengan nilai pada tabel tersebut yang sesuai dengan *interest* (bunga) dan jangka waktu (n).

$$P = FV_n(PVIF_{i,n})$$

atau jika bunga dibayarkan lebih dari satu kali dalam satu tahun maka nilai yang akan datang menjadi:

$$P = FV_n\ (PVIF_{i/m;n})$$

Contoh:
Ali dan Rina berencana melangsungkan pernikahan mereka 5 tahun dari sekarang. Saat ini Ali merencanakan untuk memiliki sebuah rumah yang akan dihuni sesaat setelah mereka menikah. Harga rumah tersebut diperkirakan untuk lima tahun yang akan datang adalah sebesar Rp.250.000.000,-.
Pertanyaan:

a. Apabila tingkat bunga yang berlaku di pasar adalah 6%, berapa dana yang harus ditabung sekarang jika bunga dihitung berdasarkan tahunan, bulanan, triwulan, harian (1 tahun= 365).
b. Jika saat ini mereka memiliki dana sebesar Rp.150.000.000,- apakah keinginan mereka untuk memiliki rumah tersebut dapat tercapai jika bunga dihitung berdasarkan harian.
c. Berdasarkan soal b, berapa % bunga yang berlaku agar keinginan mereka dapat tercapai.
d. Jika dana yang dimiliki sekarang adalah Rp.175.000.000,-, berapa lama mereka harus menunda pernikahan mereka agar keinginannya tercapai jika bunga dihitung secara bulanan.

Jawaban

a. $$P = \frac{F_n}{(1+\frac{i}{m})^{mn}}$$

Bunga dihitung berdasarkan tahunan:

$$P = \frac{250.000.000}{(1+\frac{0{,}06}{1})^{1.5}}$$

P = Rp.186.814.543,-

Perhitungan menggunakan tabel PVIF:
$P = F_n(PVIF_{i,n})$
$F_6 = 250.000.000\ (PVIF_{5\%,6})$
= 250.000.000 (0,7462)
= Rp.186.550.000,- (perbedaan terjadi karena pembulatan desimal tabel)

Bunga dihitung berdasarkan bulanan:

$$P = \frac{250.000.000}{(1+\frac{0{,}06}{12})^{12.5}}$$

P = Rp.185.343.049,-

Bunga dihitung berdasarkan triwulan:

$$P = \frac{250.000.000}{(1+\frac{0{,}06}{4})^{4.5}}$$

P = Rp.185.617.605,-

Bunga dihitung berdasarkan harian:

$$P = \frac{250.000.000}{(1+\frac{0{,}06}{365})^{365.5}}$$

P = Rp.185.209.122,-

b. Apabila bunga dihitung secara harian, maka berdasarkan jawaban (a) dana yang harus ditabung saat ini adalah Rp. 185.209.122,-. Karena saat ini mereka memiliki dana sebesar Rp.150.000.000,- berarti keinginan mereka untuk mendapatkan rumah dalam lima tahun yang akan datang tidak tercapai.

c. $$P = \frac{250.000.000}{(1+\frac{i}{365})^{365.5}}$$

$$150.000.000 = \frac{250.000.000}{(1+\frac{i}{365})^{365.5}}$$

$$1{,}6667 = (1+\frac{i}{365})^{1825}$$

$$\sqrt[1825]{1{,}6667} = (1+\frac{i}{365})$$

i = 10,22%

jadi untuk memiliki rumah tersebut dengan dana Rp.150.000.000,- yang dimiliki saat ini, maka bunga yang berlaku adalah 10,22%.

d. $$175.000.000 = \frac{250.000.000}{(1+\frac{0{,}06}{12})^{12.n}}$$

$$1{,}4286 = (1 + 0{,}005)^{12n}$$

$$1{,}4286 = (1{,}005)^{12n}$$

$$\log 1{,}4286 = 12n \log 1{,}005$$

$$12n = \frac{\log 1{,}4286}{\log 1{,}005}$$

tahun, 11 bulan, 16 hari)

Kesimpulan: Ali merencanakan menikah 5 tahun yang akan datang, sedangkan untuk memiliki sebuah rumah yang diinginkan dari dana yang dimiliki sekarang dibutuhkan waktu 5 tahun 11 bulan dan 16 hari. Berarti Ali menunda rencana menikahnya selama 11 bulan 16 hari.

6.4. MODEL BUNGA ANUITAS (ANNUITY INTEREST)

Model ini digunakan sebagai perhitungan suatu nilai di masa yang akan datang dimana dana yang ditanamkan dilakukan secara periodik, misalnya pembayaran asuransi, dll. Model ini juga dapat digunakan untuk menghitung besarnya angsuran yang harus dibayarkan untuk mendapatkan sejumlah nilai tertentu di masa yang akan datang. Asumsi dasar untuk menggunakan model ini adalah terdapat kesamaan besaran dana yang disetorkan secara periodik tersebut. Sebagai permisalan terdapat seorang yang akan menabung pada suatu bank secara periodik (tahunan) sebesar Rp.1- selama n tahun dengan bunga sebesar i. Maka besarnya dana orang tersebut di akhir tahun ke-n mengikuti rumus:

$$FVA_n = P\left[\frac{(1 + \frac{i}{m})^{mn} - 1}{i}\right]$$

Keterangan:
FVA_n = Nilai masa datang anuitas di akhir tahun ke-n
P = Nilai sekarang yang dibayar secara periodik
i = Bunga yang berlaku
n = Jangka waktu dana ditanamkan
m = Periode pembayaran bunga

Konsep perhitungan nilai di masa yang akan datang menggunakan pendekatan tabel FVIFA (*Future Value Interest Factor Annuity*), yaitu dengan cara mengalikan nilai sekarang dengan nilai pada tabel FVIFA tersebut yang sesuai dengan *interest* (bunga) dan jangka waktu (n).

$$FVAn = P(FVIFAi,n)$$

Contoh:

Biaya pendidikan yang semakin meningkat dari tahun ke tahun membawa dampak pada pengeluaran Avi. Avi adalah seorang ibu rumah tangga yang memiliki 2 orang anak dan sedang merencanakan menyisihkan tabungannya secara teratur untuk biaya pendidikan kedua anaknya. Untuk itu Avi menggunakan sarana tabungan pendidikan di salah satu bank swasta. Bunga yang diberikan bank tersebut adalah 7% per tahun (jangka waktu 5 tahun) dan 8% per tahun (jangka waktu 10 tahun). Setiap tahun Avi menyisihkan dana sebesar Rp.20.000.000,- untuk dialokasikan di tabungan pendidikan tersebut. (keterangan: bunga dihitung secara tahunan).

Pertanyaan:

a. Tentukan jumlah tabungan Avi di akhir periode apabila dia mengalokasikan 50% dananya di tabungan pendidikan berjangka waktu 5 tahun dan sisanya pada jangka waktu 10 tahun.
b. Apabila 5 tahun yang akan datang Avi membutuhkan dana sebesar Rp.60.000.000,- untuk menyekolahkan anaknya di salah satu universitas, apakah dana tersebut mencukupi dari tabungan pendidikan yang dimilikinya.
c. Tentukan berapa total tabungan Avi di akhir tahun ke-10 jika tabungan jangka waktu 5 tahun yang telah jatuh tempo dialokasikan pada deposito dengan bunga 8% per tahun (bunga dihitung secara harian dan 1 tahun= 365 hari).

Jawaban

a. $FVA_n = P\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$

Diketahui dana yang akan disisihkan sebesar Rp.20.000.000,- per tahun dan akan dialokasikan 50% (Rp.10.000.000,-) pada tabungan pendidikan berjangka waktu 5 tahun dan sisanya (Rp.10.000.000,-) dialokasikan tabungan pendidikan berjangka waktu 10 tahun.

Besarnya dana di akhir tahun ke-5:

$$FVA_5 = 10.000.000 \left[\frac{(1 + 0,07)^5 - 1}{0,07} \right]$$

$$FVA_5 = 10.000.000 \ [5,7507 \ ]$$

$$= \text{Rp.}57.507.390,-$$

Besarnya dana Avi di akhir tahun ke-5 dari tabungan pendidikannya adalah Rp.57.507.390,-

Perhitungan menggunakan tabel FVIFA:
$FVA_n = P(FVIFA_{i,n})$
$FVA_5 = 10.000.000 \ (FVIFA_{0,07,5})$
$FVA_5 = 10.000.000 \ (5,7507)$
= Rp.57.507.000,- (perbedaan terjadi karena desimal pada tabel)

Besarnya dana di akhir tahun ke-10:

$$FVA_{10} = 10.000.000 \left[\frac{(1 + 0,08)^{10} - 1}{0,08} \right]$$

$$FVA_{10} = 10.000.000 \ [14,4866 \ ]$$

$$= \text{Rp.}144.865.625,-$$

Besarnya dana Avi di akhir tahun ke-10 dari tabungan pendidikannya adalah Rp.144.865.625,-

Perhitungan menggunakan tabel FVIFA:
$FVA_n = P(FVIFA_{i,n})$
$FVA_{10} = 10.000.000 \ (FVIFA_{0,08,10})$
$FVA_{10} = 10.000.000 \ (14,487)$
= Rp.144.870.000,- (perbedaan terjadi karena desimal pada tabel)

b. Besarnya dana Avi di akhir tahun ke-5 dari tabungan pendidikannya adalah Rp.57.507.390,- sedangkan Avi membutuhkan dana sebesar Rp.60.000.000,- untuk menyekolahkan anaknya di salah satu universitas, dengan demikian dana yang dimiliki Avi tidak mencukupi untuk menyekolahkan anaknya atau kurang sebesar Rp.2.492.610,- (Rp.60.000.000 – 57.507.390).

c. Besarnya dana di akhir tahun ke-10 dari 50% dana yang ditabung sesuai dengan perhitungan pada jawaban (a) adalah Rp.144.865.625,- dan di akhir tahun ke-5 tabungan pendidikan telah jatuh tempo dengan nilai sebesar Rp.57.507.390,-. Uang tersebut akan didepositokan kembali selama 5 tahun dengan bunga sebesar 8%. Maka dana sebesar Rp.57.507.390,- setelah didepositokan akan menjadi:

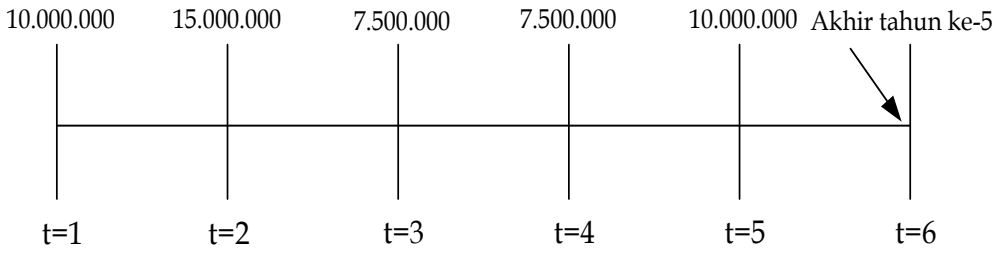
$$F_n = P(1 + \frac{i}{m})^{mn}$$

$$F_5 = 57.507.390\ (1 + \frac{0,08}{365})^{365.5}$$

$$F5 = \text{Rp.85.787.184,-}$$

Jadi besarnya tabungan Avi secara keseluruhan di akhir tahun ke-10 adalah Rp.144.865.625,- + Rp.85.787.184,- = Rp.230.652.809,-.

Seperti telah dijelaskan di atas, perhitungan nilai yang akan datang anuitas harus memenuhi asumsi terdapat kesamaan besaran dana yang disetorkan secara periodik tersebut. Apabila Avi mengalokasikan dana Rp.10.000.000,- tersebut dalam jumlah yang berbeda per tahunnya, maka pengerjaan tidak dapat dilakukan menggunakan anuitas tetapi menggunakan **bunga majemuk**. Perhitungan menggunakan bunga majemuk tersebut dilakukan secara bertahap sesuai jumlah dana dan waktu yang ada. Dengan menggunakan contoh di atas, misalkan Avi melakukan setoran per tahun dalam jumlah yang berbeda. Tahun ke-1 sebesar Rp.10.000.000,-, tahun ke-2 sebesar Rp.15.000.000,-, tahun ke-3 sebesar Rp.7.500.000,-, dan tahun ke-4 sebesar Rp.7.500.000,- serta tahun ke-5 sebesar Rp.10.000.000,- dan bunga dihitung secara tahunan, maka besarnya dana Avi di akhir tahun ke-5 adalah:



Gambar 6.2

$$F_n = P(1+i)^n$$

$$F_5 = 10.000.000\,(1+0{,}07)^5$$
$$= \text{Rp.}14.025.517,-$$

$$F_4 = 15.000.000\,(1+0{,}07)^4$$
$$= \text{Rp.}19.661.940,-$$

$$F_3 = 7.500.000\,(1+0{,}07)^3$$
$$= \text{Rp.}9.187.823,-$$

$$F_2 = 7.500.000\,(1+0{,}07)^2$$
$$= \text{Rp.}8.586.750,-$$

$$F_1 = 10.000.000\,(1+0{,}07)^1$$
$$= \text{Rp.}10.700.000,-$$

Jadi besarnya dana Avi di akhir tahun ke-5 adalah: Rp.14.025.517,- + 19.661.940,- + Rp.9.187.823,- + Rp.8.586.750,- + Rp.10.700.000,- = Rp.62.162.030,-

Apabila perusahaan membutuhkan sejumlah dana pada tahun tertentu, misalnya untuk membayar hutang yang akan jatuh tempo maka perusahaan wajib menganggarkan dana tersebut pada saat hutang tersebut jatuh tempo. Jika perusahaan menganggarkan dana tersebut secara periodik sampai pada saat jatuh tempo dana telah tersedia, maka besarnya dana yang dicadangkan per periode adalah mengikuti rumus sebagai berikut:

$$P = \frac{F_n}{\frac{(1+\frac{i}{m})^{mn}-1}{i/m}}$$

Contoh:

Mr. Robin berencana ingin menikah 3 tahun lagi. Biaya yang diperkirakan untuk pernikahannya adalah sebesar Rp 800.000.000,-. Oleh karena itu, Mr. Robin ingin menabung untuk melaksanakan rencananya itu. Dengan bunga bank 8% p.a, berapakah uang yang harus ditabung oleh Mr. Robin setiap akhir bulannya agar Ia dapat menikah pada waktu yang telah direncanakan. Apabila Mr. Robin hanya mampu menabung sebesar Rp.25.000.000,- untuk setiap kuartalnya, apakah rencana Mr. Robin dapat terwujud untuk menikah jika bunga yang berlaku tetap sebesar 8% p.a.

Jawaban

$$P = \frac{F_n}{\frac{(1+\frac{i}{m})^{mn}-1}{i/m}}$$

$$P = \frac{800.000.000}{\frac{(1+\frac{0,08}{12})^{12.3}-1}{0,08/12}}$$

$$P = \left[\frac{800.000.000}{40,5356}\right]$$

P = Rp.19.735.759,-

Jadi uang yang harus ditabung oleh Mr. R setiap akhir bulannya agar Ia dapat menikah pada waktu yang telah direncanakan adalah sebesar Rp.19.735.759,-

$$20.000.000 = \frac{800.000.000}{\frac{(1+\frac{0,08}{4})^{4.n}-1}{0,08/4}}$$

$$20.000.000 = \frac{800.000.000}{\frac{(1,02)^{4n}-1}{0,02}}$$

$$40 = \frac{(1,02)^{4n}-1}{0,02}$$

$$0,08 = (1,02)^{4n} - 1$$

$$1,8 = (1,02)^{4n}$$

$$\log 1,8 = 4n \log 1,02$$

$$4n = \frac{\log\ 1,8}{\log\ 1,02}$$

n = 7,42 tahun

Apabila Mr. Robin hanya mampu menabung sebesar Rp.25.000.000,- untuk setiap kuartalnya, maka rencana Mr. Robin tidak dapat terwujud untuk menikah di akhir tahun ke-3. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa dana Rp.800.000.000,- akan terkumpul setelah 7,42 tahun Mr. Robin menabung.

Penerapan bunga anuitas di atas berlaku untuk menetapkan nilai di masa yang akan datang dari sejumlah uang yang ditanamkan sekarang secara bertahap dan nilai sekarang dari sejumlah dana yang diinginkan di masa yang akan datang. Di samping penggunaan di atas, penerapan anuitas juga dapat digunakan untuk menghitung besarnya angsuran per periodik dari barang yang akan dimiliki sekarang. Apabila seseorang menginginkan sesuatu barang dengan harga tertentu dan orang tersebut tidak memiliki dana tunai untuk membeli barang tersebut, maka untuk memiliki barang tersebut dapat dilakukan secara angsuran. Angsuran dapat dilakukan pada awal ataupun akhir periode. Untuk mencari besarnya angsuran per periode (angsuran awal periode) dapat dilakukan dengan menggunakan rumus:

$$PVIFA_n = PMT. \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}(1+i)$$

atau menggunakan tabel PVIFA:

$$PVA_n = PMT. (PVIFA_{i,n})(1+i)$$

Apabila angsuran dibayarkan pada akhir periode maka rumus yang digunakan adalah:

$$PVIFA_n = PMT. \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

atau menggunakan tabel PVIFA:

$$PVA_n = PMT. (PVIFA_{i,n})$$

Keterangan:

$PVIFA_n$ = Nilai sekarang dari barang yang akan dimiliki
PMT = *Payment* (angsuran) per periode yang dibayarkan
i = Bunga yang berlaku
n = Jangka waktu angsuran

Contoh:

John akan mengangsur rumah seharga $220,000 selama 5 tahun, dengan tingkat bunga majemuk yang berlaku sebesar 10% tanpa uang muka (*down payment*). Pertanyaan:

a. Berapakah angsuran per tahunnya apabila dibayar pada *akhir* periode dan buatlah tabel angsuran dengan pembayaran setiap akhir tahun.
b. Berapakah angsuran per tahunnya apabila dibayar pada *awal* periode dan bautlah tabel angsuran dengan pembayaran setiap awal tahun.

Jawaban

PVA_5 = $220,000
n = 5
i = 10%

a. Besarnya angsuran per tahun (**akhir periode**)

$$PVA_n = PMT.\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$220{,}000 = PMT.\frac{1-\frac{1}{(1+0{,}1)^5}}{0{,}1}$$

$$PMT = \frac{220{,}000}{3{,}7908} = \$58{,}035$$

Pendekatan tabel PVIFA:

$PVA_n = PMT.\ (PVIFA_{i,n})$

$220{,}000 = PMT\ (3{,}7908)$

$$PMT = \frac{220{,}000}{3{,}7908} = \$58{,}035$$

Jadi besarnya angsuran per tahunnya apabila angsuran tersebut dibayar pada *akhir* periode adalah $58,035,-

Tabel 6.1: Tabel angsuran (akhir periode)

Tahun ke-	Angsuran	Bunga 10%	Cicilan Pokok	Saldo Pokok
(a)	**(b)=PMT**	**(c) = 10%x(e)**	**(d)=(b)-(c)**	**(e)=(e)n-1-(d)n**
0	-	-	-	$220,000
1	$58,035	$22,000	$36,035	$183,965
2	$58,035	$18,396.5	$39,638.5	$144,326.5
3	$58,035	$14,432.7	$43,602.3	$100,724.2
4	$58,035	$10,072.4	$47,962.6	$52,761.6
5	$58,035	$5,276.2	$52,761.6	0

b. Besarnya angsuran per tahun (awal periode)

$$PVA_n = PMT.\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$220{,}000 = PMT.\frac{1-\frac{1}{(1+0{,}1)^5}}{0{,}1}(1+0{,}1)$$

$$PMT = \frac{220{,}000}{4{,}1698} = \$52{,}760$$

Pendekatan tabel PVIFA:

PVAn = PMT. (PVIFAi,n)(1+i)

220,000 = PMT (3,7908)(1+0,1)

$$PMT = \frac{220{,}000}{4{,}1698} = \$52{,}760$$

Jadi besarnya angsuran per tahunnya apabila angsuran tersebut dibayar pada *awal* periode adalah $52,760,-

Tabel 6.2: Tabel angsuran (awal periode)

Tahun ke-	Angsuran	Bunga 10%	Cicilan Pokok	Saldo Pokok
(a)	(b)=PMT	(c) = 10%x(e)	(d)=(b)-(c)	(e)=(e)n-1-(d)n
0	$52,760	-	$52,760	$167,240
1	$52,760	$16,724	36,036	$131,204
2	$52,760	$13,120.4	$39,639.6	$91,564.4
3	$52,760	$9,156.44	$43,603.56	$47,960.84
4	$52,760	$4,796.084	$47,963.916	0
5	-	-	-	-

6.5 SOAL LATIHAN

1. Carilah nilai sekarang dari $300,000 di masa yang akan datang dalam kondisi:
   a. 10% *simple rate*, *compounded annually*, *discounted back* 5 years.
   b. 10% *simple rate*, *semiannual compounding*, *discounted back* 6 years.
   c. 18% *simple rate*, *quarterly compounding*, *discounted back* 2 years.
   d. 18% *simple rate*, *monthly compounding*, *discounted back* 3 years.
2. Hitunglah nilai yang akan datang dari $250,000 dengan bunga majemuk dalam kondisi-kondisi di bawah ini:
   a. 12%, *compounded annully for 5 years*.
   b. 12%, *compounded semiannuaally for 4 years.*
   c. 6%, *compounded quarterly for 6 years.*
   d. 6%, *compounded monthly for 3 years.*
3. David merencanakan untuk memenuhi kebutuhan tahunannya dari dana yang ia tanamkan pada bank XYZ. Kebutuhan tahunan David rata-rata sebesar Rp.20.000.000,-. Saat ini ia memiliki dana sebesar Rp.200.000.000,- dan mengalokasikan dana tersebut pada deposito dengan bunga 8% per tahun. Dengan menggunakan konsep bunga sederhana, tentukan:
   a. Besarnya bunga total yang diterima David di akhir tahun ke-10.
   b. Apakah David dapat menutupi biaya hidup per tahunnya dari bunga deposito tersebut.
   c. Berdasarkan soal b, jika nilai bunga yang diterimanya tersebut tidak mencukupi, berapa bunga yang diharapkan agar kebutuhannya dapat tercukupi.
   d. Besarnya dana keseluruhan (pokok + bunga) yang dimiliki David di akhir tahun ke-8.
   e. Jika ia menginginkan dana menjadi Rp.350.000.000,- tentukan berapa lama keinginan tersebut dapat tercapai dengan asumsi tingkat bunga tetap pada 8% per tahun.
4. Jocelyn menginginkan dana sebesar Rp.30.000.000,- di akhir tahun ke-5, tentukan uang yang ditanam saat ini untuk mendapatkan dana tersebut jika bunga yang diberikan bank sebesar 10%. Jika saat ini orang tersebut memiliki dana sebesar Rp.18.000.000,- berapa bunga yang diberikan bank untuk mencapai keinginannya tersebut di akhir tahun ke-6. (keterangan: perhitungan bunga menggunakan konsep bunga sederhana).
5. Tuan Wijaya sedang merencanakan untuk menanamkan uangnya dalam bentuk surat berharga di pasar uang. Ia mengharapkan uangnya menjadi empat kali lipat dari uang semula dalam jangka waktu 10 tahun. Tentukan

berapa bunga majemuk yang harus diterima untuk menghasilkan angka tersebut, apabila penghitungan bunga berdasarkan bulanan dan harian (1 tahun = 365 hari). Apabila bunga majemuk yang diberikan 12% per tahun, tentukan dalam berapa lama akan tercapai keinginannya apabila bunga dihitung berdasarkan tahunan dan semesteran.

6. Seorang investor menginginkan besarnya tingkat pengembalian sebesar 12% per tahun dari uang yang ditanamnya dalam bentuk obligasi. Ia menanamkan uangnya dalam jangka waktu 8 tahun. Uang yang ditanam saat ini sebesar Rp. 1.000.000.000,- Tentukan berapa besarnya uang investor tersebut diakhir tahun ke-delapan, jika bunga dihitung dengan:
   a. Tahunan ; bulanan ; harian (1 tahun=365 hari).
   b. Apabila ia menginginkan uangnya menjadi lima kali lipat dari uang semula, berapa tahun ia harus menginvestasikan uangnya apabila tingkat pengembalian diasumsikan tetap selama tahun tersebut dan bunga dihitung berdasarkan bulanan!
   c. Jika ia menginginkan uangnya menjadi tiga kali lipat dari jumlah uang yang ditanamnya di akhir tahun kedelapan, tentukan berapa bunga yang diharapkan untuk mendapatkan hasil tersebut (bunga dihitung secara harian).
7. Seorang investor menginginkan uangnya menjadi $500,000 diakhir tahun kelima, uang tersebut didepositokan ke bank yang memberikan bunga sebesar 5% per tahun. Tentukan besarnya uang yang didepositokan setiap bulannya untu mendapatkan hasil tersebut. Apabila uang sekarang yang didepositokan sebesar $40,000 per semester, tentukan berapa bunga yang diberikan bank untuk mendapatkan uang sebesar $500,000 diakhir tahun kelima.
8. Berikut ini tabel yang menunjukan besarnya arus kas pada akhir tahun dari perusahaan CVW.

Akhir Tahun			
1	2	3	4
$ 100	$ 200	$ 200	$ 300

   a. Hitunglah nilai akhir total pada akhir tahun keempat dengan tingkat bunga majemuk tahunan 10%.
   b. Hitung nilai sekarang total jika tingkat diskonto 14%.

9. Berikut ini merupakan transaksi-transaksi yang terjadi di tabungan Mr. Warren:
   - Pada awal tahun pertama, Mr. Warren menabung sebesar Rp 1.000.000
   - Pada akhir tahun pertama, Mr. Warren menabung sebesar Rp 1.000.000
   - Pada awal tahun ketiga, Mr. Warren menabung sebesar Rp 2.000.000
   - Pada awal tahun keempat, Mr. Warren tidak menabung
   - Pada akhir tahun keempat, Mr. Warren menabung sebesar Rp 1.000.000
   - Pada akhir tahun pertama, Mr. Warren menarik uang sebesar Rp 500.000
   - Pada awal tahun ketiga, Mr. Warren menarik uang sebesar Rp 500.000
   - Pada awal tahun keempat, Mr. Warren menarik uang sebesar Rp 500.000
   - Setiap akhir tahun bank MHG mengenakan biaya administrasi sebesar Rp 10.000

   Berapakah besarnya nilai tabungan Mr Warren di Bank MHG pada awal tahun kelima, apabila besarnya suku bunga yang diberikan Bank MHG sebesar 6% per tahun.
10. Archie sedang mempertimbangkan untuk membeli sebuah iPhone 3G *unlocked* di Amerika dengan menggunakan kartu kredit Bank SoEul. Harga sebuah iPhone 3G *unlocked* di Amerika adalah US$750, karena sedang melakukan promosi maka si penjual membebaskan ongkos kirim, jadi Archie hanya perlu membayar US$750 saja. iPhone tersebut rencananya akan dicicil dalam jangka waktu 12 bulan dengan tingkat bunga yang dibebankan oleh Bank SoEul sebesar 24% p.a. Pembayaran cicilan dilakukan setiap akhir bulan. Berapa besarnya bunga yang harus Archie bayar pada bulan kelima dan berapa sisa saldo pinjamannya pada akhir bulan kelima tersebut. Sertakan tabel angsurannya.
11. Anda sebagai seorang manajer keuangan dan seorang klien anda bertanya kepada anda, ia ingin menyimpan uangnya selama 1 tahun di suatu bank swasta yang memberikan bunga 3% per tahun dan mengharapkan mendapatkan nilai Rp.100.000.000,- di akhir tahunnya. Bank tersebut membagikan bunga setiap bulannya, dan menarik biaya administrasi sebesar Rp 10.000 setiap bulannya. Pertanyaannya adalah berapakah besar uang yang harus ditabung oleh klien anda tersebut agar jumlah uang yang ditabungnya tetap selama 1 tahun?
12. Mr. Afu bekerja sebagai *Branch Manager* di PT. Kasak Kusuk, mempunyai gaji sebesar Rp 15.000.000,- per bulan. Setiap bulan gaji tersebut dikenakan pajak penghasilan sebesar 40%. Setiap bulan Mr. Afu membelanjakan setengah dari penghasilannya yang telah dipotong pajak, dan sisanya ditabung pada Bank Asia dengan suku bunga sebesar 3% per tahun (bunga

diberikan setiap bulan). Selain itu Mr Afu juga membuka deposito di Bank Asia dengan jangka waktu 5 tahun, dengan jumlah deposito sebesar Rp 400.000.000 dengan suku bunga deposito sebesar 8% per tahun (bunga deposito diberikan setiap 3 bulan sekali). Berapakah jumlah total uang yang dimiliki Mr Afu di Bank Asia setelah 5 tahun?

13. Abner akan membeli sebuah rumah seharga Rp. 700.000.000,- secara kredit. Abner akan mengangsur rumah tersebut selama 7 tahun. Apabila suku bunga KPR Bank Mars adalah 17% per tahun dan Abner diharuskan untuk membayar DP sebesar 10% dari harga rumah tersebut, maka hitunglah:
    a. Berapakah angsuran per tahun yang harus dibayar Abner setiap akhir tahun.
    b. Buatlah tabel angsurannya.
14. Cindy ingin membeli sebuah laptop seharga Rp. 15.000.000,-. Untuk membeli laptop tersebut ia memutuskan untuk menabung, tetapi ia hanya mampu untuk menabung Rp. 1.000.000 setiap awal bulan. Jika tingkat suku bunga bank adalah 3.25% p.a. berapa lama cindy harus menabung sampai tabungannya cukup untuk membeli laptop tersebut?
15. Diketahui data pendapatan dari dua orang olahragawan dunia di bawah ini. Tentukan mana yang memiliki dana lebih besar di akhir tahun ke-5 dengan asumsi semua perhitungan dalam bentuk US$. £1 = $1,5. Tingkat bunga 7% per tahun. 1th = 12 bln = 52 minggu.
    a. **Cristiano Ronaldo** menerima upah dari *Real Madrid* sebesar £70,000 per minggu (*weekly compounding*). Selain itu ia juga memiliki kontrak eksklusif dengan "Adidas", ia akan menerima *fee* dari penjualan *merchandise* sebesar 5% dari *sales* per bulan (*monthly compounding*, *sales*/bln £4*million*). Ronaldo akan menabung sebesar 40% dari pendapatannya (mingguan maupun bulanan).
    b. **Kimi Raikonen** menerima upah dari *Mclaren Mercedez* sebesar $80,000 per minggu (*weekly compounding*). Ia juga memiliki kontrak eksklusif dengan "TISSOT Watch", ia akan mendapat *fee* sebesar 10% dari penjualan (*monthly compounding*, *sales*/bln $2,5*million*). Kimi akan menabung sebesar 60% dari pendapatannya (mingguan maupun bulanan).

Bab 7

DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA

7.1. PENDAHULUAN LIMIT

Konsep limit merupakan dasar utama dari semua konsep kalkulus. Kalkulus merupakan alat analisis matematis mengenai perubahan atau gerakan. Kalkulus merupakan ilmu yang penting dan dipakai oleh hampir semua cabang ilmu pengetahuan karena pada dasarnya segala sesuatu yang terjadi di alam ini dapat berubah-ubah.

Dasar dari pengoperasian kalkulus adalah diferensial dan integral. Pengoperasian diferensial bermaksud untuk menentukan besarnya laju perubahan suatu fungsi, sedangkan pengoperasian integral merupakan kebalikannya yaitu pencarian suatu fungsi yang laju perubahannya diketahui.

Kalkulus menyangkut perubahan-perubahan kecil sampai tak terhingga dari variabel bebas dan tidak bebas. Secara matematis, perubahan tersebut didefinisikan menggunakan konsep limit (kesinambungan).

Konsep limit fungsi di suatu titik adalah melalui pendekatan intuisi yaitu dimulai dengan menghitung nilai-nilai fungsi di sekitar titik itu, kecuali titik itu sendiri.

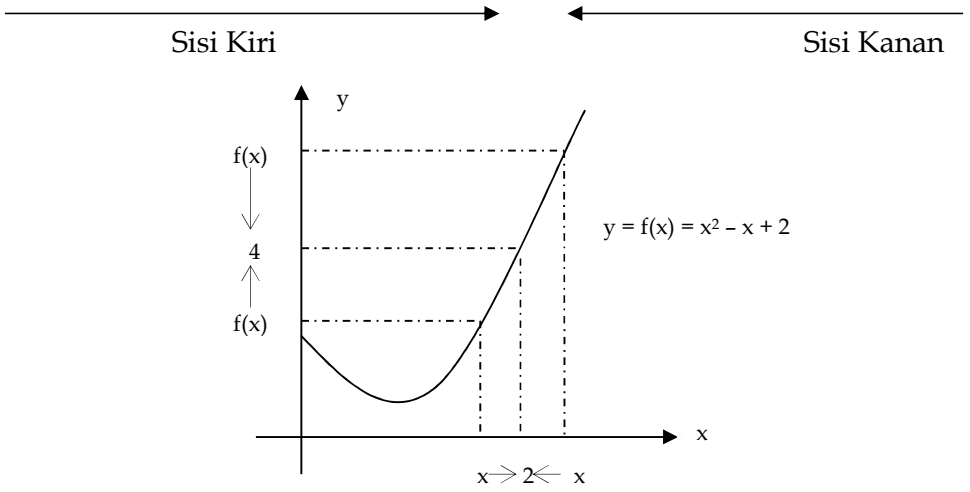
Contoh 1

Jika diketahui suatu fungsi: $f(x) = x^2 - x + 2$ untuk nilai x mendekati 2

Maka tabel skematis dan sketsa grafik y = f(x) adalah sebagai berikut:

x	1,9	1,95	1,99	1,999	2	2,001	2,005	2,01	2,05
f(x)	3,71	3,8525	3,9701	3,997001		4,003	4,015	4,0301	4,1525

y



Gambar 7.1.

Berdasarkan diagram dan grafik di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa jika x semakin mendekati 2 maka nilai dari f(x) akan semakin mendekati 4 baik dari sisi kanan maupun kiri 2. Sehingga dapat disimpulkan bahwa limit dari f(x) = x^2 – x + 2 adalah 4 untuk nilai x mendekati 2. Secara matematis hal tersebut dapat ditulis:

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - x + 2) = 4$$

Berdasarkan hal tersebut, secara singkat definisi limit dari suatu fungsi adalah:

Jika $\lim_{x\to a} f(x) = L$ maka jika x mendekati a (tetapi tidak sama dengan a), maka f(x) akan mendekati L atau f(x) L jika x a

Contoh 2

Fungsi f di definisikan sebagai f (x) = $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Jika variabel x = 2, maka f(x) = $\dfrac{0}{0}$ yang tidak ada artinya.

Untuk itu perlu dilakukan pendekatan beberapa nilai f(x) untuk x mendekati 2.

X	0	1,1	1,5	1,9	1,999	2.000	2,001	2,01	2,5	2,7
f(x)	1	2,1	2,5	2,9	2,999		3,001	3,01	3,5	3,7

Dari tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3.$

Secara aljabar, hal ini dapat dibuktikan:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)\quad =2+1=3$$

y

7.1.1. Hubungan Limit Satu Sisi dan Limit Dua Sisi

Limit pada fungsi f(x) akan mendekati suatu nilai L jika x mendekati nilai a dengan melihat dari kedua sisi yaitu limit sisi kanan dan limit sisi kiri. Pendekatan dari masing-masing sisi disebut dengan limit satu sisi.

Limit dari sisi kanan dari suatu fungsi adalah nilai pendekatan suatu fungsi apabila peubahnya mendekati limitnya melalu nilai yang menurun. Hal ini dapat terjadi jika f(x) mendekati L dengan nilai x mendekati a (tetapi lebih besar daripada a). Notasi untuk limit tipe ini dapat ditulis:

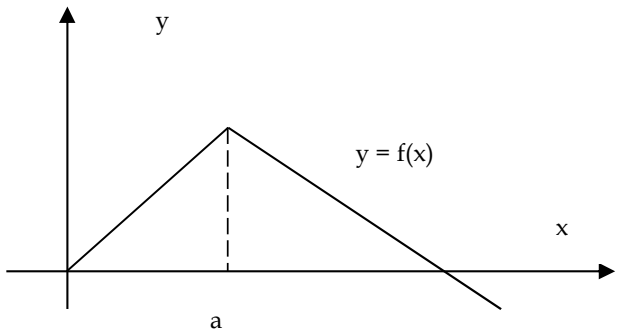
$$\lim_{x\to a+} f(x)=L$$

Limit dari sisi kiri dari suatu fungsi adalah nilai pendekatan suatu fungsi apabila peubahnya mendekati limitnya melalu nilai yang menaik. Hal ini dapat terjadi jika jika f(x) mendekati L dengan nilai x mendekati a (tetapi lebih kecil daripada a). Notasi untuk limit tipe ini dapat ditulis:

$$\lim_{x\to a-} f(x)=L$$

Limit suatu fungsi akan terdefinisi (ada) jika dan hanya jika memiliki hubungan limit dua sisi yang artinya nilai limit sisi kiri dan limit sisi kanan mempunyai nilai yang sama.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \quad \text{terjadi jika} \quad \lim_{x\to a-} f(x)=L=\lim_{x\to a+} f(x)$$



Gambar 7.2.

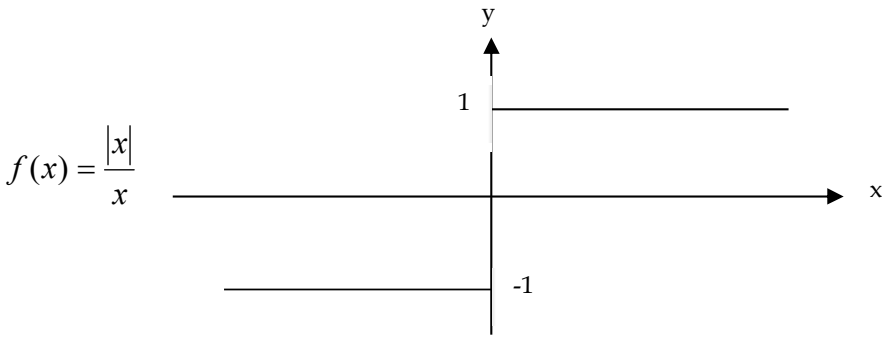
Contoh 3

Jelaskan mengapa $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ tidak terdefinisi.

Jika limit dilihat dari masing-masing sisi maka diperoleh:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=-1$$

Dari perhitungan di atas, dapat disimpulkan f(x) tidak mempunyai limit untuk x mendekati 0 karena adanya perbedaan antara nilai limit sisi kanan dan limit sisi kiri.



Gambar 7.3.

7.1.2. Teorema Limit

Teorema limit yang akan disajikan berikut ini yang sangat berguna dalam menangani hampir semua masalah limit. Misalkan *n* bilangan bulat positif, *k* sebuah konstanta dan *f, g* adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di *a* maka:

1. $\lim_{x\to a} k = k$
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to a} k\,f(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$
4. $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a} v\,[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$
6. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, dengan syarat $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$
7. $\lim_{x\to a}[f(x)]n = [\lim_{x\to a} f(x)]n$
8. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ dengan syarat $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ untuk n bilangan genap

Contoh 4

Carilah $\lim_{x\to 5} (x^2 - 4x + 6)$

Jawaban:

Teorema 4

$$\lim_{x\to 5} (x^2 - 4x + 3) = \lim_{x\to 5} x^2 - \lim_{x\to 5} 4x + \lim_{x\to 5} 3$$

Teorema 7 | Teorema 3 | Teorema 1

$$= \left(\lim_{x\to 5} x\right)^2 - 4.\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 6$$

$$= 5^2 - 4(5) + 6 = 11$$

Contoh 5

Carilah $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$

Jawaban:

Carilah $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} = \frac{\lim_{x\to 4} \sqrt{x^2+9}}{\lim_{x\to 4} x}$

Teorema 8, Teorema 2 } Teorema 6

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 4} (x^2+9)}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4} 9)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4^2 + 9} = \frac{5}{4}$$

Contoh 6

Carilah $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Jawaban:

Jika x = 3 disubtitusikan maka $\lim_{x \to a} g(x) = x - 3 = 0$. Hal ini tidak memenuhi persyaratan teorema 6: $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ karena semua bilangan yang dibagi dengan 0 adalah tidak terdefinisi. Untuk itu, fungsi harus disederhanakan secara faktorisasi menjadi:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} (x+3)$$

$$= \lim_{x \to 3} (x+3)$$

$$= 3 + 3 = 6$$

Contoh 7

Carilah $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-2}}$

Jawaban:

Sama seperti contoh 3 di atas, penyelesaian persamaan tidak terdefinisi karena merupakan fungsi dengan solusi 0/0. Untuk itu, fungsi akan dirasionalkan penyebutnya menjadi: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-2}} . \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)(\sqrt{x-2})}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x-1).\sqrt{x-2}$$

$$= (2-1).\sqrt{2-2}$$

$$= 1 \,.\, 0 = 0$$

7.1.3. Limit Tak Hingga

Dalam matematika, dikenal suatu konsep tak berhingga yang menggunakan simbol ∞. Dalam limit pengertian dari $x \to \infty$ menyatakan bahwa x menjadi besar dan bertambah besar tanpa batas. Penyelesaian untuk limit ini dapat diselesaikan dengan membagi pembilang dan penyebut berdasarkan pangkat tertinggi x yang muncul.

Untuk limit tak hingga, besaran suatu limit dapat dilihat berdasarkan pangkat dari variabel pembilang maupun penyebutnya.

Jika $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ...+ a_n$ dan $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ...+ b_m$ maka:

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}$ untuk $n = m$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ untuk $n < m$

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ atau $-\infty$ untuk $n > m$

Contoh 8

Carilah $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3 - 4x^2 + 3x}{12x^3 + 4x^2 - 5x}$

Jawaban:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3 - 4x^2 + 3x}{12x^3 + 4x^2 - 5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6x^3}{x^3} - \frac{4x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3}}{\frac{12x^3}{x^3} + \frac{4x^2}{x^3} - \frac{5x}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{12 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}}$$

$$= \frac{6-0+0}{12+0-0} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

7.2. KONTINUITAS

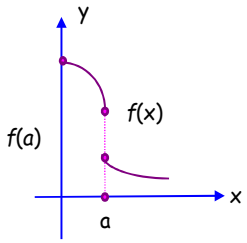
Kontinu digunakan untuk menggambarkan suatu proses yang berkelanjutan tanpa perubahan yang mendadak. Suatu fungsi *f*(x) dapat dikatakan kontinu di x = a jika terpenuhi syarat – syarat berikut:

a. *f*(a) terdefinisi yaitu f(a) ada

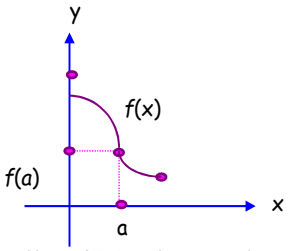
b. $\lim_{x\to a} f(x)$ terdefinisi ada

c. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

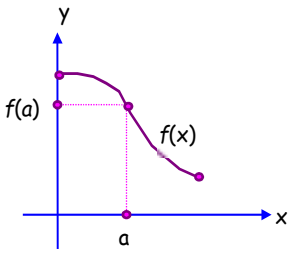
Apabila satu di antara ketiga syarat itu tidak dipenuhi, maka fungsi f(x) disebut tidak kontinu atau diskontinu di x =a.



$\lim_{x \to a} f(x)$ tidak ada



$\lim_{x \to a} f(x)$ ada tetapi $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$



$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Gambar 7.4.

Contoh 1

Apakah fungsi $f(x) = x^2 + x - 3$ kontinu atau diskontinu di $x = 1$

Jawaban:

a. $f(1) = 4$ (terdefinisi)

b. $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \left(x^2 + x + 1\right) = 1^2 + 1 + 1 = 3$ (terdefinisi)

c. $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ maka diskontinu

Contoh 2

Apakah fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ kontinu atau diskontinu di x = 3

Jawaban:

a. $f(3) = \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$ (tidak terdefinisi) maka f(x) diskontinu di x = 3

Contoh 3

Apakah fungsi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{untuk } x \neq 2 \\ 4, & \text{untuk } x = 2 \end{cases}$ kontinu atau diskontinu

Jawaban:

a. $f(1) = 4$ (terdefinisi)

b. $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \left(x^2 + x + 1\right) = 1^2 + 1 + 1 = 3$ (terdefinisi)

c. $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ maka diskontinu

7.3. HASIL BAGI PERBEDAAN

Jika variabel x berubah dari x_o menjadi x_1, maka perubahan diukur dengan perbedaan $x_1 - x_0$. Untuk menunjukkan perubahan tersebut dinotasikan dengan Δx. Jika x berubah dari nilai awal x_0 ke nilai baru $(x_0 + \Delta x)$ maka nilai fungsi y = f (x) berubah pula dari f (x_0)ke f $(x_0 + \Delta x)$ sehingga:

$$\begin{aligned} y &= f(x_o) \\ y + \Delta y &= f(x_o + \Delta x) \\ \Delta y &= f(x_o + \Delta x) - y \\ \Delta y &= f(x_o + \Delta x) - f(x_o) \end{aligned}$$

Perubahan dalam y per unit perubahan x dapat ditunjukkan oleh hasil bagi perbedaan (*difference quotient*).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x0 + \Delta x) - f(xo)}{\Delta x}$$

Hasil bagi ini mengukur rata-rata tingkat perubahan y, yang dapat dihitung jika diketahui nilai awal dari x (x_0) dan besarnya perubahan x (Δx).

Contoh 1
Tentukan hasil bagi dari y = 4x + 1

Jawaban

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\ &= 4(x + \Delta x) + 1 \\ &= 4x + 4\Delta x + 1 \\ \Delta y &= 4x + 4\Delta x + 1 - y \\ &= 4x + 4\Delta x + 1 - 4x - 1 \\ &= 4\Delta x \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4\,\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Delta y = 4$$

7.4. DERIVATIF

Jika Δx sangat kecil dan semakin mendekati nol maka akan semakin mendekati kebenaran nilai $\Delta y/\Delta x$. Selama nilai Δx mendekati nol maka limit dari hasil bagi perbedaan $\Delta y/\Delta x$ ada. Limit tersebut yang disebut sebagai derivatif dari fungsi y = f(x).

Notasi pada fungsi derivatif umumnya ditulis dengan 2 cara yaitu menggunakan simbol f′(x) atau *dy/dx*. Notasi ini menekankan bahwa nilai derivatif mengukur tingkat perubahan sehingga derivatif dari fungsi y = f(x) adalah sebagi berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1.4.1. Derivatif Tingkat Pertama

Selanjutnya akan dibahas metode untuk mencari nilai derivatif pertama dari suatu fungsi dengan cara menggunakan aturan-aturan diferensiasi. Diferensiasi sendiri merupakan tahapan dalam proses pencarian nilai derivatif.

1. **Aturan fungsi konstan**
   Derivatif dari suatu fungsi konstan (y = k) adalah sama dengan nol, yaitu nol untuk semua nilai x.

   $y = f(x) = k$

   $\frac{dy}{dx} = 0$ atau $f'(x) = 0.$

   Contoh 1

   Jika $y = f(x) = 25$

   maka $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$

2. **Aturan fungsi pangkat**
   Derivatif fungsi pangkat adalah nilai pangkat dikalikan dengan koefisien dan pangkatnya dikurangi dengan bilangan 1.

   $y = f(x) = x^n$

   $\frac{dy}{dx} = f'(x) = n.x^{n-1}$

   Contoh 2

   Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika y = x

   Jawaban

   $\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = 1.x^0 = 1.1 = 1$

Contoh 3

Tentukan jika $\frac{dy}{dx}$ jika $y = x^5$

Jawaban

$\frac{dy}{dx} = 5x^{5-1}$

$= 5x^4$

3. **Aturan konstanta kali dengan fungsi pangkat**

Jika konstanta (c) muncul dalam suatu fungsi pangkat, maka derivatif pertamanya adalah nilai pangkat dikalikan dengan konstanta dan pangkatnya dikurangi dengan bilangan 1.

$y = f(x) = cx^n$

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = c.n.x^{n-1}$

Contoh 4

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = 4x^4$

Jawaban

$\frac{dy}{dx} = 4.4x^{4-1}$

$= 16x^3$

4. **Aturan penjumlahan-pengurangan**

Derivatif penjumlahan/pengurangan dari dua fungsi adalah penjumlahan/pengurangan dari dua derivatif dua fungsi tersebut.

$y = U \pm V$ dimana $U = g(x)$ dan $V = h(x)$

$\frac{dy}{dx} = U' \pm V'$

Contoh 5

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = x^4 - x^2 + 4x$

Jawaban

$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2x + 4$

5. **Aturan hasil kali fungsi**

Derivatif dari hasil kali dua fungsi yang dapat didiferensiasikan adalah sama dengan fungsi pertama dikalikan dengan derivatif dari fungsi yang kedua ditambah fungsi kedua dikalikan dengan derivatif dari fungsi yang pertama.

y = U.V dimana U = g(x) dan V = h(x)

$\frac{dy}{dx}$ = UV′+ U′V

Contoh 6

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari y = (3x + 2)(2x – 3)

Jawaban

y = (3x + 2)(2x – 3)
misalkan: U = 3x + 2
V = 2x – 3
y = UV
$\frac{dy}{dx}$ = UV′+ U′V
$\frac{dy}{dx}$ = (3x + 2)2+ 3(2x – 3)
$\frac{dy}{dx}$ = 6x + 4 + 6x – 9
$\frac{dy}{dx}$ = 12x – 5

Dapat juga kedua fungsi tersebut dikalikan terlebih dahulu kemudian dilakukan proses derivatif.

y = (3x + 2)(2x – 3)
y = $6x^2$ – 5x – 6
$\frac{dy}{dx}$ = 12x – 5

6. **Aturan hasil bagi**

Derivatif dari hasil bagi dua buah fungsi adalah sama dengan hasil pengurangan antara derivatif fungsi pembilang yang dikalikan dengan penyebutnya dengan fungsi penyebut yang dikalikan dengan pembilangnya dan kesemuanya ini dibagi dengan kuadrat dari fungsi penyebutnya.

y = U/V dimana U = g(x) dan V = h(x)

$\frac{dy}{dx} = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

Contoh 7

Jika $y = \frac{(3x-5)}{x^2+7}$, carilah $\frac{dy}{dx}$

Jawaban

Misalkan: U = 3x – 5

V = x2 + 7

$$\frac{dy}{dx} = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$= \frac{3(x^2+7) - (3x-5)2x}{(x^2+7)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 21 - 6x^2 - 10x}{(x^2+7)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 - 10x + 21}{x^4 + 14x^2 + 49}$$

7. Aturan fungsi berantai

Jika y = f(w) dan w = g(x), sehingga y = f[g(x)]

maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$

Contoh 8

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = (2x^3 + 3x)^4$

Jawaban

$y = (2x^3 + 3x)^4$

$\frac{dy}{dx} = 4(2x^3 + 3x)^3(6x^2 + 3)$

$\frac{dy}{dx} = 4(6x^2 + 3)\ (2x^3 + 3x)^3$

$\frac{dy}{dx} = (24x^2 + 12)(2x^3 + 3x)^3$

7. **Aturan fungsi invers**

Derivatif dari suatu fungsi invers adalah kebalikan dari derivatif fungsi awal. Secara notasi jika y = f(x) dan x = g(y), syarat yang berlaku x = (y) adalah fungsi invers, dimana x merupakan fungsi dari y, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

Contoh 9

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = 2x^2 + 4$

Jawaban

$\frac{dy}{dx} = 4x$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x}$

8. **Aturan eksponen**

a. Jika $y = \alpha^u$ dengan $u = g(x)$

maka $\frac{dy}{dx} = u'. \alpha^u. \ln \alpha$

$= \frac{du}{dx}. \alpha^u. \ln \alpha$

Contoh 10

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = 5^{3x^2}$

Jawaban

$\frac{dy}{dx} = 6x. 5^{3x^2}. \ln 5$

b. Jika $y = \alpha^x$

maka $\frac{dy}{dx} = 1. \alpha^x. \ln \alpha$

$= \alpha^x. \ln \alpha$

Contoh 11

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = 3^x$

Jawaban

$\frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3$

c. Jika $y = e^u$ dengan U = g(x) dan e = 2,718

maka $\frac{dy}{dx} = U'. e^U. \ln e$

$= \frac{du}{dx}. e^U. {}^e\log e$

$= \frac{du}{dx}. e^U. 1$

$= \frac{du}{dx}. e^U$

Contoh 12

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = e^{2x+3}$

Jawaban

$\frac{dy}{dx} = 2.\ e^{2x+3}$

d. Jika $y = e^x$

maka $\frac{dy}{dx} = 1.\ e^x.\ \ln e$

$= 1.\ e^x.\ 1$

$= e^x$

Keterangan:

Rumus 9b, 9c, dan 9d diperoleh dari menyederhanakan rumus 9a.

10. **Aturan logaritma**

a. Jika $y = {}^{\alpha}\log U$ dengan $U = g(x)$

maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{U \ln \alpha} . U'$

$= \frac{1}{U \ln \alpha} . \frac{du}{dx}$

Contoh 13

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = {}^{4}\log 2x$

Jawaban

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x \ln 4} . 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x \ln 4}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 4}$

b. Jika $y = {}^{\alpha}\log x$

maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln \alpha} . 1$

$= \frac{1}{x \ln \alpha}$

Contoh 14

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \log x = {}^{10}\log x$

Jawaban

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$$

c. Jika y = ln U dengan U = g(x)

maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{U \ln e} . U'$

$= \frac{1}{U.1} . \frac{du}{dx}$

$= \frac{1}{U} . \frac{du}{dx}$

Contoh 15

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika y = ln (2x)

Jawaban

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} . 2$

$= \frac{2}{2x}$

$= \frac{1}{x}$

d. Jika y = ln x

maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln e} . 1$

$= \frac{1}{x.1} . 1$

$= \frac{1}{x}$

Keterangan:

Nomor 10b, 10c, dan 10d diperoleh dari menyederhanakan rumus 10a.

7.4.2. Derivatif dengan Tingkat yang Lebih Tinggi

Dalam persoalan matematika, akan dijumpai penurunan suatu fungsi lebih dari satu kali. Turunan fungsi yang lebih dari satu kali disebut derivatif tingkat tinggi. Pada derivatif lanjutan dapat diperoleh derivatif kedua dan seterusnya. Derivatif kedua $(\frac{d^2y}{dx^2})$mengukur tingkat perubahan derivatif pertama $(\frac{dy}{dx})$. Derivatif kedua adalah derivatif pertama dari derivatif pertama. Notasi derivatif kedua dapat dinyatakan dengan f″(y) dan y″. Derivatif kedua ini juga dapat didiferensiasikan lagi terhadap x, maka hasil derivatifnya adalah derivatif ketiga dari fungsi f(x). Hal yang serupa dapat dilakukan sehingga menjadi derivatif keempat dan seterusnya sampai derivatif ke-n.

Contoh 16

Tentukan derivatif kesatu sampai keempat pada fungsi $y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

Jawaban

Maka, $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x + 4$

$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 12x + 6$

$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = 12$

$f''''(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = 0$

7.5.3. Maksimum / Minimum Suatu Fungsi

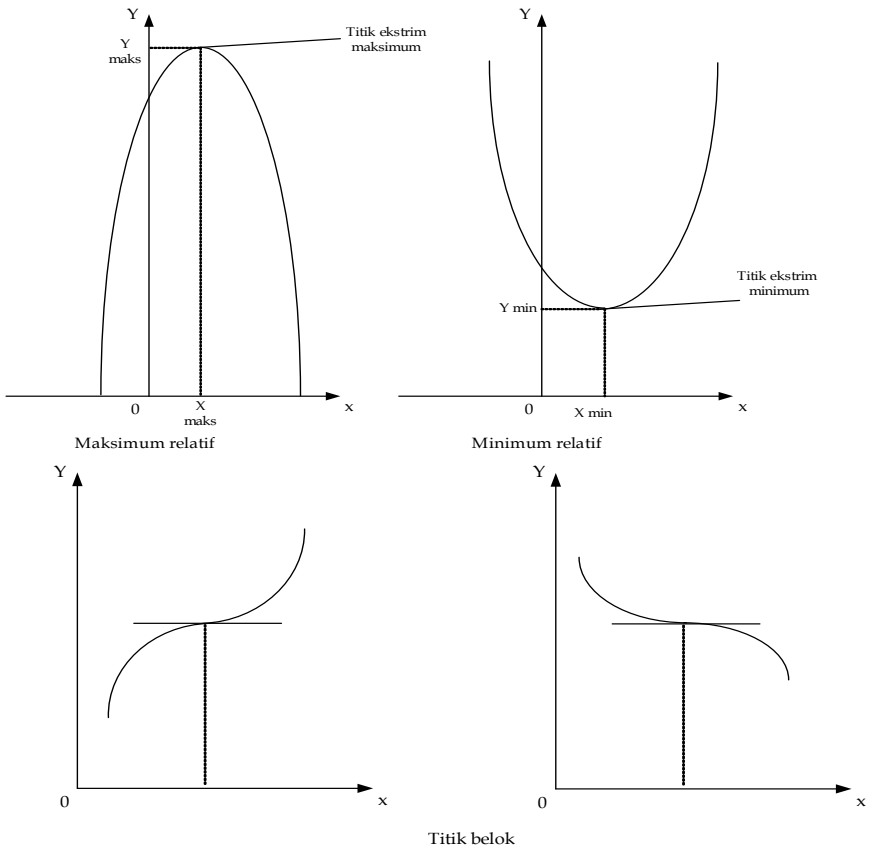
Konsep derivatif di atas dapat juga digunakan untuk mencari titik-titik kritis suatu fungsi. Pencarian titik-titik kritis tersebut menggunakan pendekatan uji derivatif pertama dan kedua. Dari uji derivatif pertama yang disamakan dengan nol dapat teridentifikasi besarnya nilai variabel bebas tersebut. Sedangkan uji derivatif kedua untuk memastikan apakah fungsi tersebut berbentuk maksimum atau minimum relatif.

Turunan pertama: Mencari nilai kritis

$$\frac{dY}{dx} = 0$$

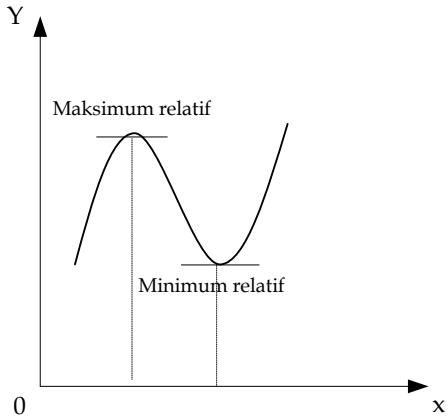
Turunan kedua: Menentukan jenis fungsi

- Jika $\frac{d^2Y}{dX^2} < 0$ maka fungsi maksimum
- Jika $\frac{d^2Y}{dX^2} > 0$ maka fungsi minimum
- Jika $\frac{d^2Y}{dX^2} = 0$ maka fungsi berbentuk titik belo



Gambar 7.5.

Jika fungsi tersebut x-nya berpangkat tiga maka fungsi tersebut memiliki titik ekstrim maksimum dan minimum.



Gambar 7.6.

Contoh 17
Tentukan titik-titik kritisnya dan apakah fungsi $Y = 40 - 6X + X^2$ memiliki nilai minimum/maksimum ?

Jawaban:
$Y = 40 - 6X + X^2$

$\frac{dY}{dX} = 0$

$-6 + 2X = 0$

$X = 3$

$Y = 40 - 6X + X^2$

$Y = 40 - 6(3) + (3)^2$

$Y = 31$

$\frac{d^2Y}{dX^2} = 2$, karena $\frac{d^2Y}{dX^2} > 0$: maka fungsi tersebut minimum relatif.

Contoh 18
Tentukan titik-titik kritisnya dan apakah fungsi $Y = -6X^2 + 36X + 10$ memiliki nilai minimum/maksimum ?

Jawaban
$Y = -6X^2 + 36X + 10$

$\frac{dY}{dX} = 0$

$-12X + 36 = 0$

$X = 3$

$Y = -6X^2 + 36X + 10$

$Y = -6(3)^2 + 36(3) + 10$

$Y = 64$

$\frac{d^2Y}{dX^2} = 2$, karena $\frac{d^2Y}{dX^2} < 0$ maka fungsi tersebut maksimum relatif.

Jadi, titik kritis (3, 64) adalah titik maksumum relatif.

Contoh 19
Tentukan titik-titik kritisnya dan apakah fungsi $Y = 2X^3 - 15X^2 - 36X + 20$ memiliki nilai minimum/maksimum ?

Jawaban

$Y = 2X^3 - 15X^2 - 36X + 20$

$\frac{dY}{dX} = 0$

$6X^2 - 30X - 36 = 0$

$X^2 - 5X - 6 = 0$

$(X + 1)(X - 6) = 0$

$X_1 = -1; X_2 = 6$

$\frac{d^2Y}{dX^2} = 12x - 30$

$X_1 = -1, \frac{d^2Y}{dX^2} = 12(-1) - 30 = -42,$ karena $\frac{d^2Y}{dX^2} < 0$ maka pada saat X1 = –1 membentuk titik maksimum relatif.

$X_2 = 6, \frac{d^2Y}{dX^2} = 12(6) - 30 = 42,$ karena $\frac{d^2Y}{dX^2} > 0$ maka pada saat X2 = 6 membentuk titik minimum relatif.

Y maksimum $= 2(-1)^3 - 15(-1)^2 - 36(-1) + 20$
$= 39$

Y minimum $= 2(6)^3 - 15(6)^2 - 36(6) + 20$
$= -304$

Jadi, titik kritis (1, 39) adalah titik maksimum relatif dan titik kritis (6, -304) adalah titik minimum relatif.

Jika y = f(x) dan titik kritisnya [a, f(a)], maka f'(a) = 0.
Teorema lain yang bisa digunakan untuk mengetahui jenis titik kritis yaitu sebagai berikut:

1. Titik [a, f(a)] adalah maksimum relatif jika f'(x)>0 di sebelah kiri a dan f'(x)<0 di sebelah kanan a.
2. Titik [a, f(a)] adalah minimum relatif jika f'(x)<0 di sebelah kiri a dan f'(x)>0 di sebelah kanan a.

3. Titik [a, f(a)] adalah titik belok horisontal jika f'(x) di sebelah kiri maupun di sebelah kanan a tidak berganti tanda.

Contoh 20

Tentukan titik kritis dan apakah jenis dari fungsi $y = x^3 + 1$

Jawaban

$y = x^3 + 1$

$\frac{dy}{dx} = 0$

$3x^2 = 0$

$x = 0$

$y = 0^3 + 1$

$= 1$

Titik kritis (0,1)

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6.\ x$

$= 6.\ 0$

$= 0$

Maka fungsi tersebut bukan maksimum dan bukan minimum.

Selanjutnya untuk mengetahui jenis titik kritis, perlu dicari nilai f'(x) dengan memasukkan nilai x di sebelah kiri dan di sebelah kanan a = 0.

Untuk x<0	misal x = -1	maka $f'(-1) = 3\ (-1)^2 = 3$
Untuk x>0	misal x = 2	maka $f'(2) = 3\ (2)^2 = 12$

Jadi titik (0, 1) adsalah titik belok horisontal.

7.5 LATIHAN SOAL

1. Selesaikan limit fungsi aljabar berikut:
   a. $\lim_{x\to 8}(x^2 + 6x - 12) =$
   b. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+7x}{x-10}$
   c. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^4+x^3-7x^2+2x-1}{x^3-8x^2+x-4} =$
   d. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{5x^2+7} + \sqrt{x^2-x} =$
   e. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x =$
   f. $\lim_{n\to \infty} \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{5n}\right) =$

2. Tentukan hasil bagi perbedaan $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ dan $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ dari:
   a. $Y = 5x - 3$
   b. $Y = 7x^3$
   c. $Y = x^2 + x - 5$
3. Untuk soal-soal di bawah ini, carilah derivatif dari setiap fungsi berikut ini menggunakan aturan diferensial.
   a. $Y = 10$
   b. $Y = X^4$
   c. $Y = 2X^2$
   d. $Y = 3X^{7/3}$
   e. $Y = X^3 - 2X^2 + 3$
   f. $Y = (X + 2)(X - 3)$
   g. $Y = X/4$
   h. $Y = (2X - 2)/4X$
   i. $Y = e^{x2 + 3x-2}$
   j. $Y = \ln X^2$
   k. $Y = \log_7 X$
4. Carilah derivatif kedua dari fungsi fungsi berikut ini:
   a. $Y = X^6$
   b. $Y = 2X^3 + 4X^2 - 3X + 1$
5. Dari soal-soal dibawah ini, tentukan titik-titik kritisnya dan apakah fungsi di bawah ini memiliki nilai minimum/maksimum.
   a. $Y = X^2 - 10X + 24$
   b. $Y = -3X^2 - 10X + 8$
   c. $Y = X^3 - 6X^2 - 15X + 10$
   d. $Y = X^3 - 6$

Bab 8

PENERAPAN DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA DALAM ILMU EKONOMI

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Menghitung besarnya koefisien elastisitas dan menjelaskan arti ekonominya;
2. Menentukan fungsi dari macam-macam biaya;
3. Mengetahui dan menghitung konsep minimasi pada biaya;
4. Menentukan besarnya kuantitas pada saat biaya minimum;
5. Menentukan fungsi dari macam-macam penerimaan;
6. Mengetahui dan menghitung konsep maksimasi pada penerimaan;
7. Menentukan besarnya kuantitas pada saat penerimaan maksimum
8. menghitung besarnya kuantitas untuk mencapai laba maksimum sebelum dan sesudah pajak;
9. Menghitung besarnya laba maksimum sebelum dan sesudah pajak;
10. Membandingkan besarnya laba maksimum sebelum dan sesudah pajak;
11. Menghitung besarnya kuantitas untuk mencapai laba dan pajak maksimum;
12. Menentukan besarnya pajak dan laba maksimum pada pasar monopoli;
13. Menentukan besarnya pajak per unit, pajak total, pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen untuk pengenaan pajak pada pasar monopoli;
14. Menentukan keseimbangan pasar sebagai akibat pengenaan pajak, pajak per unit pemerintah, dan total pajak maksimum yang diterima oleh pemerintah;
15. Mengetahui jumlah persediaan barang dagang yang harus dipesan agar biaya persediaan total minimum;
16. Menentukan besarnya persediaan total;
17. **Menentukan titik pemesanan kembali;**
18. **Menentukan berapa kali pemesanan dalam satu periode tertentu.**

8.1. ELASTISITAS

8.1.1. Konsep Dasar Elastisitas

Elasitisitas adalah persentase perubahan variabel bebas (x) akibat persentase perubahan variabel tidak bebas (y). Elastisitas merupakan rasio antara perubahan relatif dalam variabel bebas terhadap perubahan relatif dalam variabel tidak bebas. Atau dapat juga dikatakan rasio perubahan persentasi pada variabel bebas terhadap perubahan persentasi pada variabel tidak bebas. Secara rumus, elastisitas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\varepsilon = \frac{\%\text{ Perubahan y}}{\%\text{ Perubahan x}} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{dy}{y}.\frac{x}{dx} = \frac{dy}{dx}.\frac{x}{y}$$

Keterangan:

ε = koefisien elastisitas

$\frac{dy}{dx}$ = derivatif y terhadap x

x = variabel bebas

y = variabel tidak bebas

Secara ekonomi nilai koefisien elastisitas memiliki arti sebagai berikut:

a. $|\varepsilon| > 1$, elastis
b. $|\varepsilon| = 1$, elastisitas unit
c. $0 < |\varepsilon| < 1$, inelastis
d. $|\varepsilon| = \infty$, elastis sempurna
e. $\varepsilon = 0$, inelastis sempurna

Besarnya koefisien elastisitas berada pada interval $0 \leq \varepsilon \leq \infty$.

Pada penerapan elastisitas berikut akan dijelaskan mengenai elastisitas permintaan dan elastisitas penawaran.

8.1.2. Elastisitas Permintaan

Elastisitas permintaan merupakan suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta sebagai akibat adanya perubahan harga. Atau dapat dikatakan bahwa elastisitas permintaan merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang diminta terhadap persentase perubahan harga. Bentuk umum dari fungsi permintaan adalah berbentuk Q = f(P), artinya besarnya kuantitas tergantung dari harga atau kuantitas merupakan fungsi dari harga.

$$\varepsilon_d = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

Keterangan:

εd = koefisien elastisitas permintaan

$\frac{dQ_d}{dP}$ = derevatif Q_d terhadap P

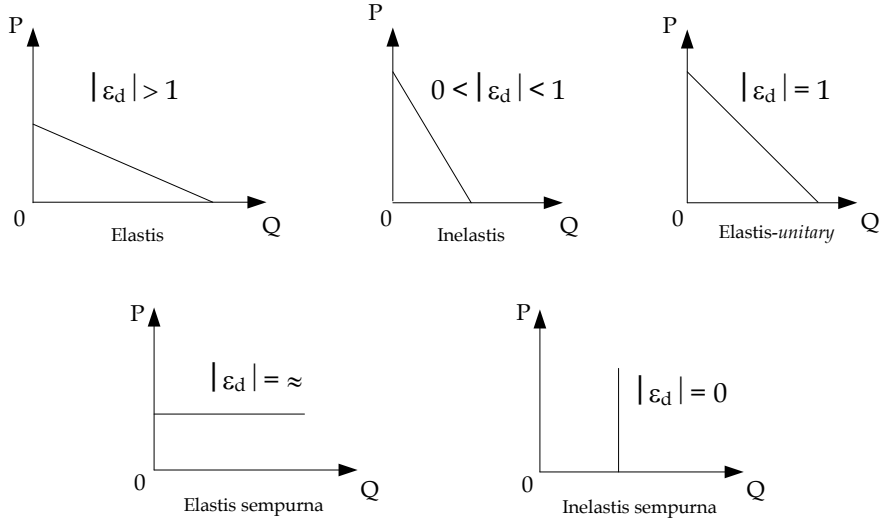
P = harga

Qd = kuantitas yang dinyatakan dalam fungsi permintaan

Seperti telah diketahui bahwa jumlah permintaan barang memiliki hubungan berbanding terbalik (negatif) dengan harga. Oleh sebab itu hasil perhitungan koefisien elastisitas permintaan juga akan bernilai negatif (hal ini menandakan kuantitas yang diminta dengan harga memiliki hubungan negatif). Secara ekonomi nilai koefisien elastisitas memiliki arti sebagai berikut:

a. Elastis apabila $|\varepsilon_d| > 1$, proporsi perubahan jumlah yang diminta lebih besar dibanding proporsi perubahan harga.
b. Elastis-unitary jika $|\varepsilon_d| = 1$, artinya proporsi perubahan jumlah yang diminta sama dengan proporsi perubahan harga.
c. Inelastis bila $|\varepsilon_d| < 1$, proporsi perubahan jumlah yang diminta lebih kecil dibanding proporsi perubahan harga.

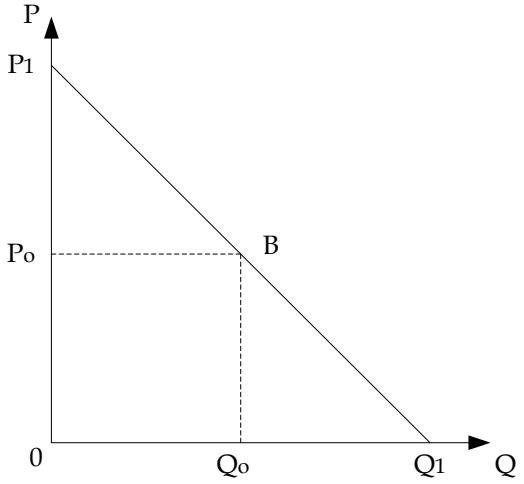
Secara grafis fungsi permintaan dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 8.1.

8.1.3. Elastisitas Harga pada Titik Kurva Permintaan

Penentuan elastisitas harga di atas menggunakan rumus untuk menentukan besarnya koefisien elastisitas. Ada pendekatan lain yang dapat digunakan untuk menentukan besarnya koefisien elastisitas, yaitu dengan menggunakan titik-titik pada kurva permintaan. Sebagai contoh, kita dapat melihat gambar kurva permintaan di bawah ini.



Gambar 8.2.

Dari kurva permintaan di atas terlihat titik B dan kita mencari tahu berapa besarnya koefisien elastisitas di titik tersebut. berdasarkan rumus elastisitas,

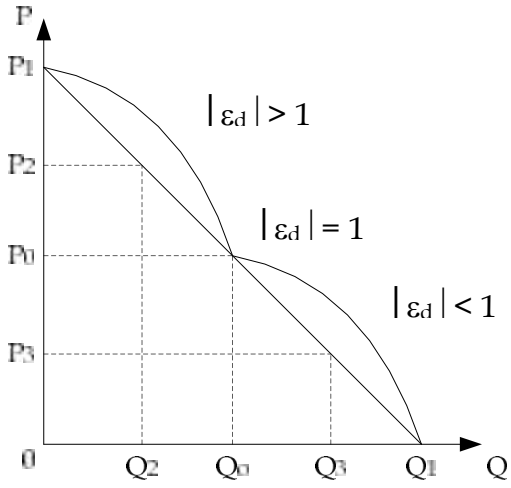
$$\varepsilon_d = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

Dengan melihat gambar di atas, bahwa $\frac{dQ_d}{dP}$ adalah sama dengan $\frac{Q_0Q_1}{Q_0B}$ dan besarnya P sama dengan BQ0, sementara itu besarnya besarnya Q adalah BP0.

Dengan demikian jika semua data disubstitusikan akan terbentuk:

$$\varepsilon_d = \frac{Q_0Q_1}{Q_0B} \cdot \frac{BQ_0}{BP_0} = \frac{Q_0Q_1}{BP_0}$$

Karena besarnya Q_0Q_1 sama dengan BP_0, maka besarnya koefisien elastisitas di titik B adalah 1 (elastis-*unitary*). Titik-titik yang berada di atas titik B mempunyai koefisien elastisitas > 1, sedangkan titik-titik yang berada di bawah B mempunyai koefisien < 1.



Gambar 8.3.

Pada saat harga P_0 sampai (kuantitas Q_0), besarnya koefisien elastisitas adalah 1. Pada saat harga di atas P_0 sampai ke P_1 (kuantitas dari 0 sampai dibawah Q_0), besarnya koefisien elastisitas > 1, sedangkan pada saat harga 0 sampai di bawah P_0 (kuantitas di atas Q_0 sampai Q_1), besarnya koefisien elastisitas < 1.

Contoh 1:
Permintaan akan suatu barang dicerminkan oleh fungsi Q = 8 — 2P, di mana Q melambangkan jumlah barang yang diminta dan P adalah harga per unit. Hitunglah elastisitas permintaan pada tingkat harga P = 3, P = 1, dan pada tingkat jumlah yang diminta Q = 4.

Jawaban
Q = 8 — 2P

$$\frac{dQ}{dP} = -2$$

Elastisitas permintaan pada tingkat harga P = 3

$$\varepsilon_d = \frac{dQ}{dP}.\frac{P}{Q}$$

$$= -2.\frac{3}{2}$$

$$= -3 \text{ (elastis)}$$

Artinya jika harga naik satu persen (%) maka jumlah yang diminta turun sebesar 3 persen (%).

Elastisitas permintaan pada tingkat harga P = 1

$Q = 8 - 2(1) = 6$

$$\varepsilon_d = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

= −0,33 ,artinya jika harga naik satu persen (%) maka jumlah yang diminta turun sebesar 0,33 persen (%).

Elastisitas permintaan pada tingkat Q = 4

$4 = 8 - 2P$

$P = 2$

$$\varepsilon_d = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

$$= -2 \cdot \frac{2}{4}$$

= −1 (elastis-*unitary*), artinya jika harga naik satu persen (%) maka jumlah yang diminta turun sebesar satu persen (%).

Contoh 2:

Jika diketahui fungsi permintaan $P = 4 - Q^2$, dimana P adalah harga jual dan Q adalah kuantitas yang diminta. Tentukan besarnya koefisien elastisitas pada saat Q = 1 dan jelaskan artinya.

Jawaban

$P = 4 - Q^2$

$$\frac{dP}{dQ} = -2Q$$

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{\frac{dP}{dQ}} = -\frac{1}{2Q} = -\frac{1}{2(1)} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$Q = 1$

$P = 4 - (1)^2$

$P = 3$

$$\varepsilon_d = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = -\frac{3}{2}$ = -1,5 (elastis), artinya jika harga naik satu persen (%) maka jumlah yang diminta turun sebesar 1,5 persen (%).

Catatan:
Tanda negatif pada koefisien elastisitas permintaan mencerminkan hubungan yang negatif antara harga dengan jumlah yang diminta.

8.1.4. Elastisitas Busur

Konsep elastisitas pada bagian sebelumnya merupakan bagian elastisitas titik, maksudnya pencarian besaran nilai koefisien elastisitas terjadi pada suatu titik tertentu. Ada bagian lain dari koefisien elastisitas yang bergerak diantara dua titik, yaitu elastisitas busur. Elastisitas ini terjadi di sepanjang busur di antara dua titik, hal ini terjadi karena adanya perubahan pada tingkat harga tertentu yang tentunya membawa dampak perubahan pada permintaan. Secara rumus, elastisitas busur dinyatakan dalam:

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\frac{P_1 + P_2}{2}}{\frac{Q_1 + Q_2}{2}}$$

$$\varepsilon_d = \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2} \cdot \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \quad \text{atau} \quad \varepsilon_d = \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

Rumus di atas mencerminkan besarnya koefisien elastisitas yang bergerak pada dua titik tertentu yang bersifat rata-rata bagi elastisitas di antara titik-titik (Q_1, P_1) dan (Q_2, P_2). Akan tetapi jika pencarian koefisien elastisitas pada suatu titik tertentu (misalnya pada Q_1, P_1 atau Q_2, P_2), maka rumus/formula yang digunakan menjadi:

$$\varepsilon_d = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta P} \quad \text{atau} \quad \varepsilon_d = \frac{P_2}{Q_2} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

Contoh 3:
Jika diketahui fungsi permintaan $Q = 60 - 2P^2$, harga terjadi pada saat USD 5, tentukan:

a. Elastisitas busur jika harga turun 8%.
b. Elastisitas busur dan titik pada masing-masing harga tersebut.

Jawaban

$Q = 60 - 2P^2$
$P_1 = 5$
$Q = 60 - 2(5)^2$
$Q_1 = 10$

$P_2 = 5 - (5x0,08) = 4,6$
$Q = 60 - 2(4,6)^2$
$Q_2 = 17,68$

a. $$\varepsilon_d = \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2} . \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

$$\varepsilon_d = \frac{5 + 4,6}{10 + 17,68} . \frac{17,68 - 10}{4,6 - 5}$$

$$\varepsilon_d = \frac{9,6}{27,68} . \frac{7,68}{-0,4}$$

$$\varepsilon = -6,66$$

b. Elastisitas busur pada masing-masing harga

$P_1 = 5$
$Q_1 = 10$

$$\varepsilon_d = \frac{5}{10} . \frac{7,68}{-0,4}$$

$$\varepsilon_d = -9,6$$

$P_2 = 4,6$
$Q_2 = 17,68$

$$\varepsilon_d = \frac{4,6}{17,68} . \frac{7,68}{-0,4}$$

$$\varepsilon_d = -5$$

Elastisitas titik pada masing-masing harga

$P_1 = 5$
$Q_1 = 10$

$$\varepsilon_d = \frac{P_1}{Q_1}.\frac{dQ}{dP}$$

$$\varepsilon_d = \frac{5}{10}.-4P$$

$$\varepsilon_d = \frac{5}{10}.\{-4(5)\}$$

$\varepsilon_d = -10$

$P_2 = 4{,}6$
$Q_2 = 17{,}68$

$$\varepsilon = \frac{P_2}{Q_2}.\frac{dQ}{dP}$$

$$\varepsilon_d = \frac{4{,}6}{17{,}68}.-4(5)$$

$\varepsilon_d = -5{,}2$

8.1.5 Elastisitas Penawaran

Arti dan proses dari elastisitas penawaran pada intinya adalah identik dengan pencarian elastisitas permintaan. Jika elastisitas permintaan melihat efek perubahan jumlah yang diminta sebagai akibat perubahan harga, sedangkan elastisitas penawaran melihat dari sisi perubahan jumlah yang ditawarkan terhadap perubahan harga. Secara definisi, elastisitas penawaran merupakan suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang ditawarkan sebagai akibat adanya perubahan harga, atau dapat dikatakan bahwa elastisitas penawaran merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan terhadap persentase perubahan harga. Bentuk umum dari fungsi penawaran pun sama dengan elastisitas permintaan, yaitu berbentuk Q = f(P), artinya besarnya kuantitas tergantung dari harga atau kuantitas merupakan fungsi dari harga.

$$\varepsilon_S = \frac{dQ_S}{dP} \cdot \frac{P}{Q_S}$$

Keterangan:

ε_S = koefisien elastisitas penawaran

$\frac{dQ_S}{dP}$ = Derevatif Qs Terhadap P

P = harga

Q_S = kuantitas yang dinyatakan dalam fungsi penawaran

Dalam fungsi penawaran, hubungan jumlah yang ditawarkan dengan harga adalah berbanding lurus (positif), dengan demikian besarnya koefisien

elastisitas penawaran adalah bernilai positif. Secara ekonomi nilai koefisien elastisitas memiliki arti sebagai berikut:

a. Elastis apabila $\varepsilon_S > 1$, proporsi perubahan jumlah yang ditawarkan lebih besar dibanding proporsi perubahan harga.
b. Elastis-unitary jika $\varepsilon_S = 1$, artinya proporsi perubahan jumlah yang ditawarkan sama dengan proporsi perubahan harga.
c. Inelastis bila $\varepsilon_S < 1$, proporsi perubahan jumlah yang ditawarkan lebih kecil dibanding proporsi perubahan harga.

Contoh 4:
Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh $Q_s = -20 + 3P^2$. Tentukan besarnya elastisitas penawarannya pada tingkat harga P = 5 dan Q = 28 serta jelaskan arti ekonominya.

Jawaban

$Q_s = -20 + 3P^2$

$$\frac{dQ_S}{dP} = 6P$$

$P = 5$

$P = 5$

$Q_S = -20 + 3P^2$

$Q_S = -20 + 3(5)^2$

$Q_S = 55$

$$\varepsilon_S = \frac{dQ_S}{dP} \cdot \frac{P}{Q_S}$$

$$\varepsilon_S = 6P \cdot \frac{5}{55}$$

$$\varepsilon_S = 6(5) \cdot \frac{5}{55}$$

$$\varepsilon_S = \frac{150}{55} \text{ (elastis)}$$

Artinya: Jika harga meningkat sebesar satu persen (%) maka jumlah yang ditawarkan meningkat sebesar 2,73 persen (%).

$Q = 28$

$Qs = -20 + 3P^2$

$28 = -20 + 3P^2$

$48 = 3P^2$

$P2 = 16$

$P = 4$

$$\varepsilon_S = \frac{dQs}{dP} \cdot \frac{P}{Qs}$$

$$\varepsilon_S = 6P \cdot \frac{4}{28}$$

$$\varepsilon_S = 6(5) \cdot \frac{4}{28}$$

$$\varepsilon_S = \frac{120}{28} \text{ (elastis)}$$

Artinya: Jika harga meningkat sebesar satu satuan maka jumlah yang ditawarkan meningkat sebesar 4,29 satuan.

8.1.6. Elastisitas pada Keseimbangan Pasar

Pada bagian atas telah dijelaskan elastisitas pada masing-masing bagian, yaitu permintaan dan penawaran. Bagian ini menjelaskan elastisitas pada keseimbangan pasar yang melibatkan permintaan dan penawaran. Seperti telah diketahui bahwa keseimbangan pasar terjadi apabila besarnya harga jual adalah sama, disamping itu besarnya kuantitas yang diminta dan yang ditawarkan juga sama. Dari harga dan kuantitas keseimbangan dapat diperoleh besarnya koefisien elastisitas, baik permintaan maupun penawaran.

Contoh 5:

Apabila diketahui fungsi permintaan dan penawaran masing-masing adalah sebagai berikut:

F_d: $P = 12 - 2Q^2$

F_s: $P = 8 + 2Q$

Tentukan besarnya koefisien elastisitas permintaan dan penawaran pada saat terjadi keseimbangan pasar dan jelaskan arti secara ekonominya.

Jawaban

F_d: $P = 12 - 2Q^2$

F_s: $P = 8 + 2Q$

Keseimbangan pasar:

$D = S$

$12 - 2Q^2 = 8 + 2Q$

$2Q^2 + 2Q - 4 = 0$

$Q^2 + Q - 2 = 0$

$(Q - 1)(Q + 2) = 0$

$Q_1 = 1$

$Q_2 = -2$ (tidak mungkin)

$P = 8 + 2(1)$

$P = 10$

$$\varepsilon_d = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{4Q} \cdot \frac{10}{1}$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{4(1)} \cdot \frac{10}{1}$$

$\varepsilon = -2{,}5$ (elastis)

Artinya jika harga meningkat sebesar satu persen (%) maka jumlah yang diminta turun sebesar 2,5 persen (%).

$$\varepsilon_S = \frac{dQs}{dP} \cdot \frac{P}{Qs}$$

$$\varepsilon_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{1}$$

$\varepsilon_s = 5$ (elastis)

Artinya jika harga meningkat sebesar satu persen (%) maka jumlah yang ditawarkan meningkat sebesar 5 persen (%).

8.2. BIAYA

Setiap perusahaan yang menghasilkan barang ataupun jasa memerlukan sejumlah biaya dalam kegiatan operasionalnya, baik biaya yang menyangkut produksi suatu barang maupun biaya di luar biaya produksi. Biaya merupakan sejumlah uang yang dikeluarkan perusahaan untuk membuat sejumlah produk tertentu. Besar kecilnya biaya yang dikeluarkan perusahaan tergantung dari jumlah yang diproduksi atau dapat dikatakan bahwa biaya merupakan fungsi

dari kuantitas. Dalam kegiatan operasionalnya, perusahaan berupaya agar biaya yang dikeluarkan minimum. Berbagai cara dilakukan perusahaan untuk menekan biaya tersebut guna mencapai efisiensi biaya, diantaranya dengan menekan biaya produksi. Biaya produksi menyangkut biaya bahan baku, tenaga kerja, dan biaya *overhead* pabrik.

Seperti telah diuraikan pada bagian sebelumnya bahwa biaya dapat dibedakan menjadi dua bagian, yaitu biaya tetap dan variabel. Pada bagian ini kembali diuraikan konsep biaya, akan tetapi pada bagian ini menjabarkan konsep derivatif untuk biaya, artinya bagaimana konsep derivatif dapat diterapkan untuk menghasilkan minimasi biaya.

Pada bagian di atas dijelaskan bahwa biaya total merupakan fungsi dari kuantitas, dengan demikian dapat dinyatakan menjadi:

$$TC = f(Q)$$

Keterangan:
TC = biaya total
Q = kuantitas/jumlah produk yang dihasilkan

Selanjutnya untuk mengetahui biaya rata-rata (AC) dapat dilakukan dengan cara membagi biaya total dengan kuantitas seperti yang tertera di bawah ini:

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

Konsep biaya lainnya adalah biaya marjinal (MC), yaitu perubahan biaya total sebagai akibat perubahan dari satu unit kuantitas yang dihasilkan. Atau dapat juga dikatakan biaya marjinal merupakan turunan pertama dari biaya total (TC). Secara rumus dapat dilihat di bawah ini:

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$$

Jika diasumsikan bahwa biaya terbentuk dari sebuah fungsi (linier atau non-linier), maka untuk menghasilkan biaya total (TC) minimum dilakukan dengan cara melakukan derivatif (turunan) terhadap TC, besarnya nilai tersebut sama dengan nol, dan turunan kedua dari fungsi tersebut lebih besar dari nol.

$$TC \text{ minimum: } TC' = 0 \text{ dan } TC'' > 0$$
$$\text{atau } MC = 0$$

Konsep derivatif tidak hanya dapat diterapkan pada biaya total, melainkan dapat diterapkan pada konsep biaya yang lain, misalnya untuk mencari biaya variabel minimum, biaya marjinal minimum, biaya rata-rata minimum, ataupun biaya variabel rata-rata minimum. Dengan menggunakan konsep yang sama bahwa fungsi apa yang akan diminimumkan maka turunan pertama fungsi tersebut memiliki nilai sama dengan nol dan turunan keduanya lebih besar dari nol. Sebagai contoh untuk meminimumkan biaya rata-rata, maka

AC minimum: $AC' = 0$ dan $AC'' > 0$

Keterangan:
Saat AC minimum maka AC = MC

Contoh 6:
Jika diketahui fungsi biaya total $TC = Q^3 - 6Q^2 - 15Q + 150$, maka tentukan:

a. Fungsi biaya variabel total (TVC) dan biaya tetap total (TFC).
b. Berapa tingkat produksi yang meminimumkan biaya total dan berapa biaya total minimumnya.

Jawaban

$TC = Q^3 - 6Q^2 - 15Q + 150$

a. $TVC = Q^3 - 6Q^2 - 15Q$
   $TFC = 150$
b. TC minimum terjadi pada $TC' = 0$ dan $TC'' > 0$
   $TC = Q^3 - 6Q^2 - 15Q + 150$
   $0 = 3Q^2 - 12Q - 15$
   $0 = Q^2 - 4Q - 5$
   $(Q - 5)(Q + 1) = 0$
   $Q = 5$ atau $Q = -1$ (tidak mungkin)

Tingkat produksi yang meminimumkan biaya total adalah 5 unit
Kemudian lakukan substitusi nilai Q pada fungsi TC
$TC = (5)^3 - 6(5)^2 - 15(5) + 150$
$TC = 125 - 150 - 75 + 150$
$TC = 50$
$TC'' = 6Q - 12$
$Q = 5$
$TC'' = 6(5) - 12$
$TC'' = 18$, berarti $TC'' > 0$, TC tersebut minimum

Contoh 7:

Jika diketahui fungsi biaya total $TC = Q^3 - 6Q^2 + 12Q$, maka tentukan:

a. Fungsi biaya marginal dan fungsi biaya rata-rata.
b. Berapa tingkat produksi yang meminimumkan biaya rata-rata dan berapa biaya rata-rata minimum tersebut.
c. Buktikan bahwa biaya rata-rata minimum sama dengan biaya marginal.

Jawaban:

a. $MC = 3Q^2 - 12Q + 12$
   $AC = Q^2 - 6Q + 12$
b. $AC' = 0$
   $2Q-6 = 0$
   $Q = 3$
   $AC'' = 2 > 0$, AC minimum
   AC minimum $= (3)^2 - 6(3) + 12 = 3$
c. $Q = 3$, maka $AC = 3^2 - 6.3 + 12 = 3$
   $MC = 3.\ 3^2 - 12.3 + 12 = 3$
   Saat AC minimum $Q = 3$, maka $AC = MC$.

8.3. PENERIMAAN

Penerimaan adalah sejumlah uang yang diterima dari penjualan sejumlah produk tertentu pada tingkat harga tertentu. Semakin tinggi produk yang terjual maka akan semakin tinggi pula penerimaan yang diperoleh. Dengan demikian penerimaan merupakan fungsi dari kuantitas, $TR = f(Q)$. Jika fungsi permintaan $Q = g(P)$ atau secara matematis dapat ditulis dengan $P = f(Q)$, dengan P adalah harga jual produk per unit dan Q adalah jumlah produk yang diminta, maka penerimaan total (TR) merupakan hasil kali antara harga jual produk dengan kuantitas/jumlah produk yang diminta atau yang terjual. Secara rumus dapat dilihat pada bagian di bawah ini.

$$TR = P.Q = f(Q).Q$$

Selain penerimaan total, juga terdapat penerimaan rata-rata (AR). Penerimaan rata-rata merupakan hasil bagi dari penerimaan total (TR) dengan jumlah produk yang terjual, (Q). Penerimaan rata-rata dapat juga disebut sebagai harga produk (P) atau fungsi permintaan.

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{PQ}{Q} = P$$

Konsep penerimaan lainnya adalah penerimaan marjinal (MR), yaitu perubahan jumlah yang diterima total sebagai akibat perubahan dari satu unit kuantitas yang terjual. Atau dapat juga dikatakan penerimaan marjinal merupakan turunan pertama dari penerimaan total (TR). Secara rumus dapat dilihat di bawah ini:

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$

Penerimaan total juga dapat terbentuk dari sebuah fungsi linier/non-linier (sama seperti biaya). Untuk menghasilkan penerimaan total (TR) maksimum dilakukan dengan cara melakukan derivatif (turunan) terhadap TR dan disamadenganken dengan nol dan turunan kedua dari fungsi tersebut lebih kecil dari nol.

$$\text{TR maksimum: } TR' = 0 \text{ dan } TR'' < 0$$

Contoh 8:
Jika diketahui fungsi permintaan adalah $Q = 6 - \frac{1}{3}P$, tentukan penerimaan total maksimum dan gambarkan grafik fungsi permintaan, penerimaan marjinal, dan penerimaan total dalam satu gambar.

Jawaban

$Q = 6 - \frac{1}{3}P,$

$P = 18 - 3Q$

$TR = 18Q - 3Q^2$

TR maksimum: $TR' = 0$ dan $TR'' < 0$

$TR = 18Q - 3Q^2$

$0 = 18 - 6Q$

$Q = 3$

$TR = 18Q - 3Q^2$

$TR = 18(3) - 3(3)^2$

$TR = 27$

$TR'' = -6$, berarti $TR'' < 0$, dengan demikian TR maksimum.

$TR = 18Q - 3Q^2$

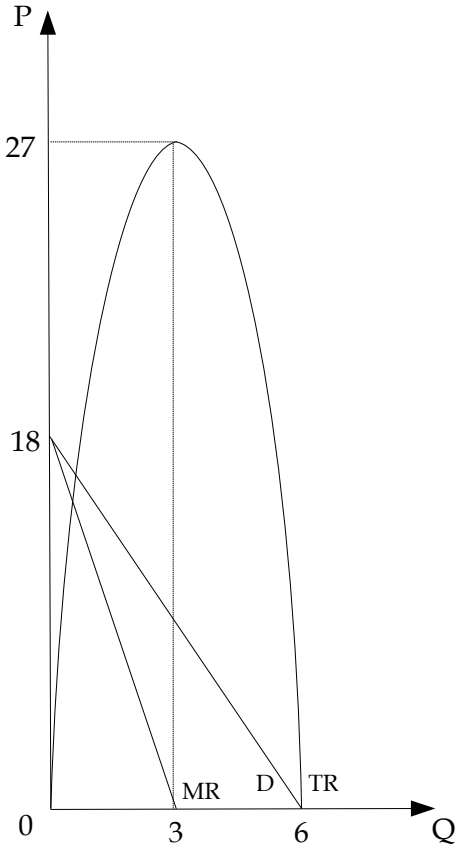
- Jika Q = 0, maka TR = 0 → (0,0)
- Jika TR = 0, maka
  $0 = 18Q - 3Q^2$
  $Q(18 - 3Q) = 0$
  $Q_1 = 0$ dan $Q_2 = 6$ → (0,0) dan (6,0)
- Titik puncak/maksimum terjadi pada TR = 27

MR = 18 – 6Q

- Jika Q = 0, maka MR = 18 → (0,18)
- Jika MR = 0, maka Q = 3 → (3,0)

AR = 18 – 3Q = P (identik dengan fungsi permintaan)

- Jika Q = 0, maka AR = 18 → (0,18)
- Jika AR = 0, maka Q = 6 → (6,0)



Gambar 8.4.

Contoh 9:
Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $P = 12 - Q^2$, maka tentukan:

a. Fungsi penerimaan total.
b. Nilai kuantitas untuk penerimaan maksimum dan berapa penerimaan total maksimum.
c. Nilai penerimaan marjinal pada saat penerimaan maksimum.
d. Berapa penerimaan rata-rata pada saat penerimaan total maksimum.

Jawaban

$P = 12 - Q^2$

a. $TR = PQ$
   $TR = (12 - Q^2)Q$
   $TR = 12Q - Q^3$
b. TR maksimum: $TR' = 0$ dan $TR'' < 0$
   $TR = 12Q - Q^3$
   $0 = 12 - 3Q^2$
   $12 = 3Q^2$
   $Q^2 = 4$
   $Q = 2$
   $TR = 12(2) - (2)^3$
   $TR = 24 - 8$
   $TR = 16$
   $TR'' = -6Q, Q = 2$
   $= -6(2)$
   $= -12$, berarti $TR'' < 0$, dengan demikian TR maksimum
c. $MR = TR'$
   $MR = 12 - 3Q^2$
   $Q = 2$
   $MR = 12 - 3(2)^2$
   $MR = 0$
d. $AR = \frac{TR}{Q}$
   $AR = 12 - Q^2$
   $Q = 2$
   $AR = 12 - (2)^2$
   $AR = 8$

8.4. LABA DAN DAMPAK PAJAK PADA LABA

8.4.1. Laba

Laba merupakan selisih antara penerimaan dengan biaya, jika terdapat selisih negatif berarti perusahaan mengalami kerugian. Pada kasus laba, penerapan derivatif dapat dilakukan untuk mendapatkan hasil laba yang maksimum. Pada bagian penerimaan maksimum di bagian sebelumnya telah diuraikan mengenai bagaimana konsep derivatif diterapkan untuk memperoleh nilai penerimaan maksimum. Sama halnya dengan laba maksimum, untuk mendapatkan laba maksimum pertama-tama dilakukan turunan pertama terhadap laba dan turunan terhadaplaba tersebut harus sama dengan nol dan syarat keduanya harus lebih kecil dari nol.

$$Л = TR - TC$$

Keterangan:
Л = laba
TR = penerimaan total
TC = biaya total

$$Л \text{ maksimum: } Л' = 0 \text{ dan } Л'' < 0$$

Dari prosedur derivatif tersebut diperoleh nilai Q (kuantitas) yang memaksimumkan laba, kemudian dari kuantitas tersebut dilakukan substitusi ke fungsi laba dan diperoleh nilai laba maksimum.

Proses pencarian nilai kuantitas yang memaksimumkan laba juga dapat menggunakan konsep marjinal. Untuk mendapatkan kuantitas tersebut dilakukan pendekatan penerimaan marjinal sama dengan biaya marjinal (MR = MC). Seperti diketahui bahwa besar kecilnya penerimaan dan biaya tergantung dari kuantitas atau dapat dikatakan fungsi dari kuantitas, maka pembuktian MR = MC dapat dilihat sebagai berikut:

$Л = TR - TC$
$Л = r(Q) - c(Q)$
Laba maksimum terjadi pada $Л' = 0$ dan $Л'' < 0$
$Л' = 0$

$$0 = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ}$$

$$\frac{dTR}{dQ} = \frac{dTC}{dQ}$$

Dengan demikian berarti terbukti bahwa pencarian kuantitas untuk memperoleh laba maksimum dapat juga menggunakan konsep MR = MC. Akan tetapi jika data yang tersedia pada suatu kasus tertentu adalah fungsi MR dan/ atau MC saja, maka konsep MR = MC hanya dapat menjawab besarnya kuantitas yang memaksimumkan laba tanpa dapat menjawab nilai laba maksimum itu sendiri. Secara grafik MR = MC merupakan perpotongan dari kedua garis tersebut, akan tetapi ada kemungkinan MR = MC belum tentu menghasilkan laba maksimum jika penerimaan dan biaya salah satunya atau keduanya merupakan fungsi berpangkat tiga. Ada dua kemungkinan yang dapat terjadi pada kondisi MR = MC, yaitu terjadi laba maksimum. Untuk menjawab pertanyaan ini diperlukan turunan kedua sebagai alat bantunya. Syarat laba maksimum yang kedua adalah $\Pi'' < 0$. Jika $\Pi'' > 0$, maka terjadi kerugian maksimum. Atau jika menggunakan pendekatan marjinal, laba maksimum terjadi jika nilai turunan pertama dari penerimaan marjinal lebih kecil dari nilai turunan pertama dari biaya marjinal begitu pula sebaliknya.

Laba maksimum: $MR' < MC'$

Contoh 10:
Apabila diketahui fungsi permintaan suatu barang $5Q - 28 + P = 0$, sementara itu fungsi biaya total $TC = Q^2 + 4Q$, tentukan besarnya kuantitas agar laba maksimum.

Jawaban
$5Q - 28 + P = 0$,
$P = 28 - 5Q$
$TC = Q^2 + 4Q$

$\Pi = TR - TC$
$\Pi = PQ - TC$
$\Pi = (28 - 5Q)Q - (Q^2 + 4Q)$
$\Pi = 28Q - 5Q^2 - Q^2 - 4Q$
$\Pi = -6Q^2 + 24Q$

Laba maksimum terjadi pada $\Pi' = 0$ dan $\Pi'' < 0$
$0 = -12Q + 24$
$Q = 2$
Jadi besarnya kuantitas agar laba maksimum adalah sebesar 2 unit
$\Pi'' = -12$, berarti $\Pi''^1 < 0$, dengan demikian laba tersebut maksimum.

atau dapat menggunakan pendekatan MR = MC
MR = TR′ = 28 – 10Q
MC = TC′ = 2Q + 4
28 – 10Q = 2Q + 4
12Q = 24
Q = 2
MR′ = –10, MC′ = 2, berarti MR′ < MC′, dengan demikian memenuhi syarat laba maksimum.

Contoh 11:
Apabila diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $P = 10$ dan biaya total $TC = Q^3 - 6Q^2 + 13Q$, tentukan:

a. Besarnya kuantitas yang menyebabkan laba maksimum dan berapa nilai laba maksimumnya.
b. Buktikan bahwa laba tersebut maksimum.
c. Buatlah grafik yang menunjukkan hubungan Q dengan MR, AR, MC, dan AC.

Jawaban

a. $P = 10$ → $TR = 10Q$
$TR = 10Q$ → $MR = 10$
$TC = Q^3 - 6Q^2 + 13Q$ → $MC = 3Q^2 - 12Q + 13$

Laba maksimum:
MR = MC
$0 = 3Q^2 - 12Q + 13$
$0 = 3Q^2 - 12Q + 3$
$0 = Q^2 - 4Q + 1$

$$Q_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.1.1}}{2.1}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$
$$Q_1 = \frac{4 + 3{,}46}{2} = \frac{7{,}47}{2} = 3{,}735$$
$$Q_2 = \frac{4 - 3{,}46}{2} = \frac{0{,}54}{2} = 0{,}27$$

b. MR′ = 0
MC′ = 6Q – 12

$Q_1 = 3{,}735$, $MR' = 0$, $MC' = 10{,}41$ $\rightarrow MR' < MC'$
$Q_1 = 0{,}27$, $MR' = 0$, $MC' = -10{,}38$ $\rightarrow MR' > MC'$

Jadi laba maksimum pada saat Q = 3,735 terbukti dengan MR′ < MC′.

c. $MC = 3Q^2 - 12Q + 13$
$AC = Q^2 - 6Q + 13$

8.4.2. Dampak Pajak pada Laba

Pajak merupakan sejumlah uang yang diterima oleh pemerintah yang dikenakan dari penjualan perusahaan. Dalam kaitannya dengan maksimasi laba dari monopolis, pengenaan pajak ini akan mengurangi besarnya laba maksimum monopolis dan akan dibebankan pada biaya total perusahaan. Pengenaan pajak yang dilakukan oleh pemerintah terhadap monopolis menyebabkan terjadinya perubahan pada laba maksimum monopolis. Laba yang semula:

$\Pi = TR - TC$

Jika pemerintah mengenakan pajak sebesar t per unit, maka fungsi laba menjadi:

$$\Pi_t = TR - TC_t$$

$$\Pi_t = PQ - (TC + tQ)$$

Keterangan:
Π = laba
TR = penerimaan total
TC = biaya total
Π_t = laba setelah pengenaan pajak
TC_t = biaya total setelah pajak
t = pajak per unit

Π_t maksimum: $\Pi_t' = 0$ dan $\Pi_t'' < 0$

Dari prosedur derivatif tersebut diperoleh nilai Q (kuantitas) yang memaksimumkan laba setelah pajak, kemudian dari kuantitas tersebut dilakukan substitusi ke fungsi laba dan diperoleh nilai laba maksimum setelah pajak.

Contoh 12:
Diketahui fungsi permintaan adalah P = 594 – 0,4Q dan biaya total
$TC = 0{,}05Q^3 - 0{,}4Q^2 + 19Q + 9.000$. Pemerintah mengenakan pajak kepada perusahaan sebesar Rp 200,- untuk setiap unit barang yang dijual.

a. Berapa harga jual dan jumlah barang yang harus dijual untuk memaksimumkan laba.
b. Berapa nilai laba maksimum tersebut.

Jawaban

$P = 594 - 0{,}4Q$

$TC = 0{,}05Q^3 - 0{,}4Q^2 + 19Q + 9.000$

$t = 200$

a. $\Pi_t = PQ - (TC + tQ)$

$\Pi_t = (594Q - 0{,}4Q^2) - (0{,}05Q^3 - 0{,}4Q^2 + 19Q + 9.000 + 200Q)$

$= 594Q - 0{,}4Q^2 - 0{,}05Q^3 + 0{,}4Q^2 - 19Q - 9.000 - 200Q$

$= -0{,}05Q^3 + 375Q - 9.000$

Syarat maksimum adalah: $\Pi_t' = 0$ dan $\Pi_t'' < 0$

$\Pi_t' = 0$

$-0{,}15Q^2 + 375 = 0$

$0{,}15Q^2 = 375$

$Q^2 = 2.500$

$Q_1 = 50$ atau $Q_2 = -50$ (tidak mungkin)

$\Pi_t'' = -0{,}3Q$

$\Pi_t'' = -15$, karena $\Pi_t'' < 0$, maka laba tersebut maksimum.

$P = 594 - 0{,}4Q$

$P = 594 - 0{,}4(50)$

$P = 574$

Jadi besarnya harga jual adalah 574 dan jumlah barang yang harus dijual sebesar 50 unit untuk memaksimumkan laba.

b. $\Pi = -0{,}05Q^3 + 375Q - 9.000$

$\Pi = -0{,}05(50)^3 + 375(50) - 9.000$

$\Pi = 3.500$

Jadi besarnya laba maksimum setelah pajak adalah 3.500.

Contoh 13:

Jika diketahui fungsi permintaan adalah $P = 557 - 0{,}2Q$ dan biaya total $TC = 0{,}05Q^3 - 0{,}2Q^2 + 17Q + 7.000$. Kemudian, pemerintah mengenakan pajak kepada perusahaan sebesar Rp 165 untuk setiap unit barang yang dijual, tentukan:

a. laba sebelum dan sesudah pajak
b. persentase perubahan laba sebelum dan sesudah pajak
c. Tentukan harga jual sebelum dan sesudah pajak.

Jawaban

$P = 557 - 0{,}2Q$

$TC = 0{,}05Q^3 - 0{,}2Q^2 + 17Q + 7.000$

$t = 165$

a. laba sebelum pajak

$\Pi = TR - TC$

$\Pi = (557 - 0{,}2Q)Q - (0{,}05Q^3 - 0{,}2Q^2 + 17Q + 7.000)$

$\Pi = 557Q - 0{,}2Q^2 - 0{,}05Q^3 + 0{,}2Q^2 - 17Q - 7.000$

$\Pi = -0{,}05Q^3 + 540Q - 7.000$

Syarat maksimum adalah: $\Pi' = 0$ dan $\Pi'' < 0$

$0 = -0{,}15Q^2 + 540$

$-0{,}15Q^2 = 540$

$Q^2 = 3.600$

$Q_1 = 60$ dan $Q_2 = -60$ (tidak mungkin)

$\Pi_t'' = -0{,}3Q$

$\Pi_t'' = -18$, karena $\Pi_t'' < 0$, maka laba tersebut maksimum.

$\Pi = -0{,}05Q^3 + 540Q - 7.000$

$\Pi = -0{,}05(60)^3 + 540(60) - 7.000$

$\Pi = 14.600$

b. laba setelah pajak

$\Pi_t = TR - TC_t$

$\Pi_t = (557 - 0{,}2Q)Q - (0{,}05Q^3 - 0{,}2Q^2 + 17Q + 7.000 + 165Q)$

$\Pi_t = 557Q - 0{,}2Q^2 - 0{,}05Q^3 + 0{,}2Q^2 - 17Q - 7.000 - 165Q$

$\Pi_t = -0{,}05Q^3 + 375Q - 7.000$

Syarat maksimum adalah: $\Pi_t' = 0$ dan $\Pi_t'' < 0$

$0 = -0{,}15Q^2 + 375$

$0{,}15Q^2 = 375$

$Q^2 = 2.500$

$Q_1 = 50$ atau $Q_2 = -50$ (tidak mungkin)

$\Pi_t'' = -0{,}3Q$
$\Pi_t'' = -15$, karena $\Pi_t'' < 0$, maka laba tersebut maksimum.

$\Pi_t = -0{,}05Q^3 + 375Q - 7.000$
$\Pi_t = -0{,}05(50)^3 + 375(50) - 7.000$
$\Pi_t = 5.500$

c. Persentase perubahan laba sebelum dan setelah pajak

$$= \frac{\text{laba sebelum pajak} - \text{laba setelah pajak}}{\text{laba sebelum pajak}} \times 100\%$$

$$= \frac{14.600 - 5.500}{14.600} \times 100\%$$

$= 62{,}33\ \%$

Jadi persentase perubahan laba sebelum dan sesudah pajak adalah sebesar 62,33%, karena laba sebelum pajak lebih besar dari laba setelah pajak maka 62,33% tersebut menunjukkan persentase turunnya laba setelah ada pajak.

d. $P = 557 - 0{,}2Q$
Harga jual sebelum pajak, $P = 557 - 0{,}2(60) = 545$
Harga jual setelah pajak, $P = 557 - 0{,}2(50) = 547$

8.5. PENERIMAAN PAJAK MAKSIMUM

8.5.1. Dampak Pajak Maksimum terhadap Laba

Pada bagian sebelumnya dikemukakan bahwa pemerintah mengenakan pajak terhadap perusahaan monopolis. Pajak yang ditetapkan pemerintah tersebut belum menghasilkan pajak maksimum. Jika pemerintah menginginkan pajak yang diterimanya maksimum disamping itu perusahaan monopolis juga menginginkan laba yang diterimanya maksimum maka konsep derivatif kita gunakan sebanyak dua kali, yaitu pada saat mencari pajak maksimum pemerintah dan laba maksimum monopolis.

$$\Pi_t = TR - TC_t$$
$$\Pi_t = PQ - (TC + tQ)$$

Keterangan:
Π_t = laba setelah pengenaan pajak
TC_t = biaya total setelah pajak
t = pajak per unit
tQ = pajak total yang diterima pemerintah (T)

Pajak maksimum terjadi pada saat $T' = 0$ dan $T'' < 0$

Π_t maksimum: $\Pi_t' = 0$ dan $\Pi_t'' < 0$

Contoh 14:
Berdasarkan contoh soal sebelumnya dimana diketahui fungsi permintaan adalah $P = 557 - 0{,}2Q$ dan biaya total $TC = 0{,}05Q^3 - 0{,}2Q^2 + 17Q + 3.500$. Akan tetapi pemerintah mengenakan pajak sebesar t per unit dan pemerintah menginginkan pajak yang diterimanya maksimum disamping itu perusahaan monopolis juga menginginkan laba yang diterimanya maksimum. Tentukan:
a. Pajak maksimum per unit.
b. Pajak total maksimum yang diterima pemerintah.
c. Laba maksimum sebelum dan sesudah pajak.

Jawaban
$P = 557 - 0{,}2Q$
$TC = 0{,}05Q^3 - 0{,}2Q^2 + 17Q + 3.500$
a. Pajak maksimum per unit
$\Pi_t = TR - TC_t$
$\Pi_t = (557 - 0{,}2Q)Q - (0{,}05Q^3 - 0{,}2Q^2 + 17Q + 3.500 + tQ)$
$\Pi_t = 557Q - 0{,}2Q^2 - 0{,}05Q^3 + 0{,}2Q^2 - 17Q - 3.500 - tQ$
$\Pi_t = -0{,}05Q^3 + 540Q - 3.500 - tQ$

Laba maksimum, syarat maksimum adalah: $\Pi' = 0$ dan $\Pi'' < 0$
$0 = -0{,}15Q^2 + 540 - t$
$t = -0{,}15Q^2 + 540$
$T = tQ$
$T = (-0{,}15Q^2 + 540)Q$
$T = -0{,}15Q^3 + 540Q$

Pajak maksimum, syarat maksimum adalah: $T' = 0$ dan $T'' < 0$
$T' = 0$
$0 = -0{,}45Q^2 + 540$
$0{,}45Q^2 = 540$
$Q^2 = 1200$

$Q_1 = 34{,}64$ dan $Q_2 = -34{,}64$ (tidak mungkin)

$\Pi'' = -0{,}3Q$

$\Pi'' = -10{,}39$, karena $\Pi'' < 0$, maka laba tersebut maksimum

$T'' = -0{,}9Q$

$T'' = -31{,}18$, karena $T'' < 0$, maka pajak tersebut maksimum.

$t = -0{,}15Q^2 + 540$

$t = -0{,}15(34{,}64)^2 + 540$

$t = 360{,}61$ /unit

b. Pajak total yang diterima pemerintah

$T = -0{,}15Q^3 + 540Q$

$T = -0{,}15(34{,}64)^3 + 540(34{,}64)$

$T = 12.470{,}77$

atau,

$T = tQ$

$T = 360{,}01 \times 34{,}64$

$T = 12.470{,}75$ (perbedaan desimal karena faktor pembulatan)

c. Laba maksimum sebelum pajak

$\Pi = 18.100$

Laba maksimum setelah pajak:

$\Pi_t = -0{,}05Q^3 + 540Q - 3.500 - tQ$

$\Pi_t = -0{,}05(34{,}64)^3 + 540(34{,}64) - 3.500 - 12.470{,}77$

$\Pi_t = 656{,}55$

Contoh 15:

Apabila diketahui pada saat harga jual Rp 50,- maka tidak ada seorangpun yang mau membeli produk tersebut. Pada saat harga Rp 44,- terdapat permintaan sebanyak 1 unit. Jika diketahui fungsi biaya rata-rata AC = Q – 9 dan pemerintah mengenakan pajak sebesar t per unit, tentukan:

a. besarnya kuantitas pada saat penerimaan pajak pemerintah maksimum dan lama monopolis juga maksimum
b. berapa besarnya pajak per unit dan pajak total maksimum yang diterima pemerintah
c. berapa besarnya laba maksimum setelah pajak.

Jawaban

$P_1 = 50$, $Q_1 = 0$

$P_2 = 44$, $Q_2 = 1$

$AC = Q - 9$

$TC = AC.Q$
$TC = Q^2 - 9Q$
$TC_t = Q^2 - 9Q + tQ$

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{Q - Q_1}{Q_2 - Q_1}$$

$$\frac{P - 50}{44 - 50} = \frac{Q - 0}{1 - 0}$$

$P - 50 = -6Q$
$P = -6Q + 50$

a. $Лt = TR - TCt$
$Лt = (-6Q + 50)Q - (Q^2 - 9Q + tQ)$
$Лt = -6Q^2 + 50Q - Q^2 + 9Q - tQ$
$Лt = -7Q^2 + 59Q - tQ$
Laba maksimum, syarat maksimum adalah: $Лt' = 0$ dan $Лt'' < 0$

$0 = -14Q + 59 - t$
$t = -14Q + 59$
$T = t.Q$
$T = (-14Q + 59)Q$
$T = -14Q^2 + 59Q$

Pajak maksimum, syarat maksimum adalah: $T' = 0$ dan $T'' < 0$
$0 = -28Q + 59$
$28Q = 59$
$Q = 2,11$

$Л'' = -14$, karena $Л'' < 0$, maka laba tersebut maksimum
$T'' = -28$, karena $T'' < 0$, maka pajak tersebut maksimum.

b. $t = -14Q + 59$
$t = -14(2,11) + 59$
$t = 28,5$

T = t.Q
T = 28,5 x 2,11
T = 60,135

c. $\Pi t = -7Q^2 + 59Q - tQ$
$\Pi t = -7(2,11)^2 + 59(2,11) - 60,135$
$\Pi t = -31,16 + 124,49 - 60,135$
$\Pi t = 33,195$

8.5.2. Pajak Maksimum pada Titik Keseimbangan Pasar

Pada bab sebelumnya diuraikan mengenai keseimbangan pasar sebelum dan setelah pengenaan pajak, dimana besarnya pajak per unit yang ditetapkan pemerintah telah teridentifikasi. Kesimpulan yang diperoleh bahwa pengenaan pajak akan menaikkan harga jual dan menurunkan jumlah yang diminta sehingga membentuk keseimbangan pasar (*equilibrium*) yang baru. Pada bagian ini juga dilakukan analisis mengenai dampak pengenaan pajak, akan tetapi besarnya pajak per unit belum teridentifikasi. Pemerintah menginginkan pajak yang diterimanya maksimum, untuk itu kita harus mencari besarnya pajak per unit yang dapat memaksimumkan penerimaan pajak pemerintah tersebut.

Besarnya pajak total (T) yang diterima pemerintah merupakan hasil kali antara pajak per unit (t) dengan kuantitas (Q). Sehingga jika pemerintah menginginkan penerimaan pajaknya maksimum berarti harus menggunakan konsep derivatif.

Pajak maksimum terjadi pada saat $T' = 0$ dan $T'' < 0$

Pajak yang diterima pemerintah (T)

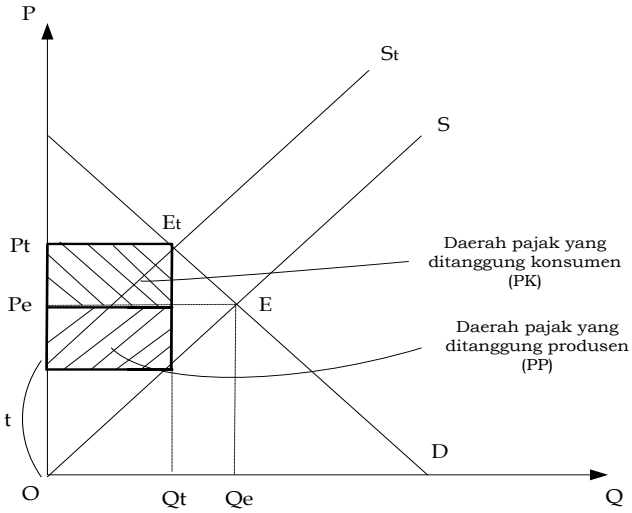
$$T = t \times Q_t$$

Pajak yang ditanggung konsumen (Pk)

$$P_k = (P_t - P_o) \times Q_t$$

Pajak yang ditanggung produsen (P_p)

$$P_p = [\, t - (P_t - P_o) \,] \times Q_t$$



Gambar 8.5.

Berdasarkan gambar di atas dapat diketahui daerah pajak maksimum total yang diterima pemerintah, pajak yang ditanggung oleh konsumen (Pk) dan produsen (Pp).

Perubahan yang terjadi telah dijelaskan pada bab sebelumnya, yaitu pada fungsi penawaran. Dasar pengenaan pajak akan merubah fungsi penawaran (sementara fungsi permintaan tetap). Dalam fungsi penawaran tersebut juga dipastikan apakah fungsi penawaran berbentuk P = f(Q) atau Q = f(P).

a. Jika f_s: P = f(Q), maka fs_t : P_t = f(Q) + t
   misalnya: P = Q + 4, maka P_t = Q + 4 + t

b. Jika f_s : Q = f(P), maka fs_t: Q_t = f(P – t)
   Misalnya: Q = $2P^2$ + P – 5, maka Q_t = $2(P - t)^2$ + (P – t) – 5

Contoh 16:

Apabila diketahui fungsi permintaan dan penawaran adalah P = 14 – 3Q dan P = 4 + 2Q. Pemerintah mengenakan pajak sebesar t per unit terhadap barang tersebut dan pemerintah menginginkan penerimaan maksimum dari pajak tersebut, tentukan:

a. Keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak.
b. Berapa pajak per unit-nya.
c. Berapa pajak maksimum yang diterima pemerintah.
d. Berapa pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen.
e. Gambarkan grafiknya.

Jawaban

Fd: P = 14 – 3Q

Fs: P = 4 + 2Q

a. D = S

14 – 3Q = 4 + 2Q

5Q = 10

Q = 2

P= 14 – 3Q

P = 14 – 3(2)

P = 8

Keseimbangan sebelum pajak adalah (2,8)

D = St

14 – 3Q = 4 +2Q + t

t = –5Q + 10

T = t.Q

T = (–5Q + 10)Q

$T = -5Q^2 + 10Q$

Pajak maksimum terjadi pada saat T′ = 0 dan T″ < 0

T′ = 0

0 = –10Q + 10

Q = 1

T″ = –10, karena T″ < 0, berarti pajak tersebut maksimum

P = 14 – 3Q

P = 14 – 3(1)

P = 11

Keseimbangan setelah pajak adalah (1, 11)

b. t = –5Q + 10

t = –5(1) + 10

t = 5

besarnya pajak per unit adalah 5

c. $T = -5Q^2 + 10Q$

$T = -5(1)^2 + 10(1)$

T = 5

atau
$T = tQ$
$T = 5 \times 1$
$T = 5$
Besarnya penerimaan maksimum pemerintah dari pajak adalah 5

d. Pajak yang ditanggung konsumen (P_k)
$P_k = (P_t - P_o) \times Q_t$
$P_k = (11 - 8) \times 1$
$P_k = 3$

Pajak yang ditanggung produsen (P_p)
$P_p = [\ t - (P_t - P_o)\ ] \times Q_t$
$P_p = [\ 5 - (11 - 8)\ ] \times 1$
$P_p = [\ 5 - 3\ ] \times 1$
$P_p = 2$
atau
$P_p = T - P_k$
$P_p = 5 - 3$
$= 2$

e. gambar
Titik potong grafik permintaan dan penawaran
D: P= 14 – 3Q

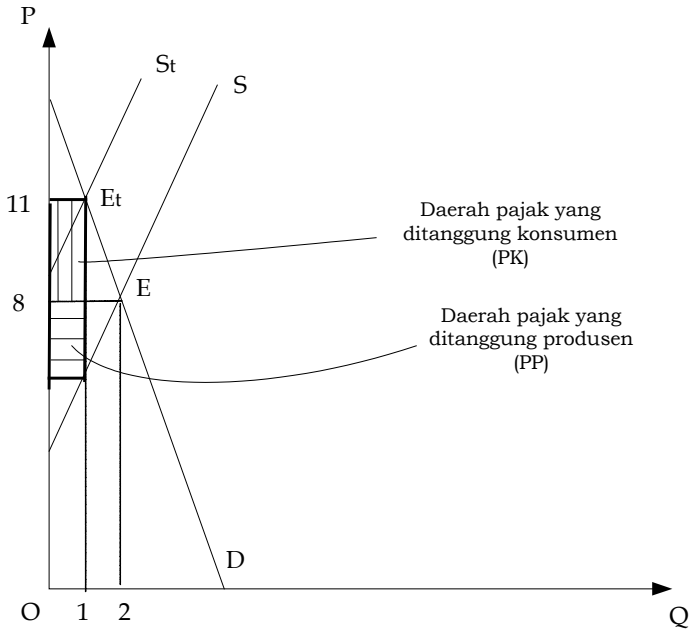
P	0	14
Q	14/3	0

S: P = 4 + 2Q

P	0	4
Q	–2	0

S_t: $P_t = 9 + 2Q$

P	0	9
Q	–4,5	0



Gambar 8.6.

Contoh 17:
Apabila diketahui fungsi permintaan dan penawaran adalah $P - Q^2 + 13Q - 30 = 0$ dan $Q^2 + 4 - P = 0$. Pemerintah mengenakan pajak sebesar t per unit terhadap barang tersebut dan pemerintah menginginkan penerimaan maksimum dari pajak tersebut, tentukan:

a. Keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak.
b. Berapa pajak per unit-nya.
c. Berapa pajak maksimum yang diterima pemerintah.
d. Berapa pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen.
e. Gambarkan grafiknya.

Jawaban

Fd: $P = Q^2 - 13Q + 30$
Fs: $P = Q^2 + 4$
Fst: $P = Q^2 + 4 + t$

a. $D = S$
$Q^2 - 13Q + 30 = Q^2 + 4$
$-13Q = -26$
$Q = 2$

$P = Q^2 + 4$
$P = (2)^2 + 4$
$P = 8$
Jadi keseimbangan pasar sebelum pajak adalah pada saat harga jual 8 (P = 8) dan kuantitas 2 (Q = 2)

$D = S_t$
$Q^2 - 13Q + 30 = Q^2 + 4 + t$
$t = -13Q + 26$
$T = tQ$
$T = (-13Q + 26)Q$
$T = -13Q^2 + 26Q$

Pajak maksimum terjadi pada saat $T' = 0$ dan $T'' < 0$
$T' = 0$
$0 = -26Q + 26$
$Q = 1$
$T'' = -26$, karena $T'' < 0$, berarti pajak tersebut maksimum

$P = Q^2 - 13Q + 30$
$P = (1)^2 - 13(1) + 30$
$P = 18$
Jadi keseimbangan pasar setelah pajak adalah pada saat harga jual 18 (P = 18) dan kuantitas 1 (Q = 1)

b. $t = -13Q + 26$
$t = -13(1) + 26$
$t = 13$
besarnya pajak per unit adalah 13

c. $T = -13Q^2 + 26Q$
$T = -13(1)^2 + 26(1)$
$T = 13$
atau $T = tQ$
$T = 13 \times 1$
$T = 13$
Besarnya penerimaan maksimum pemerintah dari pajak adalah 13

d. Pajak yang ditanggung konsumen (P_k)

$P_k = (P_t - P_o) \times Q_t$

$P_k = (18 - 8) \times 1$

$P_k = 10$

Pajak yang ditanggung produsen (P_p)

$P_p = [\ t - (P_t - P_o)\ ] \times Q_t$

$P_p = [\ 13 - (18 - 8)\ ] \times 1$

$P_p = [\ 13 - 10\ ] \times 1$

$P_p = 3$

atau $P_p = T - P_k$

$P_p = 13 - 10$

$= 3$

e. Gambar

$P = Q^2 - 13Q + 30$

Titik potong sumbu P, Q = 0. Q = 0, P = 30 sehingga terbentuk koordinat (0 ; 30).

Titik potong sumbu Q, P = 0.

$0 = Q^2 - 13Q + 30$

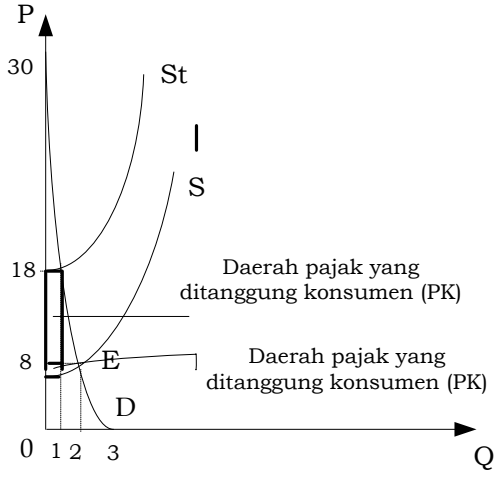
$(Q - 10)(Q - 3) = 0$

$Q_1 = 10$ dan $Q_2 = 3$

Koordinat titik potongnya (10 ; 0) dan (3 ; 0).

$P = Q^2 + 4$

P	8	5	4	5	8
Q	–2	–1	0	1	2



Gambar 8.7.

8.6. BIAYA PERSEDIAAN

Perusahaan yang beroperasi dibidang manufaktur untuk menghasilkan suatu produk tertentu akan memerlukan persediaan dalam proses produksinya. Tanpa persediaan perusahaan akan mengalami hambatan dalam proses produksinya jika kekurangan bahan baku disaat perusahaan membutuhkan, disamping itu dengan persediaan yang berlebih juga menyebabkan inefisiensi biaya persediaannnya dengan meningkatnya biaya penyimpanan dan risiko-risiko yang muncul dari penyimpanan barang tersebut. Untuk itu perusahaan harus mengukur berapa persediaan yang dibutuhkan dalam kegiatan operasinya. Seperti kita ketahui bahwa persediaan terdiri dari tiga bagian, yaitu bahan mentah (*raw material*), barang setengah jadi (*work in process*), dan barang jadi (*finished goods*).

Untuk mengetahui berapa jumlah pemesanan yang paling ekonomis, perusahaan harus memperhatikan beberapa faktor yang mempengaruhi biaya persediaan itu sendiri, yaitu:

1. Biaya pemesanan (*ordering cost*), biaya yang dikeluarkan perusahaan untuk memesan sejumlah barang tertentu. Biaya ini meliputi biaya telepon, biaya pemeriksaan, biaya pengangkutan, dan lain-lain.
2. Biaya penyimpanan (*holding cost*), biaya yang dikeluarkan perusahaan sebagai akibat adanya kelebihan barang yang dipesan dalam proses produksinya dengan demikian kelebihan tersebut disimpan perusahaan. Biaya ini meliputi biaya sewa gudang penyimpanan, biaya asuransi, biaya keamanan, dan lain-lain.

8.6.1. Economic Order Quantity

Untuk menetukan besarnya jumlah persediaan yang ekonomis diperlukan analisis perhitungan. Perusahaan memastikan berapa jumlah persediaannya dengan biaya yang ekonomis. Salah satu model yang dapat digunakan adalah menggunakan model persediaan ekonomis (*Economic Order Quantity*/EOQ). Dalam EOQ harus memenuhi asumsi-asumsi yang ada, yaitu:

1. Besarnya permintaan terhadap produk tersebut tetap,
2. interval pemesanan adalah tetap,
3. harga jual produk adalah tidak berubah,
4. seluruh kebutuhan dapat terpenuhi (tidak terjadi kekurangan barang yang dibutuhkan),
5. biaya pemesanan adalah tetap,
6. biaya penyimpanan didasarkan atas persediaan rata-rata.

Konsep dasar EOQ adalah menjumlahkan antara biaya pemesanan dan biaya penyimpanan, dimana besarnya persediaan yang dipesan menghasilkan biaya persediaan minimum. Besarnya biaya persediaan total dapat menggunakan rumus di bawah ini:

$$TC = \frac{D}{Q}(S) + \frac{Q}{2}(H)$$

Keterangan:
TC = biaya persediaan total
D = kebutuhan barang dalam satu periode
Q = jumlah yang dipesan setiap kali pesan
S = biaya pemesanan setiap kali pesan
H = biaya penyimpanan per unit per periode

Biaya pemesanan total dinyatakan dalam = $\frac{D}{Q}(S)$

Biaya penyimpanan total dinyatakan dalam $\frac{Q}{2}(H)$

Untuk mendapatkan jumlah pemesanan yang ekonomis yang menghasilkan biaya persediaan total minimum digunakan pendekatan derivatif, yaitu:

$$\frac{dTC}{dQ} = 0$$

$$\frac{d^2TC}{dQ^2} > 0$$

$$TC = \frac{D}{Q}(S) + \frac{Q}{2}(H)$$

$$TC = DSQ^{-1} + \frac{QH}{2}$$

$$0 = -\frac{DS}{Q^2} + \frac{H}{2}$$

$$\frac{DS}{Q^2} = \frac{H}{2}$$

$$Q^2 = \frac{2DS}{H}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

Turunan kedua:

$$0 = -\frac{DS}{Q^2} + \frac{H}{2}$$

$$0 = DSQ^{-2} + \frac{H}{2}$$

$$\frac{d^2TC}{dQ^2} = \frac{2DS}{Q^3}$$

Jika $Q > 0$, maka $\frac{d^2TC}{dQ^2} > 0$, dengan demikian memenuhi syarat minimum.

Dengan demikian besarnya pemesanan yang menghasilkan biaya persediaan total yang ekonomis dinyatakan dalam rumus:

$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

Rumus di atas berlaku dengan syarat biaya penyimpanan dinyatakan dalam satuan mata uang tertentu (misalnya rupiah, $, dll). Akan tetapi jika biaya penyimpanan dinyatakan dalam nilai persentase dari harga jual, maka rumus jumlah pemesanan yang ekonomis (EOQ) dinyatakan dalam:

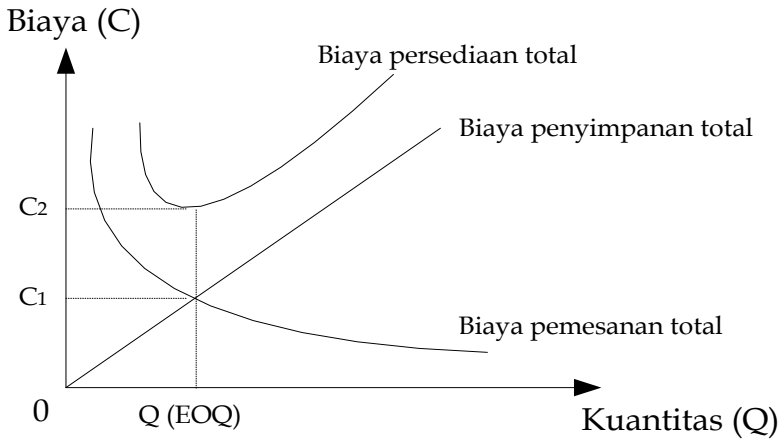
$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{HP}}$$

Dimana P adalah harga jual perusahaan.

8.6.2. Hubungan antara Biaya Persediaan, Biaya Pemesanan, dan Biaya Penyimpanan

Seperti telah diketahui bahwa biaya pemesanan merupakan biaya yang dikeluarkan perusahaan untuk memesan sejumlah barang tertentu untuk memenuhi kegiatan operasionalnya. Untuk itu besarnya biaya pemesanan berbanding terbalik (negatif) dengan jumlah barang yang dipesan, maksudnya jika jumlah yang dipesan per setiap kali pesan lebih banyak maka biaya pemesananan akan semakin murah dan sebaliknya. Sedangkan biaya penyimpanan memiliki hubungan yang berbanding lurus (positif) dengan jumlah barang yang dipesan, maksudnya jika jumlah barang yang dipesan banyak maka biaya penyimpanan

akan semakin mahal dan sebaliknya. Sedangkan biaya persediaan merupakan gabungan dari kedua biaya pemesanan dan penyimpanan.



Gambar 8.8.

Keterangan:
C_1 = besarnya biaya pemesanan total dan biaya penyimpanan total
C_2 = besarnya biaya persediaan total.

Titik pertemuan antara biaya pemesanan dan biaya penyimpanan merupakan titik pemesanan yang ekonomis atau dengan kata lain pada titik tersebut menghasilkan biaya persediaan total yang minimum. Oleh karena besarnya biaya pemesanan dan biaya penyimpanan sama, maka besarnya biaya persediaan total minimum merupakan dua kali biaya pemesanan atau dua kali biaya penyimpanan. Untuk membuktikan hal demikian dapat dilihat pada proses aljabar di bawah ini.

$$\frac{D}{Q}(S) = \frac{Q}{2}(H)$$

$$\frac{DS}{Q} = \frac{QH}{2}$$

$$2DS = Q^2H$$

$$Q^2 = \frac{2DS}{H}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

8.6.3. Titik Pemesanan Kembali (Reorder point)

Titik pemesanan kembali (ROP) merupakan suatu hari tertentu dimana perusahaan harus memesan kembali barang yang dibutuhkan (walaupun persediaan di gudang belum habis). Hal ini dikarenakan adanya waktu tunggu (*lead time*/L) sampai barang pesanan sampai. Unit sisa minimal di gudang perusahaan (sebagai dasar penetuan titik pemesanan kembali) yang harus ada mengikuti rumus di bawah ini:

$$ROP = dL$$

Keterangan:
ROP= titik pemesanan kembali
d = kebutuhan barang dalam satu hari (D/jumlah hari kerja dalam satu tahun)
L = waktu tunggu sampai barang tiba di tempat

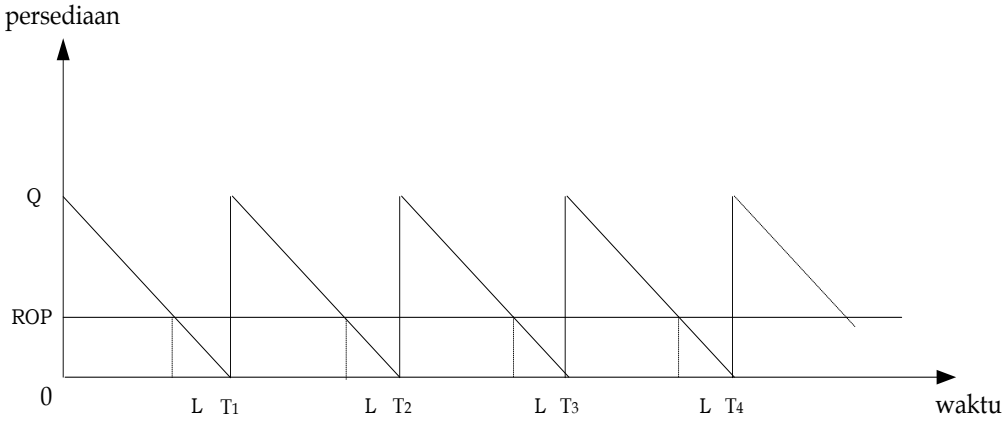
Jika perusahaan menerapakan cadangan pengaman (*safety stock*) dalam kebijakan persediaannya maka besarnya ROP menjadi:

$$ROP = dL + SS$$

Keterangan:
SS = *safety stock* (cadangan pengaman)

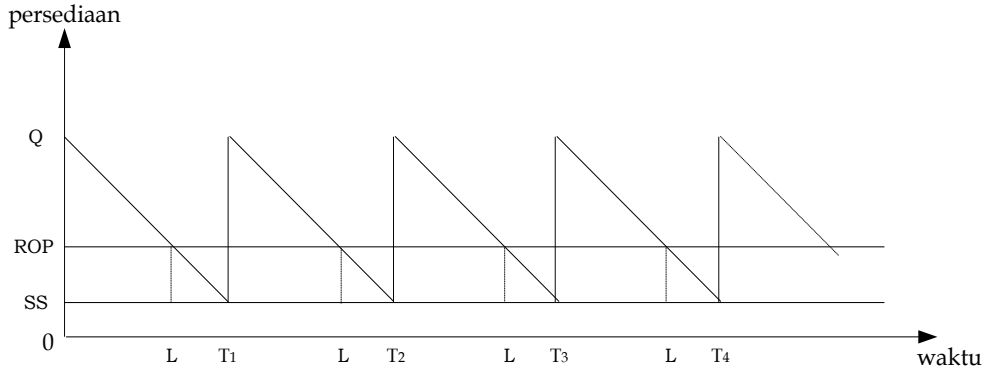
8.6.4. Hubungan antara Titik Pemesanan Kembali, Waktu Tunggu, dan Jumlah Pemesanan Ekonomis

Terdapat hubungan yang erat antara titik pemesanan kembali dengan waktu tunggu, karena waktu pemesanan kembali perusahaan tergantung dari besarnya waktu tunggu. Perusahaan harus menyediakan sejumlah unit tertentu yang akan digunakan sambil menunggu barang yang dipesan tiba.



Gambar 8.9.

Jika terdapat cadangan pengaman, maka grafiknya seperti di bawah ini:



Gambar 8.10.

Gambar di atas mencerminkan jumlah unit yang dipesan (Q), garis miring mencerminkan unit yang terpakai dan terus akan menurun seiring dengan waktu berjalan. Sampai pada titik ROP perusahaan memesan barang kembali, dan barang pesanan tiba ketika barang lama telah habis digunakan dalam proses produksi begitupula seterusnya. Jumlah segitiga di atas tergantung dari banyaknya pesanan yang dilakukan perusahaan dalam satu periode yang dapat dicari menggunakan rumus: D/Q. Untuk mengetahui berapa hari sekali pemesanan dilakukan (T1, T2, dan seterusnya) dapat dicari dengan cara membagi jumlah hari kerja dalam satu tahun dengan jumlah pemesanan. Huruf L pada sumbu horizontal tersebut mencerminkan waktu tunggu (lead time), sebagai contoh misalnya besar T1 adalah 30 dan nilai L adalah 5,maka pada hari ke-25

perusahaan harus memesan barang kembali (tidak menunggu barang habis). Jika dinyatakan dalam berbagai rumus akan tertera seperti di bawah ini:

$$N = \frac{D}{Q}$$

Keterangan:
N = jumlah atau banyaknya kali pemesanan dalam satu periode
D = kebutuhan barang dalam satu periode
Q = jumlah pemesanan yang ekonomis (EOQ)

$$T = \frac{\text{jumlah hari kerja per periode}}{N}$$

Keterangan:
T = berapa hari sekali pemesanan dilakukan
N = jumlah atau banyaknya kali pemesanan dalam satu periode

Contoh:
Toko buah DLC merencanakan memesan buah import dari Jakarta untuk dipasarkan di wilayah Cirebon dan sekitarnya. Kebutuhan buah dalam satu tahun adalah 25.000 karton. Biaya pemesanan untuk setiap kali pesan adalah Rp 1.500.000,-, sedangkan biaya penyimpanan di gudang pendingin adalah Rp 300.000,- per karton per tahun. Waktu tunggu sampai barang tiba di tempat tujuan adalah 3 hari dan jumlah hari kerja dalam satu tahun adalah 250 hari.

Pertanyaan:

a. Tentukan dan buktikan secara matematika jumlah pemesanan buah yang menghasilkan biaya persediaan minimum.
b. Berapa besarnya biaya persediaan totalnya.
c. Gambarkan grafik yang menghubungkan biaya pemesanan, biaya penyimpanan, dan biaya persediaan totalnya.
d. Tentukan titik pemesanan kembali (ROP).
e. Berapa kali pemesanan dilakukan dalam satu tahun.
f. Setiap berapa hari sekali pemesanan dilakukan.
g. Gambarkan grafik yang menghubungkan ROP, waktu tunggu, dan jumlah pemesanan yang ekonomis.

Jawaban

D = 25.000 karton per tahun
S = Rp 1.500.000,- per pesanan
H = Rp 300.000,- per karton per tahun
L = 3 hari

a. Jumlah pemesanan buah yang optimal.

$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2(25.000)(1.500.000)}{300.000}}$$

$$Q = 500 \text{ karton}$$

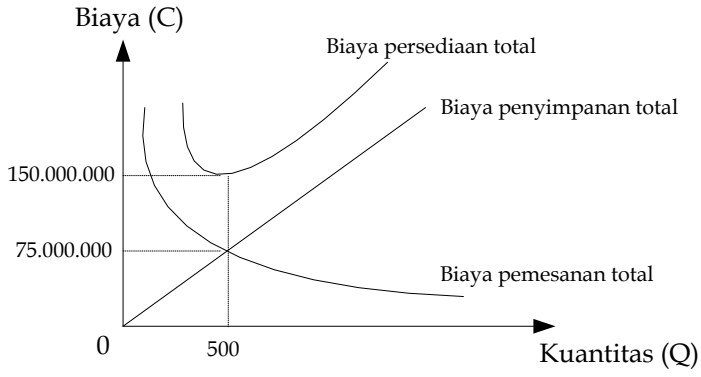
b. Besarnya biaya persediaan totalnya.

$$TC = \frac{D}{Q}(S) + \frac{Q}{2}(H)$$

$$TC = \frac{25.000}{500}(1.500.000) + \frac{500}{2}(300.000)$$

TC = Rp 75.000.000 + 75.000.000
TC = Rp 150.000.000,- per tahun

c. Grafik yang menghubungkan biaya pemesanan, biaya penyimpanan, dan biaya persediaan totalnya.



Gambar 8.11.

d. Titik pemesanan kembali (ROP).

ROP = dL
= (25.000/250).(3)
= 300 karton

e. Berapa kali pemesanan dilakukan dalam satu tahun.

$$N = \frac{D}{Q}$$

$$N = \frac{25.000}{500}$$

$$= 50 \text{ kali}$$

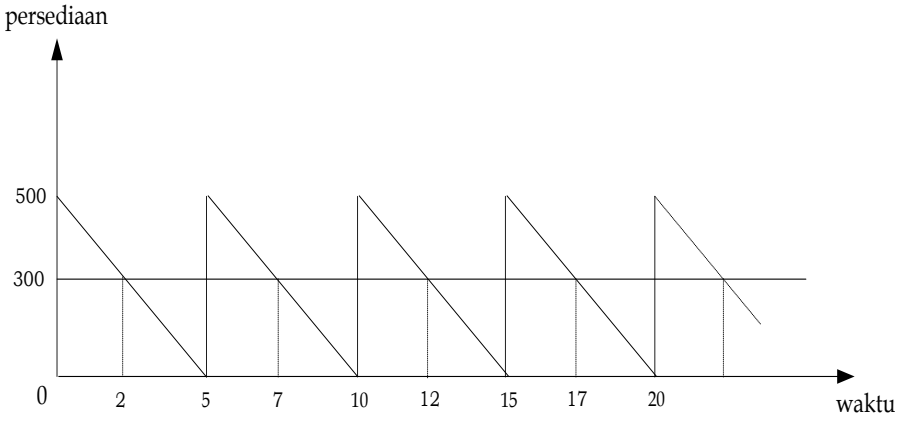
f. Setiap berapa hari sekali pemesanan dilakukan.

$$T = \frac{\text{jumlah hari ker ja per periode}}{N}$$

$$T = \frac{250}{50}$$

T = 5 hari sekali dilakukan pemesanan

g. Grafik yang menghubungkan ROP, waktu tunggu, dan jumlah pemesanan yang ekonomis



Gambar 8.12.

8.7 SOAL LATIHAN

1. Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang P = –2Q + 36, dimana P adalah harga jual dan Q adalah kuantitas yang diminta.
   Pertanyaan:
   a. Tentukan elastisitas permintaan pada saat P = 6 dan jelaskan artinya ekonominya.
   b. Tentukan elastisitas permintaan yang baru jika harga jual turun 10% dan jelaskan arti ekonominya.

2. Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang $Q = 25 - 2P - P^2$, tentukan besarnya elastisitas permintaan pada saat P = 2. Dan jelaskan arti ekonominya.
3. Apabila diketahui fungsi permintaan $Q = \frac{25}{\sqrt{P}}$, tentukan besarnya koefisien elastisitas permintaan dan jelaskan arti ekonominya.
4. Pada saat barang tersebut diberikan secara cuma-cuma, jumlah yang diminta adalah 150 unit. Jika harga menjadi USD 20, jumlah yang diminta turun menjadi 90 unit. Apabila besarnya koefisien permintaan adalah 4, berapa harga jual pada saat kondisi tersebut.
5. Jika diketahui elastisitas permintaan terjadi pada kondisi elastis-*unitary*, dengan fungsi permintaan $P = (Q - 6)^2$. Tentukan besarnya harga jual pada kondisi tersebut.
6. Apabila diketahui fungsi penawaran P = 4Q + 3, dimana P adalah harga jual dan Q adalah kuantitas yang ditawarkan. Tentukan besarnya koefisien elastisitas penawaran pada saat jumlah yang diminta 2 unit dan jelaskan arti ekonominya.
7. Pada saat harga jual berada pada Rp 8,- produsen tidak bersedia menjual produknya. Akan tetapi pada saat harga jual Rp 12,- produsen bersedia menjual sebanyak 2 unit. Tentukan besarnya koefisien elastisitas penawaran pada saat harga jual sebesar Rp 10,- dan jelaskan arti ekonominya
8. Apabila fungsi penawaran suatu barang adalah $Q = \sqrt{P - 5}$, tentukan besarnya koefisien elastisitas penawaran pada saat harga jual Rp 9,- dan jelaskan arti ekonominya.
9. Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh $Q_s = 8 + 2P^2$. Tentukan besarnya harga jual perusahaan jika terjadi persentasi perubahan yang sama antara perubahan harga dengan perubahan yang ditawarkan.
10. Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang Q + 3P = 4 dan fungsi penawaran $P = \sqrt{Q}$, tentukan besarnya koefisien elastisitas permintaan dan penawaran pada saat keseimbangan pasar.
11. Apabila diketahui pada saat terjadi keseimbangan pasar terjadi pada harga Rp 8,- dan kuantitas 2 unit. Pada saat harga jual sebesar Rp 11,- jumlah yang diminta sebesar 1 unit, sementara itu produsen menawarkan sebanyak 3,5 unit. Tentukan besarnya koefisien elastisitas permintaan dan penawaran pada saat kerseimbangan pasar dan jelaskan arti ekonominya. Tentukan besarnya koefisien elastisitas permintaan dan penawaran yang baru jika harga jual meningkat sebesar 5% dari harga keseimbangan.

12. Sebuah perusahaan menghadapi fungsi permintaan dalam $P = -2Q^2 + 11Q + 30$, sementara itu fungsi penawaran terbentuk dalam $P = Q^2 + 11Q + 3$, tentukan besarnya koefisien elastisitas permintaan dan penawaran pada saat keseimbangan pasar.
13. Apabila diketahui fungsi permintaan suatu barang $Q = \frac{25}{P^4}$, dimana Q adalah kuantitas yang diminta (dalam unit) dan P adalah harga jual (dalam USD).
    Pertanyaan:
    a. Tentukan elastisitas titik pada saat harga USD 2.
    b. Jika harga naik 5%, tentukan elastisitas busurnya.
    c. Tentukan elastisitas busur pada masing-masing harga tersebut.
14. Apabila diketahui besarnya permintaan akan menurun sebanyak 2 unit jika produsen menaikkan harga sebesar Rp 1,- dan besarnya permintaan pada saat barang diberikan secara cuma-cuma adalah 15 unit.
    Pertanyaan:
    a. Tentukan elastisitas titik pada saat harga USD 1, dan jelaskan arti ekonominya.
    b. Jika harga naik 10%, tentukan elastisitas busurnya.
    c. Tentukan elastisitas busur pada masing-masing harga tersebut.
15. Jika diketahui fungsi $TC = Q^2 - 300Q + 45.000$, tentukan total biaya minimum dan biaya rata-rata pada saat biaya total minimum.
16. Apabila diketahui fungsi biaya variabel total, $TVC = Q^3 - 8Q^2 + 25Q$. Jika diasumsikan bahwa perusahaan dalam operasinya hanya menggunakan biaya variabel (biaya tetap = 0), tentukan besarnya kuantitas agar biaya rata-rata minimu dan tentukan biaya rata-rata minimumnya.
17. Apabila diketahui fungsi biaya total, $TC = Q^3 - 15Q^2 + 72Q + 225$, maka tentukan:
    a. Fungsi biaya variabel dan biaya tetap.
    b. Besarnya kuantitas pada saat biaya marjinal minimum dan tentukan besarnya biaya marjinal minimum tersebut.
    c. Besarnya biaya rata-rata pada saat biaya marjinal minimum.
    d. Berapa tingkat produksi yang meminimumkan biaya total dan berapa biaya total minimumnya.
    e. Besarnya biaya total pada saat biaya marjinal minimum.
    f. Fungsi biaya variabel rata-rata dan biaya tetap rata-rata.
    g. Berapa besarnya biaya variabel rata-rata minimum.

18. Apabila diketahui fungsi permintaan $2Q = 14 - P$, tentukan penerimaan total maksimum dan gambarkan grafik fungsi permintaan, penerimaan marjinal, dan penerimaan total dalam satu gambar.
19. Pada saat harga jual Rp 150,- maka tidak ada permintaan dari konsumen, akan tetapi jika harga diturunkan 10%, maka terdapat permintaan sebesar 75 unit. Pertanyaan:
    a. Tentukan besarnya penerimaan total maksimum.
    b. Tentukan fungsi penerimaan marjinal dan penerimaan rata-rata.
    c. Berapa nilai penerimaan marjinal dan penerimaan rata-rata pada saat penerimaan maksimum.
    d. Gambarkan grafik penerimaan total, penerimaan marjinal, dan fungsi permintaan dalam satu gambar.
20. Jika diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $-1/3\ Q^2 + 2Q + 5 - P = 0$, maka tentukan:
    a. Fungsi penerimaan total.
    b. Nilai kuantitas untuk penerimaan maksimum dan berapa penerimaan total maksimum.
    c. Nilai penerimaan marjinal maksimum.
    d. Berapa penerimaan rata-rata pada saat penerimaan marjinal maksimum.
    e. Berapa kuantitas pada saat penerimaan rata-rata maksimum.
    f. Buktikan pada saat penerimaan maksimum, besarnya penerimaan marjinal adalah nol.
21. Misalkan fungsi permintaan suatu barang dinyatakan dalam $Q - 400 + 20P = 0$ dan besarnya biaya marjinal, $MC = 5 + \frac{Q}{25}$, tentukan besarnya kuantitas agar laba maksimum.
22. Apabila diketahui fungsi permintaan suatu barang $P = 12 - 4Q$, sementara itu fungsi biaya rata-rata $AC = Q^2 + 2Q$, tentukan besarnya kuantitas agar laba maksimum dan berapa besarnya laba maksimum tersebut. Kemudian tentukan besarnya penerimaan total maksimum dan penerimaan total pada saat laba maksimum.
23. Jika diketahui besarnya biaya tetap total seorang produsen adalah TFC = 2.000 dan fungsi biaya variabel rata-rata $AVC = Q^2 - 59Q + 1.315$. Fungsi penerimaan rata-rata adalah $AR = 1.000 - 2Q$. Tentukan berapa besarnya harga jual pada saat laba maksimum dan berapa nilai laba maksimumnya serta buktikan bahwa laba tersebut maksimum.
24. Pada saat harga jual USD 4, jumlah yang diminta sebesar 2 unit. Jika harga naik 75% maka jumlah yang diminta akan turun sebesar 50%. Dalam menghasilkan produknya perusahaan menggunakan biaya variabel (biaya

tetap dianggap tidak ada). Untuk menghasilkan produk tersebut dibutuhkan biaya variabel per unit sebesar USD 3. Jika pemerintah mengenakan pajak sebesar USD 1 per unit, tentukan besarnya laba maksimum sebelum dan sesudah pajak, berapa pajak total yang diterima pemerintah, berapa harga jual yang ditetapkan perusahaan, dan buktikan bahwa laba tersebut adalah maksimum.

25. Diketahui fungsi permintaan P= 625 – 0,5Q, dan biaya total TC = $0,07Q^3$ – $0,4Q^2$ + 16Q + 7500. Kemudian pemerintah mengenakan pajak sebesar Rp200 untuk setiap barang yang dijual.
    a. Berapa harga jual dan jumlah barang agar dapat memaksimumkan laba perusahaan.
    b. Tentukan nilai laba maksimum tersebut setelah pajak.
    c. Berapa besarnya biaya total pada saat laba maksimum, apakah pada saat kondisi tersebut menghasilkan biaya total minimum.
26. Diketahui fungsi permintaan P = 420 – 0,1Q dan biaya total TC = $0,03Q^3$ – $0,1Q^2$ + 12Q +5000. Pemerintah mengenakan pajak sebesar Rp100 per unit barang yang terjual, hitung laba maksimum sebelum dan sesudah pajak, berapa harga jualnya, dan tentukan besarnya penerimaan pada saat laba maksimum (sebelum pajak), serta berapa nilai biaya marjinal pada saat penerimaan maksimum.
27. Pada saat harga jual 216 smu maka tidak ada pembeli yang mau membeli barang tersebut. Jika diketahui besarnya koefisien fungsi permintaan adalah –3 dan besarnya biaya rata-rata AC = $0,08Q^2$ – 3Q + 70 + $\frac{200}{Q}$, disamping itu pemerintah membebankan pajak sebesar 50 smu per unit terhadap barang tersebut.

    Pertanyaan:
    a. Besarnya harga dan kuantitas pada saat laba maksimum sebelum dan sesudah pengenaan pajak.
    b. Berapa besarnya pajak total yang diterima pemerintah.
    c. Berapa persentase perbedaan laba maksimum sebelum dan setelah pajak tersebut.
28. Jika diketahui besarnya fungsi permintaan P = 150 – 0,05Q dan besarnya biaya total TC = $0,2Q^2$ – 10Q + 800. Pemerintah mengenakan pajak sebesar 30 per unit, tentukan:
    a. Besarnya harga dan kuantitas pada saat laba maksimum.
    b. Berapa besarnya pajak total yang diterima pemerintah.

c. Apakah pajak total yang diterima pemerintah telah menghasilkan pajak yang maksimum, buktikan dengan menggunakan perhitungan.
d. Berapa besarnya pajak per unit dan pajak total maksimum yang diterima pemerintah.
e. Berapa besarnya laba maksimum setelah pajak maksimum tersebut.

29. Apabila diketahui fungsi permintaan monopolis adalah TR = $12Q - 5Q^2$ dan besarnya fungsi biaya total TC = $6Q + 4Q^2$. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar t per unit. Pemerintah menginginkan pajak yang diterimanya maksimum disamping itu monopolis juga menginginkan laba yang diterimanya maksimum. Tentukan besarnya pajak per unit tersebut untuk memenuhi ketentuan di atas dan buktikan jika pajak dan laba tersebut adalah maksimum.
30. Biaya tetap total yang dikeluarkan monopolis untuk menghasilkan suatu barang adalah 7.000 satuan mata uang (smu). Biaya variabel rata-ratanya AVC = $0{,}05Q^2 - 0{,}2Q + 17$. Pada saat monopolis menetapkan harga 557 smu, konsumen tidak bersedia membeli barang tersebut. Tetapi jika harga turun menjadi 553 smu maka terdapat permintaan sebesar 20 unit. Pemerintah mengenakan pajak sebesar t per unit dan menginginkan pajak yang diterimanya maksimum, disamping itu monopolis juga menginginkan laba yang diterimanya maksimum.
    Pertanyaan:
    a. Besarnya harga dan kuantitas yang memenuhi kondisi tersebut.
    b. Berapa besarnya pajak per unit dan pajak total maksimum yang diterima pemerintah.
    c. Berapa besarnya laba maksimum setelah pajak.
    d. Buktikan bahwa pajak dan laba tersebut adalah maksimum.
31. Jika barang diberikan secara gratis, maka terdapat 20.000 unit yang diminta konsumen, dan besarnya $\frac{dQ}{dP}$ adalah –200. Untuk memproduksi barang tersebut diperlukan biaya tetap total sebesar 4.000 smu dan biaya rata-rata variabelnya $AVC = \frac{1}{50}Q + 50$. Pemerintah membebankan pajak kepada monopolis sebesar t per unit dan pemerintah menginginkan pajak yang diterimanya maksimum. Akan tetapi monopolis juga menginginkan laba yang diterimanya maksimum. Berdasarkan kondisi tersebut, tentukan:
    a. Besarnya harga dan kuantitas sebelum dan sesudah pajak.
    b. Berapa besarnya pajak per unit dan pajak total maksimum yang diterima pemerintah.
    c. Berapa besarnya laba maksimum setelah pajak.

d. Berapa selisih persentase laba maksimum sebelum dan sesudah pajak.
e. Buktikan bahwa pajak dan laba tersebut adalah maksimum.

32. Apabila diketahui fungsi permintaan dan penawaran masing-masing adalah sebagai berikut: $P = 8 - Q$ dan $P = 2 + Q$, terhadap produk tersebut dikenakan pajak sebesar t per unit dan pemerintah menginginkan pajak yang diterimanya maksimum. Pertanyaan:
    a. Tentukan besarnya pajak per unit.
    b. Berapa pendapatan maksimal pemerintah dari pajak.
    c. Gambarkan grafiknya.
33. Apabila fungsi permintaan suatu barang dinyatakan dalam $2P + Q - 14 = 0$ dan fungsi penawaran dalam $P - 0{,}75 - \frac{Q}{3} = 0$. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar t per unit, hitunglah pajak total maksimum yang diterima pemerintah dan gambarkan grafiknya.
34. Pada saat harga jual 20 smu jumlah yang diminta 7 unit sementara itu jumlah yang ditawarkan produsen adalah 2 unit. Keseimbangan pasar yang terjadi pada saat harga dan kuantitas masing-masing adalah 26 dan 4. Pemerintah mengenakan pajak sebesar t per unit terhadap barang tersebut dan pemerintah menginginkan pajak yang diterimanya maksimum.
    Pertanyaan:
    a. Keseimbangan pasar setelah pajak.
    b. Besarnya penerimaan total maksimum.
    c. Pajak per unit dan pajak total maksimum yang diterima pemerintah.
    d. Pajak yang ditanggung konsumen dan produsen.
    e. Gambarkan grafiknya.
35. Fungsi permintaan dari suatu produk adalah $Q = 20 - P$ dan fungsi penawarannya adalah $Q = \sqrt{(P-2)}$. Pemerintah mengenakan pajak sebesar t per unit terhadap barang tersebut dan pemerintah menginginkan pajak yang diterimanya maksimum. Pertanyaan:
    a. Keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak.
    b. Pajak per unit dan pajak total maksimum yang diterima pemerintah.
    c. Pajak yang ditanggung konsumen dan produsen.
    d. Gambarkan grafiknya.
36. Pada saat harga USD 17, tidak ada konsumen yang mau membeli produk tersebut. Sedangkan pada saat harga USD 2, tidak ada produsen yang mau menawarkan produknya. Apabila diketahui keseimbangan pasar terjadi pada saat harga dan kuantitas adalah 5 dan 12 dan pemerintah mengenakan pajak sebesar t per unit. Produsen menanggung pajak sebesar 1,5 per unit,

dan selisih harga sebelum dan sesudah pajak adalah 6, serta besarnya, tentukan:

a. Besar pajak per unit yang diterima pemerintah agar penerimaan pajak totalnya maksimum.
b. Penerimaan pajak total maksimum pemerintah.
c. Pajak total yang ditanggung konsumen dan produsen.
d. Apakah pada kasus di atas memberikan penerimaan pajak total pemerintah yang maksimum, buktikan dengan perhitungan.
e. Gambarkan grafiknya.

37. Jika diketahui fungsi permintaan dan penawaran masing-masing adalah sebagai berikut: $Q = \sqrt{(-0.5P+15)}$ dan $Q = \sqrt{(P-3)}$. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar t per unit. Tentukan besarnya keseimbangan pasar sebelum dan sesudah pajak dan tunjukkan daerah pajak yang ditanggung oleh produsen dan konsumen dalam grafik.
38. Fungsi permintaan dan penawaran dari suatu produk adalah $P = 24 - 3Q^2$ dan $P = Q^2 + 2Q + 4$. Pemerintah mengenakan pajak sebesar t per unit terhadap barang tersebut dan pemerintah menginginkan pajak yang diterimanya maksimum. Pertanyaan:
    a. Keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak.
    b. Pajak per unit dan pajak total maksimum yang diterima pemerintah.
    c. Pajak yang ditanggung konsumen dan produsen.
    d. Besarnya kuantitas pada saat penerimaan total maksimum .
    e. Gambarkan grafiknya.
39. Pada saat harga sebesar 32 smu, tidak ada konsumen yang mau membeli produk tersebut. Pada saat barang tersebut diberikan secara gratis, terdapat permintaan sebesar $\sqrt{8}$, dan diketahui bahwa fungsi permintaan terbentuk dari fungsi kuadrat. Apabila diketahui fungsi penawaran yang terjadi adalah $P = 2Q^2 + 8Q + 6$, dan pemerintah mengenakan tarif pajak terhadap barang tersebut sebesar t per unit. Pemerintah menginginkan pajak total yang diterimanya maksimum.

    Pertanyaan:

    a. Keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak.
    b. Pajak per unit yang diterima pemerintah.
    c. Pajak total maksimum yang diterima pemerintah.
    d. Pajak yang ditanggung konsumen dan produsen.
    e. Gambarkan grafiknya.

40. Diketahui bahwa fungsi permintaan dan penawaran merupakan fungsi yang terbentuk secara kuadrat. Pada saat harga jual 30 smu maka tidak ada konsumen yang mau membeli barang tersebut. Sementara itu pada saat harga 3 smu maka tidak ada produsen yang mau menjual barang tersebut. Pada saat harga 12 smu, jumlah barang yang diminta konsumen dan ditawarkan produsen adalah sebesar 3 unit.
    Pertanyaan:
    a. Tentukan fungsi permintaan dan penawaran dari kasus di atas.
    b. Keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak.
    c. Pajak per unit yang diterima pemerintah.
    d. Pajak total maksimum yang diterima pemerintah.
    e. Pajak yang ditanggung konsumen dan produsen.
    f. Gambarkan grafiknya.
41. PT AVE Mandiri merupakan distributor dari pakaian anak-anak berbagai usia. Baju anak tersebut diperoleh dari satu perusahaan *supplier*. Biaya pemesanan per setiap kali pesan adalah Rp 4.000,-. Jumlah permintaan dari PT AVE Mandiri per tahun adalah 2.880 unit, dan biaya penanganan dari baju tersebut Rp 100,- per unit per bulan. Lama pemesanan sampai barang tersebut sampai di perusahaan adalah 2 hari kerja.
    Pertanyaan:
    a. Tentukan berapa jumlah pemesanan untuk menghasilkan biaya persediaan minimum.
    b. Berapa besarnya biaya persediaan totalnya.
    c. Gambarkan grafik yang menghubungkan biaya pemesanan, biaya penyimpanan, dan biaya persediaan totalnya.
    d. Tentukan titik pemesanan kembali (ROP).
    e. Berapa kali pemesanan dilakukan dalam satu tahun.
    f. Setiap berapa hari sekali pemesanan dilakukan.
    g. Gambarkan grafik yang menghubungkan ROP, waktu tunggu, dan jumlah pemesanan yang ekonomis.
42. PT Sumber sejahtera merupakan perusahaan yang bergerak dalam industri terigu. Produk yang dihasilkan perusahaan untuk memenuhi kebutuhan rumah tangga. Kebutuhan terigu per bulan adalah 500 kg. Bahan baku dikirim oleh pemasok dengan harga Rp 50.000,- sedangkan biaya pesan sebesar Rp 12.000,-. Besarnya biaya penyimpanan adalah 20% dari harga beli.

Pertanyaan:

a. Tentukan berapa jumlah pemesanan untuk menghasilkan biaya persediaan minimum.
b. Berapa besarnya biaya persediaan totalnya.
c. Gambarkan grafik yang menghubungkan biaya pemesanan, biaya penyimpanan, dan biaya persediaan totalnya.
d. Tentukan titik pemesanan kembali (ROP).
e. Berapa kali pemesanan dilakukan dalam satu tahun.
f. Setiap berapa hari sekali pemesanan dilakukan.
g. Gambarkan grafik yang menghubungkan ROP, waktu tunggu, dan jumlah pemesanan yang ekonomis.

43. PT Vienna memiliki jumlah pemesanan yang ekonomis sebesar 500 unit dari jumlah kebutuhan sebesar 6.250 unit per tahun. Besarnya biaya penyimpanan per unit per tahun adalah Rp 1.000,-. Berdasarkan kondisi tersebut di atas tentukan besarnya biaya pemesanan untuk setiap kali pesan.
44. Dalam upaya menekan biaya dalam proses produksinya, PT Wijaya Kusuma memberlakukan kebijakan efisensi biaya. Kebijakan ini juga berlaku untuk biaya persediaan perusahaan. Perusahaan membutuhkan bahan baku utama sebanyak 5.000 kg per tahun, dimana untuk memenuhi kebutuhan tersebut dilakukan pesanan secara berkelanjutan. Apabila jumlah pemesanan yang paling ekonomis sebesar 250 unit dan harga bahan baku adalah Rp 20.000,- dan biaya penyimpanan dihitung berdasarkan harga bahan baku, tentukan besarnya persentasi biaya penyimpanan tersebut jika diketahui biaya pemesanan sebesar Rp 12.500,-
45. PT Jaya Mandiri memiliki kontrak untuk pengadaan bahan baku partikel kayu dari PT Senang Selalu. Bahan baku tersebut digunakan untuk menghasilkan lemari pakaian. Besarnya pesanan ekonomis yang dilakukan oleh PT Jaya Mandiri adalah 12.000 kg, sedangkan kebutuhan bahan baku perusahaan per semester adalah 300.000 kg. besarnya biaya persediaan total ekonomis perusahaan adalah Rp 36.000.000,-. Berdasarkan kasus tersebut di atas, tentukan besarnya biaya pemesanan dan biaya penyimpanan.
46. Berdasarkan pengalaman tahun-tahun sebelumnya, PT Sejahtera selalu kekurangan bahan baku dalam proses produksinya. Bapak Winata selaku manajer operasi melakukan analisis untuk hal ini agar persediaan bahan baku tetap tersedia sehingga tidak menggangu proses produksinya. Berdasarkan analisis Bapak Winata diketahui bahwa untuk pemesanan bahan baku yang ekonomis berada pada tingkat 3.000 unit. Waktu tunggu sampai barang diterima perusahaan dari pemasok adalah 3 hari, dimana

dalam satu tahun perusahaan beroperasi selama 250 hari. Jika diketahui biaya pemesanan untuk setiap kali pesan adalah Rp 22.500,- dan biaya penyimpanan per unit per tahun adalah Rp 250,-. Tentukan pada tingkat persediaan berapa unit perusahaan melakukan pemesanan kembali kepada pemasok.

47. PT ABC melakukan pemesanan bahan bakunya pada PT XYZ setiap 15 hari sekali, hal ini dilakukan secara berkesinambungan. Setiap kali pesan, perusahaan mengeluarkan biaya pesan dan biaya simpan masing-masing Rp 52.500,- untuk sekali pesan dan Rp 3.000,- per unit per tahun. Apabila jumlah pemesanan ekonomis perusahaan berada pada tingkat 700 unit, tentukan besarnya kebutuhan bahan baku perusahaan setiap tahunnya jika perusahaan beroperasi pada 300 hari kerja.
48. Berdasarkan laporan dari departemen produksi bahwa biaya persediaan total ekonomis yang dikeluarkan perusahaan untuk tahun lalu adalah Rp 36.000.000,-, untuk biaya pesan untuk setiap kali pesan adalah sebesar Rp 810.000 sedangkan biaya simpan per unit per tahun adalah Rp 4.000,-. Berdasarkan laporan dari departemen produksi tersebut di atas, tentukan besarnya tingkat kebutuhan bahan baku per tahun dan berapa jumlah pemesanan untuk setiap kali pesannya. Kemudian tentukan besarnya waktu tunggu jika diketahui jumlah hari kerja dalam satu tahun adalah 250 hari dan pada tingkat persediaan sebanyak 1.600 unit pemesanan dilakukan kembali.

Bab 9

DERIVATIF UNTUK FUNGSI LEBIH DARI SATU VARIABEL

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Membedakan diferensial parsial;
2. Membedakan diferensial total;
3. Membedakan derivatif (turunan) parsial;
4. Membedakan derivatif total;
5. Membedakan diferensial fungsi implisit.

9.1 PENDAHULUAN

Dalam kehidupan nyata, suatu variabel terikat tidak hanya dipengaruhi oleh satu variabel bebas saja, akan tetapi dapat dipengaruhi oleh beberapa variabel bebas. Pada bagian ini merupakan kelanjutan dari fungsi dengan satu variabel bebas yang telah dipelajari sebelumnya. Fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas sering kita jumpai dalam bidang ekonomi dan bisnis. Diantara variabel-variabel bebas ini ada yang saling mempengaruhi (tidak bebas) satu sama lainnya, tetapi ada pula yang tidak saling mempengaruhi (bebas) satu sama lainnya.

Pada bagian ini dibahas mengenai konsep tentang derivatif parsial, diferensiasi parsial, diferensial total, derivatif total, dan derivatif fungsi implisit untuk mengukur tingkat perubahan dari variabel terikat (*dependent variable*) yang diakibatkan oleh perubahan satu (parsial) atau keseluruhan (total) dari variabel–variabel bebas (*independents variable)*.

9.2 DERIVATIF PARSIAL

Fungsi dengan k variabel bebas diketahui sebagai berikut:

$$Z = f (X_1, X_2, \dots , X_k)$$

Dengan variabel babas X_1, X_2, sampai X_k tidak saling mempengaruhi (bebas) satu sama lainnya. Apabila variabel terikat Z berubah yang diakibatkan oleh perubahan dari salah satu variabel bebas yang sangat kecil (misalnya X_1), sedangkan variabel bebas lainnya (misalnya X_2, X_3, …, X_k) tidak berubah atau konstan, maka hal ini disebut sebagai derivatif parsial dari Z terhadap X_1. Selanjutnya, hal yang sama terjadi apabila variabel bebas X_2 yang berubah–ubah dan variabel bebas lainnya konstan, maka kita sebut derivatif parsial dari Z terhadap X_2, dan seterusnya.

Dengan demikian, derivatif parsial dapat diartikan sebagai tingkat perubahan seketika dari variabel terikat Z yang diakibatkan oleh perubahan dari salah satu variabel bebas X, dimana variabel bebas X lainnya dianggap konstan (*ceteris paribus*).

Simbol dari derivatif parsial adalah delta yaitu ∂ (pengganti huruf kecil *d*). Jadi derivatif parsial Z terhadap X_1, dapat ditulis menjadi, $\frac{\partial Z}{\partial X_1}$.

Untuk memudahkan penulisan, maka penulisan lain derivatif parsial dari suatu fungsi ($\frac{\partial Z}{\partial X_1}$) dapat dinyatakan dalam f_{x1} dan seterusnya.

$Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ derivatif parsialnya adalah $f_{x1}, f_{x2}, \ldots, f_{xk}$.

Contoh:
Carilah derivatif parsial dari fungsi: $Z = 10 X_1^2 + 5X_1X_2 + 2X_1 + 4X_2^2$

Penyelesaian:

$$Z_{x1} = f_{x1} = \frac{\partial Z}{\partial X_1} = 20X_1 + 5X_2 + 2$$

$$Z_{x2} = f_{x2} = \frac{\partial Z}{\partial X_2} = 5X_1 + 8X_2$$

Catatan:
Apabila kita mencari $\frac{\partial Z}{\partial X_1}$, maka X_2 dianggap konstan, dan sebaliknya.

9.3 DERIVATIF PARSIAL KEDUA

Derivatif parsial pertama dari suatu variabel bebas missal X_1 dapat didiferensialkan lagi terhadap X_1 dengan menganggap variabel bebas lainnya konstan, maka hasil derivatif ini disebut derivatif parsial kedua. Fungsi $Z = f(x_1,x_2)$, maka derivatif parsial pertama Z terhadap X_1 dimana X_2 konstan adalah:

$$Zx1 = \frac{\partial Z}{\partial X_1}$$

Begitu pula dengan itu derivatif parsial pertama Z terhadap X_2 dimana X_1 konstan adalah:

$$Zx2 = \frac{\partial Z}{\partial X_2}$$

Karena f_{x1} merupakan fungsi X_1, maka derivatif parsial pertama f_{x1} dapat didiferensialkan lagi terhadap X_1 dengan menganggap variabel lain X_2 konstan, sehingga hasil derivatif parsial ini disebut sebagai derivatif parsial kedua untuk X_1. Notasi derivatif parsial kedua untuk X_1 ini dapat ditunjukkan oleh:

$$f_{x1x1} = Z_{x1x1} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X_1^2}$$

Hal yang sama dapat dilakukan pada variabel bebas X_2. Notasinya adalah:

$$f_{x2x2} = Z_{x2x2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X_2^2}$$

Namun perlu diingat, bahwa Z juga merupakan fungsi dari X_2 dan Z juga merupakan fungsi dari X_1, oleh karena itu, untuk memperoleh lagi derivatif parsial kedua, yaitu, f_{x1} terhadap X_2 adalah:

$$f_{x1x2} = Z_{x1x2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X_1 \partial X_2}$$

dan untuk f_{x2} terhadap X_1 adalah :

$$f_{x2x1} = Z_{x2x1} = \frac{\partial^2 A}{\partial X_2 \partial X_1}$$

Derivatif-derivatif parsial kedua ini disebut sebagai derivatif parsial silang (campuran). Derivatif parsial silang ini mengukur tingkat perubahan derivatif parsial pertama dari variabel bebas yang satu terhadap variabel bebas lainnya.

Kedua derivatif parsial silang ini akan sama bila fungsinya adalah kontinu. Ini dikenal dengan nama dalil Young (Theorema Young).

Contoh:

Carilah derivatif kedua dari fungsi $Z = 3X_1^2 - 4X_1X_2 - 5X_2^2$

Derivatif parsial pertama adalah:

$$Z_{x1} = f_{x1} = \frac{\partial Z}{\partial X1} = 6x_1 - 4x_2$$

$$Z_{x2} = f_{x2} = \frac{\partial Z}{\partial X2} = -4x_1 - 10x_2$$

Derivatif parsial kedua adalah:

$f_{x1x1} = 6$, $f_{x2x1} = -4$,

$f_{x1x2} = -4$, $f_{x2x2} = -10$

9.4 DIFERENSIAL DAN DERIVATIF (TURUNAN)

Materi terdahulu telah dijelaskan bahwa turunan $\frac{dy}{dx}$ merupakan simbol tunggal yang menunjukkan batas (limit) dari $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ saat $\Delta X \rightarrow 0$ sebagai suatu batas $\frac{dy}{dx}$ dapat dinyatakan sebagai suatu rasio diferensial (ratio of differential) dengan dy adalah diferensial dari Y dan dx adalah diferensial dari X.

Diferensial dari Y mengukur perubahan dalam Y yang diakibatkan oleh suatu perubahan kecil dari X.

Contoh jika:

$Y = 3X^2 + 5X - 2$

Derivatif (Turunan) nya adalah:

$$\frac{dy}{dx} = 6X + 5$$

Diferensinya adalah:

$dy = (6X + 5)\, dx$

9.5 DIFERENSIASI TOTAL DAN DIFERENSIASI PARSIAL

Diferensial yang telah dibahas dalam bagian sebelumnya hanya pada konsep diferensial fungsi dengan satu variabel bebas. Dalam bagian ini pembahasannya akan diperluas lagi pada fungsi dengan dua atau lebih variabel bebas.

Misalkan suatu fungsi dengan dua variabel bebas,

$$Z = f(X_1, X_2)$$

Diferensial total dalam Z (dZ) dapat dinyatakan menjadi:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial Z}{\partial X_2} dX_2 \text{ atau } Z_{x1}\, dX_1 + Z_{x2}\, dX_2$$

dZ adalah diferensial total Z ; Z_{x1} dan Z_{x2} adalah derivatif parsial dari X_1 dan X_2. Jadi, diferensial total Z adalah penjumlahan dari hasil kali derivatif parsial Z_{x1} dengan dX_1 dan derivatif parsial Z_{x2} dengan dX_2.

Secara umum suatu fungsi yang memiliki n variabel bebas, yaitu:

$$Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

akan menghasilkan difernsial total,

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial Z}{\partial X_2} dX_2 + \ldots + \frac{\partial Z}{\partial X_n} dX_n \quad \text{atau}$$

$$dZ = Z_{x1}dX_1 + Z_{x2}dX_2 + \ldots + Z_{xn}dX_n \quad \text{atau}$$

$$dZ = \sum_{i=1}^{n} Z_i\, dX_i \quad \text{dimana } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Jadi diferensial total adalah penjumlahan dari masing–masing perubahan variabel bebas yang sangat kecil dikalikan dengan masing–masing derivatif parsial yang bersesuaian.

Seperti halnya derivatif, diferensial juga dapat memiliki diferensial parsial. Bila salah satu variabel bebas katakanlah X_1 yang berubah-ubah sedangkan variabel bebas lainnya katakanlah X_2 konstan, maka hal ini disebut sebagai *diferensial parsial*. Ini dapat dinyatakan dengan:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial X_1} dX_1 \text{ atau } dZ = Z_{x1}dX_1.$$

Contoh:

Carilah diferensial total dari fungsi $Z = 5X_1^3 - 12X_1X_2 - 6X_2^5$

Penyelesaian:

Derivatif parsial dari X_1 dan X_2 adalah:

$Z_{x1} = 15X_1^2 - 12X_2$ dan $Z_{x2} = -12X_1 - 30X_2^4$

Jadi, diferensial total-nya adalah:

$$dZ = (15X_1^2 - 12X_2)\, dX_1 - (12X_1 + 30X_2^4)\, dX_2$$

9.6 DERIVATIF TOTAL

Konsep derivatif parsial hanya dapat digunakan pada fungsi dengan dua atau lebih variabel bebas, dimana diantara variabel-variabel bebasnya tidak saling mempengaruhi satu sama lainnya. Dalam kenyataan diantara *variabel-variabel bebasnya seringkali saling mempengaruhi satu sama lainnya*. Dengan demikian, konsep derivatif parsial tidak bisa digunakan.

Untuk mengatasi hal seperti ini, tentu harus menggunakan derivatif total sebagai jawabannya, karena derivatif total membolehkan adanya perubahan dalam satu variabel bebas sementara variabel-variabel bebas lainnya saling mempengaruhi satu sama lainnya.

Apabila ada suatu fungsi dengan dua variabel bebas yaitu:

$Y = f(X,W)$, di mana $X = g(W)$

Pernyataan fungsi di atas, menyatakan bahwa variabel *Y* dipengaruhi oleh variabel *X* dan *W*, sementara variabel bebas *X* dipengaruhi oleh variabel bebas lain *W*. Jadi, variabel bebas *W* merupakan sumber perubahan utama, dimana *W* mempengaruhi variabel *Y* melalui dua saluran yaitu:

1. Secara tidak langsung melalui fungsi *g* kemudian fungsi *f*
2. Secara langsung melalui fungsi *f*.

Untuk memperoleh derivatif total, terlebih dahulu harus mendiferensiasikan *Y* secara keseluruhan, sehingga memperoleh diferensial total $dY = f_x dX + f_w dW$, kemudian, kedua sisi persamaan ini dibagi dengan diferensial dw, maka hasilnya adalah:

$$\frac{dy}{dw} = f_x \frac{dx}{dw} + f_w \frac{dw}{dw} = f_x \frac{dx}{dw} + f_w \frac{dw}{dw}$$

$\frac{dw}{dw} = 1$, maka :

$$\frac{dy}{dw} = \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{dx}{dw} + \frac{\partial Y}{\partial W}$$

Hasil derivatif ini suku pertama $\frac{\partial Y}{\partial X} \frac{dx}{dw}$ mengukur pengaruh tidak langsung (sama halnya dengan aturan rantai) dan suku kedua $\frac{\partial Y}{\partial W}$ mengukur pengaruh langsung.

Jadi, derivatif parsial menyatakan akibat langsung, sedangkan derivatif total menyatakan kedua pengaruh baik langsung maupun tidak langsung secara bersama-sama. Kesimpulannya, *derivatif total* mengukur *pengaruh langsung* dari variabel W terhadap Y ditambah dengan pengaruh tidak langsung dari W terhadap Y melalui X.

Contoh:
Carilah derivatif total dari fungsi:

$Y = f(X,W) = 5X - W^2$ dimana $X = g(W) = 3W^2 + W + 7$

Penyelesaian:
Derivatif parsial *Y* terhadap *X* dan *Y* terhadap *W* adalah:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = f_x = 5 \text{ dan } \frac{\partial Y}{\partial W} = f_w = -2W$$

Derivatif X terhadap W adalah:

$$\frac{dx}{dw} = 6W + 1$$

Jadi, derivatif total adalah:

$$\frac{dy}{dw} = f_x \frac{dx}{dw} + f_W = 5\,(6W + 1) + (-2W) = 28W + 5$$

9.7 DIFERENSIASI UNTUK FUNGSI IMPLISIT

Proses diferensiasi fungsi implisit dapat dilakukan dengan menggunakan derivatif parsial sehingga dapat dirumuskan formula umum untuk mencari derivatif parsial untuk fungsi implisit dengan berbagai variabel.

Fungsi implisit apabila dinyatakan dalam bentuk persamaan f(x,y)=0 maka:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Dan sebaliknya

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

Contoh:
$4xy^2 - x^2 + 2y = 0$, tentukan $\frac{dy}{dx}$ dengan diferensial implisit!

Penyelesaian:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y^2 - 2x$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = 8xy + 2$

Jadi $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{-(4y^2 - 2x)}{8xy + 2}$$

9.8 SOAL LATIHAN

1. Carilah f_x dan f_y dari fungsi berikut ini :
   a. $f(X,Y) = 3X^2 - 10Y^3$
   b. $f(X,Y) = 10X^2 + 2XY - 6Y^2$
   c. $f(X,Y) = 6X^2 - XY + 30Y^2$
   d. $f(X,Y) = (X^2 - 5Y)(2X + 4Y^5)$
   e. $f(X,Y) = (2X + 3)(Y-2)$
   f. $f(X,Y) = (4X + 3) / (Y-2)$
   g. $f(X,Y) = (3X - Y^2) / (X+1)$
2. Carilah derivatif parsial kedua dari fungsi-fungsi berikut ini :
   a. $f(X,Y) = 3X^2 + 5Y^2 + 10$
   b. $f(X,Y) = 5X^3 + 3XY + 3Y^2$
   c. $f(X,Y) = X^2 - 3X + 4Y^2 + 2Y$

d. $f(X,Y) = -20X^5 + 10XY + 6Y^3$

4. Carilah diferensial parsial X dan Y masing-masing dan diferensial totalnya , jika diketahui fungsi :
   a. $Z = 3X^2 + XY - 2Y^3$
   b. $U = 2X + 9XY + Y^2$
   c. $Z = \dfrac{X}{X+Y}$
   d. $U = \dfrac{2XY}{X+Y}$

5. Carilah derivatif total, jika diketahui :
   a. $Z = 2X + XY - Y^2$, dimana $X = 3Y^2$
   b. $Z = 6X^2 + 15XY + 3Y^2$, dimana $Y = 7X^2$
   c. $Z = (13X - 18Y)^2$, dimana $Y = X + 6$

Bab 10

PENERAPAN DERIVATIF PARSIAL DALAM EKONOMI

Tujuan Instruksional Khusus (TIK)

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. **Menghitung dan mengintepretasikan: Biaya marginal (*marginal cost*) dari x dan y;**
2. Menghitung dan mengintepretasikan: Permintaan marginal;
3. Menghitung dan mengintepretasikan: Elastisitas permintaan parsial;
4. Menghitung dan mengintepretasikan: Utilitas marginal;
5. Menghitung dan mengintepretasikan: Produktivitas marginal.

10.1 PENDAHULUAN

Diferensial membahas tentang tingkat perubahan suatu fungsi sehubungan dengan perubahan kecil dalam variabel bebas fungsi yang bersangkutan. Dengan diferensial dapat diketahui kedudukan-kedudukan khusus dari fungsi yang sedang dipelajari seperti titik maksimum, titik belok, titik pelana dan titik minimumnya jika ada (untuk pokok bahasan Matematika Ekonomi hanya dibahas titik maksimum atau minimum). Berdasarkan manfaat-manfaat inilah konsep diferensial menjadi salah satu alat analisis yang sangat penting dalam bisnis dan ekonomi. Analisis dalam bisnis dan ekonomi sangat akrab dengan masalah perubahan, penentuan tingkat maksimum dan tingkat minimum. Fungsi dengan satu variabel bebas dan fungsi dengan lebih dari satu variabel bebas dapat diturunkan lagi. Turunan berikut dari turunan parsial tadi sudah barang tentu bisa sangat bervariasi, tergantung dari bentuk turunan parsial tersebut. Apabila suatu turunan parsial berbentuk suatu fungsi yang tinggal mengandung satu macam variabel bebas, maka turunan berikutnya hanya ada satu macam. Konsep derivatif parsial hanya dapat digunakan pada fungsi dengan 2 atau lebih variabel bebas dengan variabel-variabel bebas itu seringkali mempengaruhi satu sama lain.

10.2 APLIKASI EKONOMI UNTUK DERIVATIF LEBIH DARI SATU VARIABEL

10.2.1 Biaya Marjinal (MC)

Biaya marginal (*marginal cost, MC*) adalah tambahan biaya yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk. Secara matematik, fungsi biaya marginal merupakan derivatif pertama dari fungsi biaya total. Jika fungsi biaya total dinyatakan dengan C=*f*(Q) di mana C adalah biaya total dan Q melambangkan jumlah produk, maka biaya marginalnya:

$$MC = C' = \frac{dc}{dq}$$

Contoh 1:
Apabila diketahui fungsi biaya total untuk menghasilkan sebuah produk adalah TC = $Q^3 - 2Q^2 + 5Q + 4$, maka berapa biaya marginalnya jika diketahui Q=2!

Penyelesaian:
MC = $TC^1 = 3Q^2 - 4Q + 5$
MC = $3(2)^2 - 4(2) + 5 = 9$

Contoh 2:
Jika fungsi biaya untuk menghasilkan dua macam produk (x,y) yang dinyatakan dalam C= f (Qx , Qy) adalah TC = $30 + 2Q_x^2 + Q_xQ_y + 3Q_y^2$, tentukan berapa biaya marginalnya jika diketahui Qx=2 dan Qy=3!
Penyelesaian:
TC = $30 + 2Q_x^2 + Q_xQ_y + 3Q_y^2$, maka

$$MC = \frac{dTC}{dQx} = 4Qx + Qy \rightarrow 4(2) + 3 = 11$$

$$MC = \frac{dTC}{dQy} = Qx + 6Qy \rightarrow 2 + 6(3) = 20$$

10.2.2 Permintaan Marginal dan Elastisitas Permintaan Parsial

10.2.2.1 Permintaan Marginal

Misalkan fungsi permintaan untuk menghasilkan 2 buah barang dinyatakan dalam Qx= f(Px,Py) dan Qy= g(Px,Py) maka derivatif parsial dari fungsi tersebut dinamakan permintaan marginal.

Derivatif parsial dari fungsi-fungsi tersebut ada 4 macam:

1) $\frac{\partial Qx}{\partial Px}$

2) $\frac{\partial Qx}{\partial Py}$

3) $\frac{\partial Qy}{\partial Px}$

4) $\frac{\partial Qy}{\partial Py}$

Apabila $\frac{\partial Qx}{\partial Py}$ *dan* $\frac{\partial Qy}{\partial Px}$ lebih kecil dari 0 maka sifat kedua barang itu adalah komplemen.

Sebaliknya jika lebih besar dari 0 maka sifat kedua barang itu adalah **substitusi.**

Contoh 1: Tentukan permintaan marginal dan jelaskan sifatnya dari soal berikut ini:

$Qx = 4 - 3Px - Py$

$Qy = 3 - Px - 3Py$

Penyelesaian:

$\frac{\partial Qx}{\partial Py} = -1$

$\frac{\partial Qy}{\partial Px} = -1$

Karena $\frac{\partial Qx}{\partial Py}$ *dan* $\frac{\partial Qy}{\partial Px}$ lebih kecil dari 0 maka sifat kedua barang itu adalah komplemen.

Contoh 2:

Tentukan permintaan marginal dan jelaskan sifatnya dari soal berikut ini:

$Qx = 20 - 2Px + 4Py$

$Qy = 10 + 5Px - 3Py$

Penyelesaian:

$\frac{\partial Ox}{\partial Py} = 4$

$\frac{\partial Qy}{\partial Px} = 5$

Karena $\frac{\partial Qx}{\partial Py}$ dan $\frac{\partial Qy}{\partial Px}$ lebih besar dari 0 maka sifat kedua barang itu adalah substitusi.

10.2.2.2 Elastisitas Permintaan Parsial

Misalkan terdapat dua macam produk yang saling berhubungan dan dinyatakan dalam fungsi Qx= f (Px,Py) dan Qy= g (Px,Py) maka elastisitas permintaan parsialnya merupakan hasil dari derivatif parsial yang telah dikalikan dengan $\frac{P}{Q}$.

Ada 4 macam kriteria elastisitas:

$$E(Qx, Px/Py = k) = \frac{\partial Qx}{\partial Px}.\frac{Px}{Qx}$$
$$E(Qx, Py/Px = k) = \frac{\partial Qx}{\partial Py}.\frac{Py}{Qx}$$
$$E(Qy, Px/Py = k) = \frac{\partial Qy}{\partial Py}.\frac{Px}{Qy}$$
$$E(Qy, Py/Px = k) = \frac{\partial Qy}{\partial Py}.\frac{Py}{Qy}$$

Apabila E(Qx,Py) dan E(Qy,Px) lebih besar dari 0 maka hubungan kedua barang itu ***substitusi*** dan apabila E(Qx,Py) dan E(Qy,Px) lebih kecil dari 0 maka hubungan keduanya adalah ***komplementer***

Contoh 1:

Hitunglah Elastisitas Permintaan Parsial dari soal berikut dan tentukan sifatnya:

$Qx = Px^{-2}Py^{0,7}$

$Qy = Px^{2}Py^{-3}$

Penyelesaian:

$$E(Qx, Px/Py = k) = \frac{\partial Qx}{\partial Px}.\frac{Px}{Qx} = -2Px^{-3}Py^{0,7}\frac{Px}{Px^{-2}Py^{0,7}} = -2$$
$$E(Qx, Py/Px = k) = \frac{\partial Qx}{\partial Py}.\frac{Py}{Qx} = 0,7Py^{-0,3}Px^{-2}\frac{Py}{Px^{-2}Py^{0,7}} = 0,7$$
$$E(Qy, Px/Py = k) = \frac{\partial Qy}{\partial Px}.\frac{Px}{Qy} = 2PxPy^{-3}\frac{Px}{Px^{2}Py^{-3}} = 2$$
$$E(Qy, Py/Px = k) = \frac{\partial Qy}{\partial Py}.\frac{Py}{Qy} = -3Py^{-4}Px^{2}\frac{Py}{Px^{2}Py^{-3}} = -3$$

Karena E(Qx,Py) dan E(Qy,Px) lebih besar dari 0 maka barang tersebut adalah barang ***substitusi.***

Contoh2:
Hitunglah Elastisitas Permintaan Parsial dari soal berikut dan tentukan sifatnya:

$Qx = Px^{-2}Py^{0,7}$

$Qy = Px^{2}Py^{-3}$

Penyelesaian:

$$E(Qx, Px/Py = k) = \frac{\partial Qx}{\partial Px}.\frac{Px}{Py} = 1P^{0}xPy^{-0,5}\frac{Px}{Px^{1}Py^{-0,5}} = 1$$

$$E(Qx, Py/Px = k) = \frac{\partial Qx}{\partial Py}.\frac{Py}{Px} = -0,5Px^{1}Py^{-1,5}\frac{Py}{Px^{1}Py^{-0,5}} = -0,5$$

$$E(Qy, Px/Py = k) = \frac{\partial Qy}{\partial Px}.\frac{Px}{Qy} = -3Px^{-4}Py^{0,5}\frac{Px}{Px^{-3}Py^{0,5}} = -3$$

$$E(Qy, Py/Px = k) = \frac{\partial Qy}{\partial Py}.\frac{Py}{Qy} = 0,5Px^{-3}Py^{-0,5}\frac{Py}{Px^{-3}Py^{0,5}} = 0,5$$

Karena E(Qx,Py) dan E(Qy,Px) lebih kecil dari 0 maka barang tersebut adalah barang ***komplementer.***

10.2.3 Produktivitas Marginal (MP)

Produk marginal adalah produk tambahan yang dihasilkan dari satu unit tambahan faktor produksi yang digunakan. Secara matematik, fungsi produk marginal merupakan derivatif pertama dari fungsi produk total. Jika fungsi produk total dinyatakan dengan Q=f(K,L) dimana Q melambangkan jumlah produk total, K dan L merupakan input (jumlah masukan), maka produktivitas marginalnya:

$$MP_K = Q^{l} = \frac{dQ}{dK} \quad dan \quad MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$$

Contoh:
Diketahui $Q = K^{1/3}L^{2/3}$ tentukan fungsi produktivitas marginalnya terhadap K dan L serta tentukan berapa nilai produktivitas marginalnya apabila K=2 dan L=3!

Penyelesaian:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{3} K^{-2/3} L^{2/3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{2}{3} K^{1/3} L^{-1/3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 1/3(2)^{-2/3}(3)^{2/3} = 0{,}4368$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 2/3(2)^{-1/3}(3)^{1/3} = 0{,}7631$$

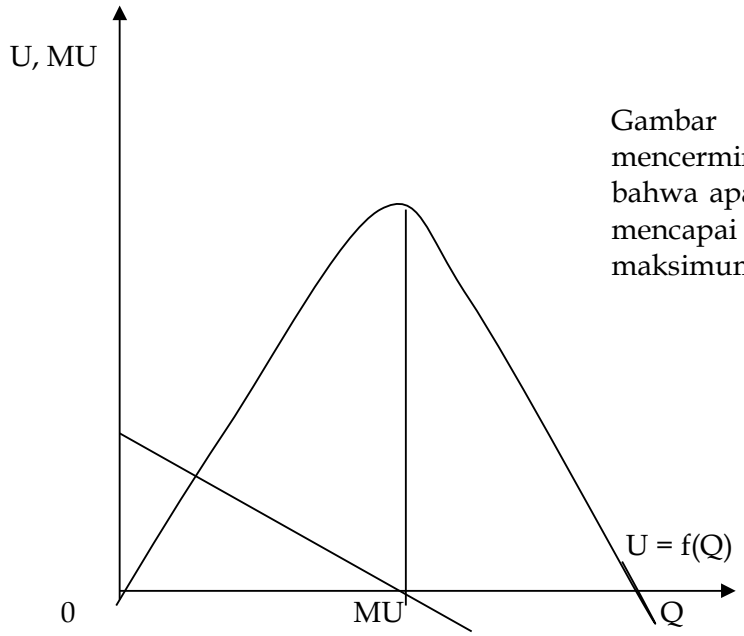
10.2.4 Utilitas Marginal (MU)

Utilitas marginal ialah utilitas tambahan yang diperoleh konsumen berkenaan satu unit tambahan barang yang dikonsumsinya. Secara matematik, fungsi utilitas marginal merupakan derivatif pertama dari fungsi utilitas total. Jka fungsi utilitas total dinyatakan dengan U=f(X,Y) dimana U melambangkan utilitas total dan X,Y adalah jumlah barang yang dikonsumsi, maka utilitas marginalnya:

$$MU_X = U^1 = \frac{\partial U}{\partial X}$$

$$MU_Y = U^1 = \frac{\partial U}{\partial Y}$$

Hubungan antara utilitas dengan utilitas marjinal dicerminkan seperti gambar di bawah ini:



Gambar di samping ini mencerminkan bahwa apabila MU = 0 akan mencapai utilitas yang maksimum.

Contoh:
Hitunglah Utilitas Marginal (MU) dari $U = 16X + 26Y - Y^2 - X^2$ dan tentukan berapa utilitas marjinalnya pada saat X = 1 dan Y = 2.

Penyelesaian:

$$MU_X = U^1 = \frac{\partial U}{\partial X} = 16 - 2X$$

$$MU_Y = U^1 = \frac{\partial U}{\partial Y} = 26 - 2Y$$

X = 1, maka $MU_X = 16 - 2(1) = 14$
Y = 2, maka $MU_Y = 26 - 2(2) = 22$

10.3 SOAL LATIHAN

1. Diketahui pasangan fungsi permintaan. Tentukanlah fungsi permintaan marginal, sifat hubungan diantara dua barang dan elastisitas permintaan pasar.
   a. $Q_x = 20 - 2P_x - P_y$ dan $Q_y = 9 - P_x - 2P_y$
   b. $Q_x = 15 - 2P_x + P_y$ dan $Q_y = 16 + P_x - P_y$
   c. $Q_x = 5 - 2P_x + P_y$ dan $Q_y = 8 - 2P_x - 3P_y$

d. $Q_x = \frac{P_y}{P_x^2 P_y}$ dan $Q_y = \frac{P_x^2}{P_x P_y^2}$

e. $Q_x = \frac{4}{P_x P_y^2}$ dan $Q_y = \frac{16}{P_x P_y^2}$

f. $Q_x = \frac{4}{P_x P_y}$ dan $Q_y = \frac{16}{P_x P_y}$

2. Barang A mempunyai fungsi permintaan sbb:
   Qa = 100 –Pa + 0,75 Pb – 0,25 Pc + 0,0075 Y
   Jika: Pa = 10, Pb = 20, Pc = 40, dan Y = 10.000
   Maka:
   a. Carilah jumlah barang A pada kondisi tersebut!
   b. Carilah elastisitas parsial dari masing-masing variabel yang mempengaruhinya, tentukan jenis elastisitasnya, dan berikan arti ekonominya!
   c. Jika pendapatan naik 20%, maka berapa persen perubahan jumlah barang yang diminta?
3. Untuk setiap fungsi produksi *Q = f(K,L)* berikut ini carilah produktivitas marginal terhadap *K* dan *L*.
   a. $Q = 0{,}03K^3 – 0{,}4KL + 0{,}6L^{1/2}$ pada K = 8 dan L = 4
   b. $Q = 0{,}4K^2L + 0{,}2L^3 – 0{,}3KL^{-2} + 4K^2$ pada K = 5 dan L = 4
   c. $Q = 5KL - 2K^2 - 2L^2$ pada K = 1 dan L = 1
   d. $Q = 3K^3 + 5KL^2 + L^3$ pada K = 2 dan L = 3
   e. $Q = 3K^2 + 4KL + 15L^3$ pada K = 3 dan L = 2
   f. $Q = 4K^3 + K^2L – 3KL^2 – 7L^3$ pada K = 1 dan L = 2
4. Jika fungsi biaya untuk menghasilkan dua macam produk (x,y) dinyatakan dalam C= f (Qx , Qy) adalah $TC = 3Qx^2 + 7 Qx + 1{,}5 QxQy + 2Qy^2$,tentukan berapa biaya marginalnya jika diketahui Qx=5 dan Qy=3 !
5. Hitunglah Utilitas Marginal (MU) dari U = XY + 3X + Y dan tentukan berapa utilitas marjinalnya pada saat X = 15 dan Y = 10.

Bab 11 MAKSIMUM DAN MINIMUM SUATU FUNGSI DENGAN VARIABEL BEBAS LEBIH DARI SATU

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Menghitung nilai maksimum dan minimum dari fungsi lebih dari satu variabel (tanpa kendala maupun dengan kendala);
2. Menghitung nilai maksimum dan minimum dengan metode Lagrange dan metode KuhnTucker.

11.1 MAKSIMUM DAN MINIMUM FUNGSI TANPA KENDALA

Nilai-nilai optimum (maksimum dan minimum) dari sebuah fungsi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas dapat dicari dengan menggunakan turunannya (turunan pertama dan keduanya).

Misalkan, untuk Z = f(x,y), maka y akan mencapai titik optimum/ekstrim/kritis/stasioner apabila turunan pertamanya sama dengan nol.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y = 0$$

Pencarian kriteria (jenis) suatu fungsi dilakukan dengan menggunakan pendekatan determinan Hessian (|H|) agar konsisten dengan simbol materi sebelumnya Z = f(x,y).

$$|H2| = \begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fzy & fyy \end{vmatrix} = [(fxx)(fyy) - (fzy)(fxy)]$$

1. Jika nilai |H2| > 0, maka terdapat dua kemungkinan, yaitu:
   a. Jika f_{xx} dan f_{yy} semua negatif, titik kritis adalah titik maksimum
   b. Jika f_{xx} dan f_{zz} semua positif, titik kritis adalah titik minimum
2. Jika |H2| < 0, maka dua kemungkinan, yaitu:
   a. Jika f_{xx} dan f_{yy} semua bertanda sama (positif semua atau negative semua), maka titik kritis adalah titik belok
   b. Jika f_{xx} dan f_{yy} berbeda tanda, maka titik kritisnya adalah titik pelana (*saddle point*)
3. Jika |H2| = 0, maka pengujian gagal dan memerlukan penyelidikan lebih lanjut.

Syarat di atas adalah syarat yang diperlukan agar suatu fungsi dapat mencapai titik ekstrim (maksimum/minimum).

Untuk mengetahui apakah fungsi tersebut adalah fungsi maksimum atau minimum dapat dilihat dari:

Maksimum bila: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} < 0$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} < 0$

Minimum bila : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} > 0$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} > 0$

Contoh:

Diketahui fungsi $Z = f(X,Y) = 60X + 34Y - 4XY - 6X^2 - 3Y^2 + 5$

a. Carilah nilai–nilai kritis!
b. Tentukan kriteria (jenis) titik kritis tersebut!
c. Hitunglah titik kritis dari fungsi tersebut!

Penyelesaian:

Carilah derivatif parsial pertama dari masing-masing variabel bebas, kemudian disamakan dengan nol.

$f_x = 60 - 4Y - 12X = 0$

$f_y = 34 - 4X - 6Y = 0$

Dari kedua persamaan di atas dapat diperoleh nilai X dan Y.

$60 - 4Y - 12X = 0 \rightarrow 4Y + 12 = 60$ (×1)

$34 - 4X - 6Y = 0 \rightarrow 6Y + 4X = 34$ (×3)

$4Y + 12X = 60$
$18Y + 12X = 102$ –
$-14Y + 0 = -42$
$Y = 3$

Subsitusikan Y kedalam persamaan untuk memperoleh nilai *X*.
$4(3) + 12X = 60$
$12X = 60 - 12$
$12X = 48$
$X = 4$

Dengan demikian, titik ekstrem dari fungsi adalah X = 4 dan Y = 3. Kemudian cari nilai determinan untuk menetukan apakah fungsi tersebut maksimum/minimum.

$f_{xx} = -12$; $f_{yy} = -6$; $f_{xy} = -4$; $f_{yx} = -4$

$$|H2| = \begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = (-12)(-6) - (-4)(-4) = 56 > 0$$

$f_{xx} < 0$, $f_{yy} < 0$, dan $|H2| > 0$ maka titik kritis adalah *maksimum.*

Jadi, nilai maksimum adalah:
$Z_{maks} = 60(4) + 34(3) - 4(4)(3) - 6(4)^2 - 3(3)^2 + 5$
$= 176$

11.2 MAKSIMUM DAN MINIMUM FUNGSI DENGAN KENDALA

11.2.1 Multiplier Lagrange (Pengganda Lagrange)

Penghitungan nilai ekstrim dari sebuah fungsi yang menghadapi kendala yaitu fungsi lain yang berupa persamaan, dapat diselesaikan dengan Metode Lagrange, yaitu dengan membentuk sebuah fungsi baru yang disebut fungsi Lagrange.

Fungsi Lagrange ini merupakan penjumlahan dari fungsi tujuan dengan fungsi kendala, dimana fungsi kendala tersebut telah dikalikan dengan pengganda Lagrange (l).

Misalkan fungsi yang hendak dioptimumkan: z = f(x,y)
Fungsi kendala: g(x,y) = C
Maka fungsi Lagrange-nya:

$$F(x,y,l) = f(x,y) + l(c - g(x,y))$$

Pengganda Lagrange (l) adalah suatu variabel tak tentu yang bersifat sebagai pembantu.

Nilai ekstrim dari fungsi tersebut dapat dicari dengan membuat turunan pertamanya sama dengan nol:

$F_x(x,y,l) = f_x + lg_x = 0$
$F_y(x,y,l) = f_y + lg_y = 0$

Untuk mengetahui apakah fungsi tersebut maksimum atau minimum dapat dicari melalui determinan Hessian berkendala $|\Pi|$, akan dijelaskan pada materi matrik optimasi berkendala pengujian dengan determinan Hessian berkendala $|\Pi_n|$.

Contoh:
Carilah nilai maksimum atau minimum dari fungsi,
$Z = 26X + 12Y - 3X^2 + 5XY - 6Y^2$
Dengan kendala $3X + Y = 170$

Penyelesaian:
Langkah pertama adalah membuat fungsi Lagrange, dengan fungsi kendala diubah terlebih dahulu menjadi 170-3X-Y=0
$Z(X, Y, l) = 26X + 12Y - 3X^2 + 5XY - 6Y^2 + \lambda (170 - 3X - Y)$

Untuk mencari persamaan nilai stasioner Z, syarat yang perlu adalah derivatif parsial pertama disamakan dengan nol,

$Z_x =$ $26 - 6X + 5Y - 3\lambda$ $= 0$ .....(1)
$Z_y =$ $5X - 12Y + 12 - \lambda$ $= 0$ .....(2)
$Z\lambda =$ $170 - 3X - Y$ $= 0$ .....(3)

Langkah kedua, hilangkan l dengan cara mengalikan dengan 3 pada persamaan (2)

$26 - 6X + 5Y - 3\lambda = 0$
$36 + 15X - 36Y - 3\lambda = 0$
$-10 - 21X + 41Y = 0$ .....(4)

Langkah ketiga, cari nilai X atau Y dengan cara mengeliminir salah satu dari variabel tersebut (persamaan 3 dan 4)

$$\begin{array}{rl} -21X + 41Y & = 10 \\ 21X + 7Y & = 1190 \\ \hline 48Y & = 1200 \\ Y & = 25 \end{array}$$

Lakukan substitusi nilai Y pada persamaan (3)

Karena, $3X + Y = 170$, maka

$$3X + 25 = 170$$
$$3X = 145$$
$$X = 48\frac{1}{3}$$

Nilai λ dapat diperoleh dengan mensubsitusikan nilai $X = 48\frac{1}{3}$ dan $Y = 25$ kedalam persamaan sehingga hasilnya adalah,

$$26 - 6(48{,}33) + 5(25) - 3\lambda = 0$$
$$3\lambda = 26 - 290 + 125$$
$$3\lambda = -139$$
$$\lambda = -46\frac{1}{3}$$

artinya, apabila fungsi kendala berubah sebesar 1 unit maka fungsi *Z* berubah sebesar kurang lebih $46\frac{1}{3}$ unit.

Untuk memperoleh nilai *Z* subsitusikan nilai *X*, *Y* dan λ ke dalam fungsi tujuan semula atau pada fungsi Lagrangian,

$$Z = 26(48\tfrac{1}{3}) - 12(25) - 3(48\tfrac{1}{3})^2 + 5(25)(48\tfrac{1}{3}) + 6(25)^2$$
$$= -3160$$

Untuk menentukan apakah nilai *Z* ini maksimum atau minimum, maka kita harus mencari derivatif parsial kedua dan derivatif parsial silang berikut ini,

$Z_{xx} = -6$; $Z_{yy} = -12$

$Z_{xy} = 5$; $Z_{yx} = 5$

$$D = \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -12 \end{vmatrix} = (-6)(-12) - (5)(5) = 47 > 0 \text{ (ada maks/min)}$$

Karena $D>0$ dan $Z_{xx}<0$; $Z_{yy}<0$, berarti $Z_{maks} = -3160$

11.2.2 Kondisi Kuhn-Tucker

Penghitungan nilai optimum dari sebuah fungsi yang menghadapi kendala yaitu fungsi lain yang berupa pertidaksamaan dapat dilakukan dengan metode Kuhn-Tucker. Bentuknya biasanya berupa:

Memaksimumkan fungsi tujuan f(x,y) dengan kendala g(x,y) £ 0

Atau

Meminimumkan fungsi tujuan f(x,y) dengan kendala g(x,y) ³ 0

Penyelesaian dari permasalahan di atas dapat dilakukan dengan metode Lagrange yang dimodifikasi.

Pengerjaannya kondisi ini adalah dengan menganggap fungsi kendala (pertidaksamaan) sebagai sebuah persamaan. Kemudian selesaikan fungsi dengan metode *Lagrange* hingga diperoleh nilai optimum yang dicari. Kemudian lakukan pengujian terhadap nilai l. Jika nilai l > 0 berarti nilai optimum yang diperoleh (berdasarkan fungsi kendala yang sudah dimodifikasi) juga merupakan nilai optimum dari fungsi kendala yang berbentuk pertidaksamaan (fungsi kendalanya bersifat mengikat). Jika nilai l £ 0 berarti optimisasi fungsi tujuan tanpa fungsi kendala sudah dengan sendirinya akan memenuhi kendalanya (fungsi kendalanya bersifat tidak mengikat, sehingga dapat diabaikan).

Contoh 1:

Hitung nilai ekstrim dari fungsi $f(x,y) = 12xy - 3y^2 - x^2$
dengan batasan x + y £ 16!

Penyelesaian:

Penerapan kondisi Langrange yang telah dimodifikasi:
$f(x,y) = 12xy - 3y^2 - x^2$
dengan batasan x + y £ 16, diubah menjadi x + y = 16
sehingga $f(x,y,l) = 12xy - 3y^2 - x^2 + l(16-x-y)$

$fx = 12y - 2x - l = 0$
$fy = 12x - 6y - l = 0$
$fl = 16 - x - y = 0$

Dari hasil eliminasi/substitusi diperoleh nilai x= 9 dan y=7. Sementara itu besarnya nilai l = 66. Karena nilai l>0, maka kondisi di atas dapat dipecahkan dengan menggunakan pendekatan lagrange. Dengan demikian nilai ekstrim diperoleh sebesar x=9 dan y=7.

Contoh 2: (diambil dari contoh soal sebelumnya)

Carilah nilai ekstrim dari fungsi,
$Z = 26X + 12Y - 3X^2 + 5XY - 6Y^2$
Dengan kendala 3X + Y £ 170

Penyelesaian soal ini telah dilakukan sebelumnya, diperoleh X= $48\frac{1}{3}$, Y= 25, dan λ= $-46\frac{1}{3}$. Karena λ<0, berarti berarti optimisasi fungsi tujuan tanpa fungsi kendala sudah dengan sendirinya akan memenuhi kendalanya. Dengan demikian,

$Zx = 26 - 6X + 5Y = 0$

$Zy = 12 + 5X - 12Y = 0$

Perhitungan dapat dilakukan dengan eliminasi/substitusi. Dari hasil eliminasi/substitusi didapatkan X= 300/47 dan Y= 172/47.

11.3 SOAL LATIHAN

Untuk setiap fungsi dibawah ini, carilah:

1. Titik kritis
2. Apakah fungsi minimum, maksimum, atau titik belok, atau titik pelana
3. Nilai optimum dari fungsi tersebut

a. $f(X,Y) = 395X - 20X^2 - Y^2 + XY$
b. $f(X,Y) = 40X + 20Y - 4X^2 - Y^2$
c. $f(X,Y) = 16X + 30Y - X^2 - 3Y^2 - XY$
d. $f(X,Y) = 2X^2 - 2XY + Y^2 + 5X - 3Y$
e. $f(X,Y) = 3 + 2X + 2Y - 2X^2 - 2XY - Y^2$
f. $f(X,Y) = X^2 + XY + Y^2 - 6X + 2$
g. $f(X,Y) = 4X + 2Y - X^2 + XY - Y^2$
h. $f(X,Y) = X^2 + Y^2 - 2X + 4Y + 6$
i. $f(X,Y) = X^2 - 2XY + 2Y^2 - 2X + 2Y + 1$

Untuk setiap fungsi dengan kendala (Lagrange atau Kuhn Tucker) tentukan:

1. Fungsi Lagrange atau Kuhn Tucker
2. Nilai optimum dari X dan Y
3. Apakah fungsi tersebut maksimum/minimum

a. $Z = -3X^2 - 4Y^2 - 3X + 2Y + 60$ dengan kendala $X+Y \leq 60$
b. $Z = 2X^2 + Y^2 - 4X - 2Y + 80$ dengan kendala $X+Y \geq 5$
c. $Z = 6X + 4Y - X^2 + 3Y^2 + 120$ dengan kendala $X+Y=100$
d. $Z = 3X^2 + 4Y^2 + 2XY$ dengan kendala $X+Y=25$

e. $Z = 16X + 14Y - X^2Y^2$ dengan kendala $X+Y=23$
f. $Z = 10X + 20Y - X^2 - 2Y^2$ dengan kendala $3X+Y=20$
g. $Z = 2XY - X^2 - 2Y^2 + 100$ dengan kendala $X+2Y=20$
h. Carilah nilai λ pada soal no.n dan interpretasikan hasilnya.
i. Carilah nilai λ pada soal no.o dan interpretasikan hasilnya.
j. Carilah nilai λ pada soal no.p dan interpretasikan hasilnya.

Bab 12 PENERAPAN MAKSIMUM DAN MINIMUM DALAM EKONOMI

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Menghitung biaya minimum;
2. Menghitung laba maksimum;
3. Menghitung optimasi fungsi utilitas;
4. Menghitung optimasi fungsi produk.

12.1 BIAYA

Selain pengertian biaya tetap, biaya variabel, dan biaya total, dalam konsep biaya dikenal pula pengertian biaya rata-rata (*average cost*), dan biaya marginal (*marginal cost*). Biaya rata-rata ialah biaya yang dikeluarkan untuk menghasilkan tiap unit produk atau keluaran, merupakan hasil bagi biaya total terhadap jumlah keluaran yang dihasilkan. Biaya marginal ialah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk. Seperti telah kita ketahui konsep biaya dapat dicari seperti di bawah ini.

Biaya tetap : TFC

Biaya variabel : TVC

Biaya total : $TC = TFC + TVC$

Biaya tetap rata-rata : $AFC = \frac{TFC}{Q}$

Biaya variabel rata-rata : $AVC = \frac{TVC}{Q}$

Biaya rata-rata : $AC = AFC + AVC = \frac{TC}{Q}$

Biaya marginal : $MC = TC' = \frac{\partial TC}{\partial Q}$

Apabila sebuah perusahaan menghasilkan dua macam output, dan biaya yang dikeluarkannya untuk memproduksi kedua macam produk itu merupakan biaya produksi gabungan (*joint production cost*), penghitungan biaya total minimum yang dikeluarkan perusahaan dapat diselesaikan dengan pendekatan diferensiasi parsial. Pendekatan ini dapat juga digunakan untuk menganalisis kasus perusahaan yang menghasilkan lebih dari dua macam produk yang biaya produksinya juga merupakan biaya produksi gabungan.

Andaikan sebuah perusahaan memproduksi dua macam barang, A dan B, dan biaya produksinya dinyatakan dalam TC = $f(Q_a,Q_b)$, maka biaya total minimum dinyatakan dalam:

$$\frac{\partial TC}{\partial Q_a} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial TC}{\partial Q_b} = 0$$

Untuk mengetahui apakah fungsi tersebut adalah fungsi minimum maka dilakukan pendekatan turunan kedua dan kemudian dilakukan pendekatan determinan.

$$\text{Minimum bila : } \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_a^{\,2}} > 0 \text{ dan } \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_b^{\,2}} > 0$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_a^{\,2}} & \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_a Q_b} \\ \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_b Q_a} & \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_b^{\,2}} \end{vmatrix}$$

Untuk mencapai biaya total minimum maka D harus lebih besar dari nol

Contoh 1:

Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan yang memproduksi 1 jenis barang , ditunjukkan oleh persamaan TC = $5Q^2 - 1000Q + 85000$. Tentukan:

a. Tingkat produksi berapa unit perusahaan tadi mencapai biaya total minimum.
b. Berapa besarnya biaya total minimum tersebut.

Penyelesaian:

TC = $5Q^2 - 1000Q + 85000$

TC minimum terjadi bila,

$TC' = 0$
$TC'' > 0$
$TC' = 10Q - 1000 = 0$
$10Q = 1000$
$Q = 100$ unit

$TC'' = 10 \rightarrow TC'' > 0$ Jadi, fungsi minimum.

TC minimum $= 5(100)2 - 1000(100) + 85000$
$= 50000 - 100000 + 85000$
$= 35000$

Contoh 2:
Biaya total yang dikeluarkan oleh seorang produsen yang memproduksi 2 macam barang yaitu $TC = 2X^2 + 3Y^2 - 10X - 9Y - XY + 50$. Tentukan besarnya kuantitas yang menyebabkan biaya minimum dan berapa biaya total minimumnya.

Penyelesaian:
$TC = 2X^2 + 3Y^2 - 10X - 9Y - XY$

$$\frac{\partial TC}{\partial X} = 0 = 4X - 10 - Y \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial Y} = 0 = 6Y - 9 - X \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Lakukan substitusi/eliminasi terhadap persamaan (1) dan (2).
Dari hasil substitusi/eliminasi didapatkan nilai X = 3 dan Y = 2 yang menyebabkan biaya total minimum.

$TC_{min} = 2(3)^2 + 3(2)^2 - 10(3) - 9(2) - (3)(2) + 50$
$= 36$

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial X^2} = 4 \text{ dan } \frac{\partial^2 TC}{\partial Y^2} = 6$$

$$|H2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 TC}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 TC}{\partial XY} \\ \frac{\partial^2 TC}{\partial YX} & \frac{\partial^2 TC}{\partial Y^2} \end{vmatrix}$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 23$$

Kesimpulan:
Karena nilai $|H2| > 0$ dan $\frac{\partial^2 TC}{\partial X^2} > 0$; $\frac{\partial^2 TC}{\partial Y^2} > 0$, berarti biaya total minimum pada 36.

12.2 PENERIMAAN

Penerimaan adalah sejumlah uang yang diterima perusahaan dari penjualan sejumlah produk tertentu dan pada harga tertentu. Penerimaan biasanya dilambangkan dengan TR (*Total Revenue*). Selain pengertian penerimaan juga dikenal istilah penerimaan rata-rata (*Average Revenue*/AR) dan penerimaan marjinal (*Marginal Revenue*/MR)

Penerimaan rata-rata adalah penerimaan total dibagi dengan kuantitas, sedangkan penerimaan marjinal adalah tambahan penerimaan total sebagai akibat tambahan satu unit produk yang terjual atau penerimaan marjinal adalah turunan pertama dari penerimaan total.

$$TR = P.Q$$

$$AR = \frac{TR}{Q}$$

$$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q} = TR^1$$

Apabila sebuah perusahaan menghasilkan dua macam *output* (misalnya A dan B), maka digunakan pendekatan derivatif parsial.

$TR_A = P_A.Q_A$ dan $TR_B = P_B.Q_B$ jadi $TR = TR_A + TR_B$

$AR_A = \frac{TR_A}{Q_A}$ dan $AR_B = \frac{TR_B}{Q_B}$

$MR_A = \frac{\Delta TR_A}{\Delta Q_A} = TR_A^1$ dan $MR_B = \frac{\Delta TR_B}{\Delta Q_B} = TR_B^1$

Berdasarkan keterangan di atas, maka besarnya penerimaan total maksimum dinyatakan dalam:

$$\frac{\partial TR}{\partial Q_A} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial TR}{\partial Q_B} = 0$$

Untuk mengetahui apakah penerimaan tersebut adalah penerimaan maksimum maka dilakukan pendekatan turunan kedua dan kemudian dilakukan pendekatan determinan.

$$\text{Minimum bila : } \frac{\partial^2 TR}{\partial Q_A^{\,2}} < 0 \text{ dan } \frac{\partial^2 TR}{\partial Q_B^{\,2}} < 0$$

$$|H2| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 TR}{\partial Q_A^{\,2}} & \dfrac{\partial^2 TR}{\partial Q_A Q_B} \\ \dfrac{\partial^2 TR}{\partial Q_B Q_A} & \dfrac{\partial^2 TR}{\partial Q_B^{\,2}} \end{vmatrix}$$

Untuk mencapai penerimaan total maksimum maka nilai D harus lebih besar dari nol

Contoh:

Apabila diketahui fungsi permintaan dari 2 produk yaitu A dan B adalah sebagai berikut: $P_A = 36\text{-}3Q_A$ dan $P_B = 40\text{-}5Q_B$, maka tentukan:

1. Fungsi penerimaan total, biaya rata-rata, dan biaya marjinal.
2. berapa unit produk A dan B yang harus diproduksi agar penerimaan total maksimum
3. berapa penerimaan total maksimumnya
4. buktikan dengan menggunakan turunan kedua kalau penerimaan tersebut maksimum.

Penyelesaian:

1. $TR = TR_A + TR_B$

   $TR = P_A.Q_A + P_B.Q_B$

   $TR = (36 - 3Q_A)Q_A + (40\text{-}5Q_B)Q_B$

   $TR = 36Q_A - 3Q_A^{\,2} + 40Q_B - 5Q_B^{\,2}$

   $AR_A = \dfrac{TR_A}{Q_A} = 36\text{-}3Q_A$ dan $AR_B = \dfrac{TR_B}{Q_B} = 40\text{-}5Q_B$

   $MR_A = \dfrac{\Delta TR_A}{\Delta Q_A} = TR_A{}^1 = 36\text{-}6Q_A$

   $MR_B = \dfrac{\Delta TR_B}{\Delta Q_B} = TR_B{}^1 = 40\text{-}10Q_B$

2. $\frac{\partial TR}{\partial Q_A} = 0, \quad 36\text{-}6Q_A = 0, \quad Q_A = 6$

$\frac{\partial TR}{\partial Q_B} = 0, \quad 40\text{-}10Q_B, \quad Q_B = 4$

3. $TR = 36Q_A - 3Q_A^2 + 40Q_B - 5Q_B^2$
$TR = 36(6) - 3(6)^2 + 40(4) - 5(4)^2$
$TR = 188$

4. $D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 TR}{\partial Q_A^2} & \frac{\partial^2 TR}{\partial Q_A Q_B} \\ \frac{\partial^2 TR}{\partial Q_B Q_A} & \frac{\partial^2 TR}{\partial Q_B^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 24$

$\frac{\partial^2 TR}{\partial Q_A^2} = -6$ dan $\frac{\partial^2 TR}{\partial Q_B^2} = -4$

karena $\frac{\partial^2 TR}{\partial Q_A^2} < 0$ dan $\frac{\partial^2 TR}{\partial Q_B^2} < 0$ dan < 0 serta $|H2| > 0$, maka penerimaan tersebut maksimum.

12.3 LABA

Laba merupakan sejumlah pendapatan yang diterima perusahaan dengan menjual sejumlah produk tertentu pada harga tertentu dan yang telah dikurangkan dengan sejumlah biaya produksi.

Apabila perusahaan menghasilkan dua macam produk tertentu (X dan Y) dengan fungsi permintaan sebagai berikut:

$$Q_x = f(P_x, P_y) \text{ dan } Q_y = g(P_x, P_y)$$

Keterangan:
Q_x = Jumlah produk X yang diminta
Q_y = Jumlah produk y yang diminta
P_x = Harga produk X
P_y = Harga produk Y

Maka besarnya penerimaan totalnya (TR) adalah:

$$TR = TR_x + TR_y = P_{x.}\, Q_x + P_{y.}Q_y$$

Jika biaya gabungan (*joint cost*)nya adalah:

$$TC = f(Q_x, Q_y)$$

Maka besarnya laba adalah:

$$\prod = TR_x + TR_y - TC$$

atau,

$$\prod = P_{x.}\, Q_x + P_{y.}Q_y - TC$$

Laba akan maksimum, apabila:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Qx} = 0 \text{ dan } \frac{\partial \pi}{\partial Qy} = 0$$

dan syarat keduanya adalah:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx^2} < 0 \text{ dan } \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qy^2} < 0$$

$$|H2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx \partial Qy} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qy \partial Qx} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qy^2} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx^2} \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qy^2} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx Qy} \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qy Qy} \right] > 0$$

Contoh 1:

Biaya total yang dikeluarkan sebuah perusahaan yang memproduksi 2 macam barang, A dan B, ditunjukkan oleh $TC=Q_a^2+3Q_b^2+Q_a.Q_b$. Harga jual masing-masing barang per unit adalah $P_a=7$ sedangkan $P_b=20$.

Pertanyaan:

a. Hitunglah berapa unit masing-masing barang harus diproduksi agar keuntungannya maksimum
b. Berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut?

c. Buktikan dengan menggunakan turunan kedua kalau laba tersebut maksimum!

Penyelesaian:

$TR_a = P_a.Q_a = 7Q_a$

$TR_b = P_b.Q_b = 20Q_b$

$TR = TR_a + TR_b$

$= 7Q_a + 20Q_b$

$p = TR - TC$

$p = 7Q_a + 20Q_b - (Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a.Q_b)$

$p = 7Q_a + 20Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_a.Q_b$

Agar laba maksimum, $p' = 0$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Qa} = 0 \rightarrow 7 - 2Q_a - Q_b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Qb} = 0 \rightarrow 20 - 6Q_b - Q_a = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh $Q_a = 2$ dan $Q_b = 3$

laba maksimumnya adalah $= 7(2) + 20(3) - (2)^2 - 3(3)^2 - (2.3)$

$= 14 + 60 - 4 - 27 - 6 = 37$

$$|H2| = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 11$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx^2} = -2 \text{ dan } \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qy^2} = -6$$

karena $\frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx^2} < 0$ dan $\frac{\partial^2 \pi}{\partial Qy^2} < 0$, serta $|H2| > 0$, maka laba tersebut adalah maksimum.

12.4 KONSEP DISKRIMINASI HARGA

Diskriminasi harga merupakan pembedaan harga jual terhadap suatu produk tertentu yang dijual di pasar yang berbeda. Tujuan daripada diskriminasi harga adalah meningkatkan laba perusahaan.

Konsep diskriminasi harga pada intinya sama dengan konsep perhitungan laba di atas. Perbedaannya terdapat pada produk dan pasarnya, kalau pada diskriminasi harga adalah produk yang sama ditawarkan pada pasar yang berbeda. Akan tetapi pada konsep laba di atas terdiri dari dua produk yang di jual pada pasar yang sama/berbeda.

Contoh 2:
Apabila fungsi permintaan terhadap suatu produk di pasar S dan R adalah:

$P_s = 105 - 10Q_s$

$P_R = 175 - 15Q_R$

Dan fungsi biaya gabungan adalah:

$TC = 40 + 25(Q_s + Q_R)$

Dimana $Q = Q_s + Q_R$

Tentukan laba maksimum perusahaan apabila menerapkan diskriminasi harga dan bagaimana apabila tidak menerapkan diskriminasi harga pada kedua pasar tersebut. Kemudian bandingkan!

Penyelesaian:
Dengan diskriminasi harga

$p = TR_s + TR_R - TC$

$p = (105 - 10Q_s)Q_s + (175 - 15Q_R)Q_R - [40 + 25(Q_s + Q_R)]$

$p = 105Q_s - 10Q_s^2 + 175Q_R - 15Q_R^2 - 40 - 25Q_S - 25\,Q_R$

$p = -10Q_s^2 - 15Q_R^2 + 80Q_s + 150Q_R - 40$

$\frac{\partial \pi}{\partial Qs} = -20Q_s + 80 = 0 \rightarrow Q_s = 4$

$\frac{\partial \pi}{\partial Qr} = -30Q_R + 150 = 0 \rightarrow Q_R = 5$

$p''Q_s = -20 \quad ® p' < 0$

$p''Q_R = -30 \quad ® p'' < 0$

Dan;

$|H2| = \begin{vmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -30 \end{vmatrix}$

$= (-20)(-30) - (0)(0)$

$= 600 > 0$, maka Π maksimum

$p_{max} = -10Q_s^2 - 15Q_R^2 + 80Q_s + 150Q_R - 40$
$p_{max} = -10(4)^2 - 15(5)^2 + 80(4) + 150(5) - 40$
$p_{max} = -160 - 375 + 320 + 750 - 40$
$p_{max} = 495$

Tanpa diskriminasi harga

$P_s = 105 - 10Q_s \text{ ® } Q_s = 105/10 - 1/10\ P_s$
$P_R = 175 - 15Q_R \text{ ® } Q_R = 175/15 - 1/15\ P_R$
$Q = Q_s + Q_R$
$Q = 105/10 - 1/10\ P_s + 175/15 - 1/15\ P_R$
$Q = 133/6 - 1/10P_s - 1/15P_R$
$= 133/6 - 1/6P$
$P_s = P_R = P$
$Q = 133/6 - 1/6P$
$P = 133 - 6Q$
$TC = 40 + 25Q$
$p = TR - TC$
$p = (133 - 6Q)Q - (40 + 25Q)$
$p = 133Q - 6Q^2 - 40 - 25Q$
$p = -6Q^2 + 108Q - 40$

laba maksimum apabila $p' = 0$
$p' = -12Q + 108 = 0 \rightarrow Q = 9$
$p'' = -12 \rightarrow p'' < 0$ Jadi, fungsi maksimum
$p_{max} = -6Q^2 + 106Q - 40$
$p_{max} = -6(9)^2 + 108(9) - 40$
$p_{max} = 486 + 972 - 40$
$p_{max} = 446$

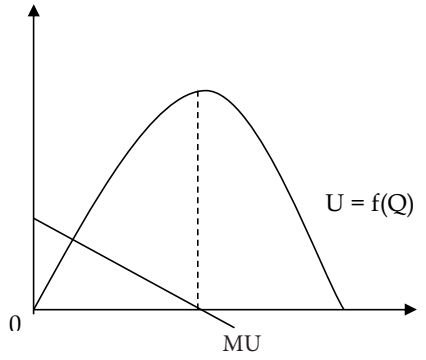
Kesimpulan:
p dengan diskriminasi harga = 495
p tanpa diskriminasi harga = 446

Jadi, lebih baik perusahaan menerapkan diskriminasi harga, karena laba yang dihasilkan lebih besar

12.5 FUNGSI UTILITAS

Fungsi utilitas menjelaskan besarnya utilitas (kepuasan, kegunaan) yang diperoleh seseorang dari mengkonsumsikan suatu barang atau jasa. Pada umumnya semakin banyak jumlah suatu barang dikonsumsi semakin besar utilitas yang diperoleh, kemudian mencapai puncaknya pada jumlah konsumsi tertentu, sesudah itu justru menjadi berkurang atau bahkan negatif bila jumlah barang yang dikonsumsi terus menerus ditambah.

Utilitas total merupakan fungsi dari jumlah barang yang dikonsumsi. Persamaan utilitas total (*total utility*, U) dari mengkonsumsikan suatu jenis barang berupa fungsi kuadrat parabolik, dengan kurva berbentuk parabola terbuka ke bawah. Utilitas marginal ialah utilitas tambahan yang diperoleh dari setiap tambahan satu unit barang yang dikonsumsi.



Utilitas total : $U = f(Q)$

Utilitas marginal : $MU = \frac{\Delta U}{\Delta Q}$

Utilitas total mencapai puncaknya ketika utilitas marginal (MU) nol, dan berkurang ketika utilitas marginal negatif.

Contoh 1:

Kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi suatu barang dicerminkan oleh fungsi utilitas: $U = f(Q) = -3Q^2 + 72Q$. Berapa unit barang harus dikonsumsikannya bila ia ingin memaksimumkan tingkat kepuasan atau utilitas atas barang itu? Hitunglah nilai utilitas maksimum tersebut.

Penyelesaian:

$U = -3Q^2 + 72Q$

Syarat suatu fungsi dikatakan maksimum, apabila:

$$U' = \frac{\partial U}{\partial Q} = 0$$

$$U'' = \frac{\partial^2 U}{\partial Q^2} < 0$$

$U' = 0 = -6Q + 72$

$6Q = 72$

$Q = 12$ unit

$U'' = -6 \rightarrow U'' < 0$ Jadi, utilitas maksimum.

U maksimum $= -3(12)^2 + 72(12)$

$= -432 + 864$

$= 432$

Contoh 2:

Berkenaan dengan soal nomor 1, apa yang terjadi bila konsumen tadi mengkonsumsikan lagi 1 unit barang tersebut? Dan berapa unit yang dikonsumsi jika U = 0

Penyelesaian:

Pada Q = 12, U = 432

Bila Q = 13, $U = -3(13)^2 + 72(13) = 429$

Maka MU = $\frac{\Delta U}{\Delta Q} = \frac{429 - 432}{13 - 12} = -3$

Jadi bila si konsumen menambah konsumsinya dengan 1 unit, setelah mengkonsumsikan 12 unit, utilitas totalnya justru akan menurun. Hal ini dicerminkan oleh utilitas marginal yang negatif.

$U = -3Q^2 + 72Q$

Apabila U = 0,

$-3Q^2 + 72Q = 0$

$-3Q^2 = -72Q$

$Q = 24$

Kasus di atas adalah utilitas yang tanpa kendala, adakalanya fungsi utilitas juga dipengaruhi oleh kendala-kendala yang ada (misalnya jumlah uang yang dimiliki, jumlah sumber daya yang ada, dll). Di samping itu jumlah produk yang akan di konsumsi juga dapat mempengaruhi utilitas, karena konsumen tidak hanya mengkonsumsi satu produk saja tetapi bias lebih dari satu produk. Oleh

karena itu penyelesaian persamaan tersebut harus menggunakan pendekatan *Lagrange* (fungsi kendala).

Misalkan utilitas yang hendak dimaksimumkan: U = f(X,Y)
Fungsi kendala: $XP_X + YP_Y = B$

Keterangan:
X = jumlah barang X yang akan dibeli
Y = jumlah barang Y yang akan dibeli
P_X = harga barang X
P_Y = harga barang Y
B = jumlah dana yang dimiliki untuk mengkonsumsi barang X dan Y

Maka penyelesaiannya menggunakan pendekatan pendekatan Lagrange.

$$U(X,Y,l) = f(X,Y) + l.\ (B - XP_X - YP_Y)$$

Nilai maksimum dari fungsi utilitas dapat dicari dengan membuat turunan pertamanya sama dengan nol.

$$U_X = f_x + lP_X = 0$$
$$U_Y = f_y + lP_Y = 0$$
$$U_l = B - XP_X - YP_Y = 0$$

Nilai X, Y, dan l dapat diperoleh dari ketiga persamaan di atas dengan pemecahan secara simultan. Kemudian untuk menentukan apakah utilitas tersebut maksimum digunakan turunan kedua untuk selanjutnya dicari nilai determinannya.

Contoh 3:
Apabila kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi barang A dan B dicerminkan oleh fungsi utilitas: $U = -A^2 - 3B^2 + 4AB$. Berapa unit barang A dan B yang harus dikonsumsikannya bila ia ingin memaksimumkan tingkat kepuasan atau utilitas atas barang-barang tersebut jika diketahui harga barang A ($P_A = 2$) dan barang B ($P_B = 3$) serta daya beli konsumen tersebut sebesar 45 itu? Kemudian hitunglah nilai utilitas maksimum tersebut.

Penyelesaian:
Fungsi utilitas: $U = 4AB - A^2 - 3B^2$
Fungsi anggaran $2A + 3B = 45$, diubah menjadi $45 - 2A - 3B = 0$

Langkah 1.
Buatlah fungsi Lagrangian, yaitu:

$$U = 4AB - A^2 - 3B^2 + \lambda(45 - 2A - 3B)$$

Untuk mencari nilai maksimum *U*, syarat yang diperlukan adalah derivatif parsial pertama terhadap *X,Y*, dan λ harus disamakan dengan nol.

$U_A = 4B - 2A - 2\lambda = 0$ …….(1)
$U_B = 4A - 6B - 3\lambda = 0$ …….(2)
` $U_\lambda = 45 - 2A - 3B = 0$ …….(3)

Langkah 2.

Hilangkan sementara nilai λ dengan cara persamaan (1) dikalikan dengan 3 kemudian dikurangkan dengan 2 kali persamaan (2), maka hasilnya adalah :

$-6A + 12B - 6\lambda = 0$
$8A - 12B - 6\lambda = 0$

Dari persamaan di atas dapat diketahui persamaan ke (4) yaitu:

$-14A + 24B = 0$ ……...(4)

Langkah 3,

Lakukan eliminasi/substitusikan persamaan (3) dan (4), yaitu dengan mengeliminir variabel A dengan mengalikannya dengan 7.

$-14A + 24B = 0$
$14A + 21B = 315$

Dari kedua persamaan di atas dapat diketahui nilai B, yaitu 7 (B = 7)
Untuk mendapatkan nilai A lakukan substitusi terhadap persamaan (3) atau (4) dan didapatkan nilai A sebesar 12 (A= 12)

Untuk mendapatkan nilai Utilitas yang maksimal dilakukan substitusi A dan B terhadap fungsi utilitas.

$$U_{maks} = 4(12)(7) - (12)^2 - 3(7)$$
$$= 45$$

Selanjutnya nilai λ dapat dicari dengan melakukan substitusi A dan B pada persamaan (1) atau (2). Dari hasil substitusi diperoleh $\lambda = 2$. Hal ini berarti apabila kendala anggaran berubah 1 unit maka fungsi tujuan U akan berubah sebanyak 2 unit. Dalam hal ini misalnya kendala anggaran berubah dari 45 menjadi 46 maka U_{maks} akan berubah dari 45 menjadi 47.

12.5 FUNGSI PRODUKSI

Fungsi produksi untuk kebanyakan produk memerlukan sedikitnya dua faktor produksi seperti tenaga kerja, tanah, modal, bahan baku, dan mesin-mesin. Bila kuantitas z diproduksikan dengan menggunakan faktor produksi x, dan y; fungsi produksinya dapat dituliskan sebagai berikut: z = f(x,y). Output z dapat dihasilkan jika input x, dan y digunakan secara serentak.

Produk total merupakan fungsi dari jumlah masukan (input, faktor produksi) yang digunakan. Bentuk fungsi produk total (*total product*, P) yang non-linier pada umumnya berupa sebuah persamaan kubik yang mempunyai titik belok dan sebuah titik puncak. Dalam konsep produksi juga dikenal pengertian rata-rata dan marginal. Produk rata-rata ialah jumlah keluaran atau produk yang dihasilkan dari setiap unit masukan yang digunakan, merupakan hasil bagi produk total terhadap jumlah masukan. Sedangkan produk marginal ialah produk tambahan yang dihasilkan dari setiap tambahan satu unit masukan yang digunakan.

Pada fungsi produksi dalam pasar persaingan sempurna, diasumsikan bahwa perusahaan menggunakan dua macam input saja (K dan L). Di samping itu perusahaan tidak dapat menetukan harga input-input dan harga output, sehingga harga input K dan L diasumsikan adalah a dan b serta harga output Q adalah p. Sehingga besarnya laba perusahaan adalah seperti di bawah ini.

$$\prod = pQ - aK - bL$$

atau

$$\prod = p.f(K,L) - aK - bL$$

Untuk memaksimumkan laba, caranya sama yaitu harus mencari derivatif parsial pertama dan derivatif parsial kedua.

Contoh:

Misalkan fungsi produksi adalah $16Q = 60 - 2(K-5)^2 - 4(L-4)^2$, dan harga masing-masing input K dan L , berturut-turut adalah 8 dan 4, serta output adalah 16. Tentukan berapa input K dan L yang digunakan agar laba maksimum dan berapa nilai laba maksimumnya.

Penyelesaian:

$\prod = pQ - aK - bL$

$= 16Q - 8K - 4L$

$= 60 - 2(K-5)^2 - 4(L-4)^2 - 8K - 4L$

$\frac{\partial \pi}{\partial L} = -8(L-4) - 4 = 0$

$-4K + 12 = 0$

$K = 3$

$\frac{\partial \pi}{\partial K} = -4(K-5) - 8 = 0$

$-8L + 28 = 0$

$L = 3{,}5$

$\frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} = -4; \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} = -8; \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial L \partial K} = 0$

$$H2| = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 32 - 0 = 32 > 0$$

Jadi, laba maksimum adalah,

$\pi_{maks} = 60 - 2(3 - 5)^2 - 4(3{,}5 - 4)^2 - 8(3) - 4(3{,}5)$

$= 13$

Konsep fungsi produksi juga dapat digunakan untuk memaksimalkan jumlah unit produksi dengan sumber daya yang dimiliki, maksudnya bagaimana mencapai tingkat produksi maksimal dengan sumber daya yang terbatas.
Misalkan produksi yang hendak dimaksimumkan: $Q = f(K,L)$
Dengan fungsi kendala: $KP_K + LP_L = B$

Di mana:
K = jumlah input K yang akan digunakan
L = jumlah input L yang akan digunakan
P_K = harga input K
P_L = harga input L
B = jumlah dana maksimal yang dimiliki

Maka penyelesaiannya menggunakan pendekatan pendekatan Lagrange.

$$Q(K,L,l) = f(K,L) + l.\ (B - KP_K - LP_L)$$

Nilai maksimum dari fungsi produksi dapat dicari dengan membuat turunan pertamanya sama dengan nol.

$$Q_K = f_K + lP_K = 0$$
$$Q_L = f_L + lP_L = 0$$
$$Q_l = B - KP_K - LP_L = 0$$

Contoh:
Suatu perusahaan bermaksud akan menghasilkan mesin dengan menggunakan modal (K) dan tenaga kerja (L). Fungsi produksi yang dinyatakan dalam $Q=L^3K^3$, sementara itu harga input K dan L masing-masing adalah \$40.00 dan \$20.00 per unit. Sementara itu dana maksimum yang dimiliki perusahaan adalah \$1,600.00.

Pertanyaan:
1. berapa kombinasi modal (K) dan tenaga kerja (L) yang harus digunakan perusahaan agar mencapai produksi optimum.
2. berapa tingkat produksi optimumnya
3. buktikan bahwa produksi tersebut maksimum.

Penyelesaian:
Fungsi produksi: $Q=L^3K^3$
Fungsi anggaran $40K+20L=1600$, diubah menjadi $1600 - 40K - 20L=0$, disederhanakan menjadi $80-2K-L=0$

Langkah 1.
Buatlah fungsi Lagrangian, yaitu:

$$Q = L^3K^3 + \lambda (80 - 2K - L)$$

Untuk mencari nilai maksimum Q, syarat yang diperlukan adalah derivatif parsial pertama terhadap K,L, dan λ harus disamakan dengan nol.

$$Q_K = 3L^3K^2 - 2\lambda = 0 \quad \text{.....(1)}$$
$$Q_L = 3L^2K^3 - \lambda = 0 \quad \text{.....(2)}$$
$$Q\lambda = 80 - 2K - L = 0 \quad \text{.....(3)}$$

Langkah 2.
Hilangkan sementara nilai λ dengan cara persamaan (1) dikalikan dengan 1 kemudian dikurangkan dengan 2 kali persamaan (2), maka hasilnya adalah :

$$3L^3K^2 - 2\lambda = 0$$
$$6L^2K^3 - 2\lambda = 0$$
$$3L^3K^2 = 6L^2K^3$$
$$3L = 6K$$
$$L = 2K$$

Dari persamaan di atas dapat diketahui persamaan ke (4) yaitu:

$$L = 2K\text{.....(4)}$$

Langkah 3,
Lakukan eliminasi/substitusikan persamaan (3) dan (4), yaitu dengan mengeliminir variabel A dengan mengalikannya dengan 7.

$$80 - 2K - L = 0$$
$$80 - 2K - 2K = 0$$
$$80 = 4K$$
$$K = 20$$
$$L = 40$$

Dari kedua persamaan di atas dapat diketahui nilai K, yaitu 20 (K = 20) dan L = 40 Untuk mendapatkan nilai produksi yang maksimum dilakukan substitusi K dan L terhadap fungsi produksi.

$$Q_{maks} = L^3K^3$$
$$= (40)^3(20)^3$$
$$= 72.000$$

12.6 SOAL LATIHAN

1. Veanid Co. mempunyai fungsi produksi $Q=4-(2/K^2L)$. Apabila harga input K dan L masing-masing \$5.00 dan harga jual output Q adalah \$10.00. tentukan berapa unit input K dan L yang harus digunakan agar laba maksimum dan tentukan berapa laba maksimumnya!
2. PT Ave Mandiri Jaya adalah sebuah perusahaan yang menghasilkan produk pakaian jadi untuk anak-anak, dimana segmen yang dilayani adalah segmen menegah-atas. Produk yang dihasilkan berupa pakaian wanita (X) dan pakaian pria (Y) anak-anak. Saat ini fungsi permintaan untuk produk pakaian wanita dan pakaian pria adalah $P_x=36-3Q_x$ dan $P_y=40-5Q_y$. Sementara itu fungsi biaya gabungan kedua produk tersebut adalah $TC=12Q_x+20Q_y$. Tujuan perusahaan menginginkan terjadi laba maksimum dari penjualan tersebut.

   Pertanyaan:
   a. Tentukan harga dan kuantitas yang harus dijual untuk mencapai tujuan perusahaan tersebut
   b. Berapa laba maksimumnya
   c. Buktikan kalau laba tersebut maksimum.
3. Jika fungsi produksi yang dihadapi produsen pasar persaingan sempurna adalah $Q = 5 - (1/K) - (1/L^2)$, di mana K= modal dan L= tenaga kerja. Jika

harga input K = 1, input L = 4, serta harga output Q = 9, carilah berapa input K dan L yang akan digunaka agar laba maksimum dan berapa laba maksimumnya.

4. Sebuah perusahaan melakukan penjualan pada dua pasar A dan B. Andaikan di pasar A permintaannnya adalah $Q_A = 120–20P_A$ dan di pasar B permintaannya adalah $Q_B = 120–20P_B$; Andaikan TC = 90+2Q atau ATC = US$3.00

   Coba saudara hitung:

   a. Tingkat output di pasar A (Q_A) dan harga di pasar A (P_A) demikian juga Q_B dan P_B.
   b. Berapa besar profit yang diperoleh perusahaan ini dengan cara diskriminasi harga tersebut.
   c. Bandingkan tingkat profit bila tidak melakukan diskriminasi harga.

5. Menurut Badan Pemeriksa, besar kecilnya hadiah yang diperoleh seseorang dari pembelian barang A dan B dinyatakan dalam fungsi $Q = 4000\ T^{3/5}.\ S^{2/5}$. (Q = besarnya hadiah). Harga barang A Rp. 3.000,- dan harga barang B Rp. 1.000,-. Jika seseorang menganggarkan (modal) Rp. 165.000,- untuk membeli barang tersebut.

   a. Berapa barang A dan barang B sebaiknya dibeli sehingga diperoleh hadiah yang maksimum?
   b. Berapa besarnya hadiah maksimum yang diterima tersebut?
   c. Lakukan pengujian dengan menggunakan turunan kedua.

6. Suatu perusahaan mempunyai fungsi produksi sebagai berikut:
   $Q = 10\ K^{0.6}L^{0.4}$. Dimana Q adalah output, L adalah tenaga kerja, dan K adalah modal. Apabila perusahaan menyediakan dana sebesar US$ 120, sedangkan harga suatu unit modal = US$ 6 dan harga satu unit tenaga kerja = US$ 2. Coba saudara hitung berapa:

   a. Modal dan tenaga kerja yang harus digunakan agar output maksimum.
   b. Besarnya produksi optimum tersebut.
   c. Lakukan pengujian dengan menggunakan turunan kedua.

7. Seorang produsen bermaksud akan menghasilkan mesin dengan menggunakan Modal (K) dan Tenaga Kerja (L) seharga masing-masing $40,- per unit dan $20,- per unit. Fungsi produksi yang harus dihadapi oleh produsen adalah $Q = L^3K^3$ dengan dana yang dimiliki maksimal $ 1.600,- Tentukan berapa kombinasi Modal dan Tenaga Kerja yang harus dilakukan oleh produsen tersebut agar mencapai produksi yang optimal.

8. Dengan menggunakan L unit tenaga kerja dan K unit kapital, suatu perusahaan dapat memproduksi Q unit produksinya dengan fungsi $Q(K,L) = 50\ L^{2/3}\ K^{1/3}$. Biaya tenaga kerja adalah $ 100 per unit, dan biaya kapital adalah $ 300 per unit. Jika perusahaan tersebut hanya mempunyai budget sebesar $ 45.000,- tentukanlah:
   a. Banyaknya tenaga kerja dan kapital yang digunakan agar produksinya maksimum.
   b. Besarnya produksi maksimum.
   c. Buktikan kalau produksi tersebut maksimum.

9. Utilitas konsumen dengan mengkonsumsi dua macam barang dinyatakan dalam $U= X^{0,6}Y^{0,25}$. Anggaran konsumen per bulan sebesar $6800, konsumen tersebut ingin memaksimumkan utilitasnya. Harga barang X adalah $80, sementara harga barang Y adalah $50.
   Pertanyaan:
   a. Tentukan jumlah barang X dan Y yang dikonsumsi agar utilitas maksimum
   b. Jika pendapatan riil konsumen meningkat sebesar 20%, dengan asumsi harga kedua barang tersebut tidak berubah, tentukan mombinasi yang baru dari kedua barang yang akan dikonsumsi agar utilitas maksimum.

10. PT Wijaya Kusuma menggunakan dua macam input dalam pelaksanaan proses produksinya, yaitu kapital (K) dan tenaga kerja (L). Saat ini tujuan perusahaan adalah bagaimana cara memaksimalkan laba dari kegiatan produksinya. Harga jual barang tersebut adalah $9.00, sementara harga input K dan L masing-masing adalah $1.00 dan $4.00. Jika fungsi produksi untuk barang tersebut dinyatakan dalam $Q = 5 - K^{-1} - L^{-1}$, maka tentukan:
   a. Input K dan L yang digunakan agar tujuan perusahaan tercapai!
   b. Berapa nilai laba maksimumnya!
   c. Buktikan kalau laba tersebut maksimum

11. Seorang produsen menghasilkan outputnya menggunakan dua macam input yaitu K dan L, dengan fungsi produksi sebagai berikut: QK-0,8L-0,2 – 20 = 0 dimana: Q = barang yang diproduksi, L=tenaga kerja, dan K=modal
   a. Tentukan besarnya elastisitas input K dan input L masing-masing dan jelaskan arti ekonominya.
   b. Tentukan MPP_k dan MPP_L dari fungsi produksi tersebut.

12. Sebuah pabrik ingin memproduksi susu dengan menggunakan dua bahan baku yang dicampurkan, yaitu: susu sapi murni dan bahan lain. Untuk mendapatkan satu kaleng susu (400 gram) diperlukan pencampuran dengan formula sebagai berikut: $20X+10Y-2X^2-Y^2$, di mana X adalah susu sapi murni dan Y adalah bahan lain serta Z adalah susu kalengan. Biaya pembelian bahan susu sapi yang menghasilkan satu kaleng susu adalah Rp. 2000, sedangkan bahan campuran lain seharga Rp 1000. Pabrik menjual produk tersebut di pasar seharga Rp 20.000 tiap kalengnya.

    Pertanyaan:
    a. Berapa jumlah bahan baku yang harus di beli dan berapa kaleng susu yang harus diproduksi agar keuntungan diperoleh maksimum
    b. Tunjukkan dengan formula tersebut kalau keuntungan tersebut

Bab 13
INTEGRAL

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Menggunakan integral tak tertentu dalam menjelaskan suatu permasalahan dalam ilmu ekonomi dan bisnis;
2. Menggunakan integral tertentu dalam menjelaskan suatu permasalahan dalam ilmu ekonomi dan bisnis.

13.1 PENDAHULUAN

Dalam kalkulus integral dikenal dua macam integral, yaitu integral taktentu (*indefinite integral*) dan integral tertentu (*definite integral*). Integral taktentu adalah kebalikan dari derivatif, yakni suatu konsep yang berhubungan dengan proses penemuan suatu fungsi asal apabila turunan atau derivatif dari fungsinya diketahui. Sedangkan integral tertentu merupakan suatu konsep yang berhubungan dengan proses pencarian luas suatu area yang batas-batas atau limit dari area tersebut sudah tertentu.

13.2 INTEGRAL TAK TERTENTU

Mengintegralkan suatu fungsi turunan $f(x)$ berarti adalah mencari integral atau turunan-antinya, yaitu $F(x)$.

Bentuk umum integral dari $f(x)$ adalah:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$

Simbul k adalah konstanta yang nilainya tidak tertentu. Dalam rumusan di atas, tanda $\int$ adalah tanda integral; $f(x)\,dx$ adalah diferensial dari $F(x)$; $f(x)$ sendirian disebut integran; dx sendirian disebut diferensial; k adalah konstanta

pengintegralan; dan $F(x) + k$ merupakan fungsi asli atau fungsi asal. Proses mengintegralkan disebut juga integrasi.

Dalam diferensial kita menemukan, bahwa jika misalnya suatu fungsi asal dilambangkan dengan $F(x)$ dan fungsi turunannya dilambangkan dengan $f(x)$ maka:

Untuk fungsi asal: $F(x) = X^2 + 5$, maka

Fungsi turunannya: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 2x$

Jika prosesnya dibalik, yakni fungsi turunan $f(x)$ diintegralkan, maka:

$$\int f(x)dx = F(x) + k = x^2 + k$$

Derivatif dari setiap konstanta adalah nol, maka dalam mengintegralkan setiap fungsi turunan konstanta k tetap dalam bentuk k. Artinya nilai konstanta tersebut tidak dengan sendirinya bisa diisi dengan bilangan tertentu (misalnya 5, dalam contoh tadi), kecuali jika di dalam soal memang sudah ditentukan nilai konstantanya.

Kaidah-Kaidah Integrasi Tak tentu

Kaidah 1. Integral dari bilangan nol

$$\int 0 = k$$

Kaidah 2. Integral dari suatu konstanta

$$\int c\,dx = cx + k$$

Contoh : $\int 4dx = 4X + k$

Kaidah 3. Integral dari suatu fungsi pangkat x^n, dimana $n \neq -1$ (kaidah pangkat)

$$\int X^n dx = \frac{X^{n+1}}{n+1} + k \qquad n \neq -1$$

Contoh : $\int X^4\,dx = \frac{X^{4+1}}{4+1} + k = 1/5\,X^5 + k = 0{,}2X^5 + k$

Kaidah 4. Integral dari x^{-1} (atau $1/x$)

$$\int x^{-1}\,dx = \ln x + k \qquad x > 0$$

Contoh : $\int 3x^{-1}\,dx = 3 \ln x + k$

Kaidah 5. Integral dari suatu konstanta dikalikan suatu fungsi sama dengan konstanta dikalikan integral fungsi tersebut

$$\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

Contoh : $\int 3X^2\,dx = 3 \int X^2\,dx = 3\left(\frac{X^{2+1}}{2+1}\right) + k = X^3 + k$

Kaidah 6. Integral jumlah atau selisih dari dua atau lebih fungsi sama dengan jumlah atau selisih dari integral-integralnya.

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + k$$

Contoh :$\int (x^4 + 3x^2)dx = \int x^4dx + \int 3x^2dx = 0{,}2x^5+x^3+k$

Kaidah 7. Integral dari negatif suatu fungsi sama dengan negatif dari integral fungsi tersebut.

$$\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$$

Contoh:$\int -(2x + 2)dx = -\int (2x + 2)\,dx = -x^2 - 2x + k$

Kaidah 8. Integral pangkat dari fungsi

$$\int (mX + a)^n\,dx = \frac{(mX+a)^{n+1}}{m(n+1)} + k, \text{ di mana } n \neq -1$$

Contoh 1: $\int (3X + 8)^6\,dx$

$$= \frac{(3X+8)^{6+1}}{3(6+1)} + k$$

$$= \frac{(3X+8)^7}{21} + k$$

Contoh 2: $\int \frac{1}{(2X+3)^4}\,dx$

$$= (2X + 3)^{-4}$$

$$= \frac{(2X+3)^{-3}}{-6} + k$$

Kaidah 9. Integral dari fungsi exponensial

1. $\int e^x \, dx = e^x + k$

   hal ini terjadi, karena derivatif dari e^x adalah e^x itu sendiri

2. $\int e^{(mX+a)} \, dx = \frac{e^{(mX+a)}}{m} + k$

   contoh: $\int e^{(3X+6)} \, dx = \frac{e^{(3X+6)}}{3} + k = 1/3 \, e^{(3X+6)} + k$

3. $\int f^1(x) e^{f(x)} \, dx = e^{f(x)} + k$

Contoh 1: $\int 2x e^{x^2} \, dx$

$f(x) = x^2 \quad f^1(x) = 2x$

Karena persamaan tersebut telah memenuhi kaidah pengintegralan, untuk f(x) dan $f^1(x)$, maka:

$$\int 2x e^{x^2} \, dx = e^{x^2} + k$$

Contoh 2: $\int x^3 e^{2x^4} \, dx$

$f(x) = 2x^4 \quad f^1(x) = 8x^3$

Karena persamaan tersebut belum memenuhi kaidah pengintegralan, untuk f(x) dan $f^1(x)$, maka harus dilakukan penyesuaian sebagai berikut:

$$\int x^3 e^{2x^4} \, dx = \frac{8}{8} \int x^3 e^{2x^4} \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int 8x^3 e^{2x^4} \, dx$$

perubahan di atas telah memenuhi persyaratan pengintegralan, maka:

$$= \frac{1}{8} \int e^{2x^4} + k$$

Kaidah 10. Integral dari logaritma

$$\int \frac{f^1(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + k$$

dimana $f(x) \neq 0$

Contoh 1: $\int \frac{4x}{2x^2 + 4} dx$

$f(x) = 2x^2 + 4 \quad f^1(x) = 4x$

karena fungsi tersebut telah memenuhi kaidah pengintegralan di atas, maka:

$$\int \frac{4x}{2x^2+4}dx = \ln(2x^2+4) + k$$

Contoh 2: $\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-10}dx$

$f(x) = 3x^2+9x-10 \quad f^1(x) = 6x+9$

karena hal tersebut belum memenuhi kaidah pengintegralan, maka dilakukan penyesuaian sebagai berikut:

$$\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-10}dx = \frac{1}{3}\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-10}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3(2x+3)}{3x^2+9x-10}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{6x+9}{3x^2+9x-10}dx$$

Perubahan di atas telah memenuhi kaidah pengintegralan, maka:

$$\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-10}dx = \frac{1}{3}\ln(3x^2+9x-10)$$

Kaidah 11. Integral dengan subtitusi

$$\int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)\,du = F(u) + k$$

dimana u = g(x), dan $\int du$ merupakan substitusi $\int dx$

Contoh : $\int 6x(3x^2 - 10)\,dx$

Dengan cara penyelesaian biasa atau langsung :

$\int 6x(3x^2-10)dx = \int (18x^3-60x)dx = 4{,}5x^4-30x^2+k$

Dengan cara subtitusi, misalkan $u = 3x^2 - 10$; maka $du/dx = 6x$, atau $dx = du/6x$. sehingga :

$$\int 6x(3x^2-10)dx = \int 6x\,u\frac{du}{6} = \int u\frac{du}{x} = \frac{U^2}{2}+k$$

$$= \frac{(3x^2 - 10)^2)}{2} + k$$

$$= 1/2(9x^4 - 60x^2 + 100) + k$$

$$= 4{,}5x^4 - 30x^2 + 50 + k$$

$$= 4{,}5x^4 - 30x^2 + k, \text{ di mana } k = 50 + k$$

13.3 INTEGRAL TERTENTU

Integral tertentu adalah integral dari suatu fungsi yang nilai-nilai variabel bebasnya (memiliki batas-batas) tertentu. Integral tertentu digunakan untuk menghitung luas area yang terletak di antara kurva y = *f*(x) dan sumbu-horisontal x, dalam suatu rentangan wilayah yang dibatasi oleh x = a dan x = b.

Dalam integral taktentu kita temukan bahwa :

$\int f(x)\,dx = F(x) + k$

Jika kita ingin mengetahui hasil integrasi tersebut untuk suatu rentangan wilayah tertentu, katakanlah antara x = a dan x = b di mana a < b, maka x dapat disubstitusi dengan nilai-nilai a dan b sehingga ruas kanan persamaan di atas menjadi :

$$\{ F(b) + k \} - \{ F(a) + k \} = F(b) - F(a)$$

F(b) – *F*(a) adalah hasil integrasi tertentu dari *f*(x) antara a dan b. Secara lengkap persamaan pertama tadi dapat dituliskan menjadi :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\,F(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)$$

Contoh:

$\int_1^4 10x\,dx =$ $= 5(4)^2 - 5(1)^2 = 75$

$\int_1^3 (4x^3+6X)dx = [x^4 + 3x^2]_1^3 = [(3)^4 +3\,(3)^2] - [(1)^4 +3(1)^2] = 104$

Kaidah-Kaidah Integral Tertentu

Untuk a < c < b, berlaku :

1. $\int_a^b f(x)dx = [\,F(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)$

   Contoh : $\int_2^5 x^4\,dx = [x^5 / 5]_2^5 = 1/5\ [\,x^5\,]_2^5 = 1/5\ [\,x^5\,]$

   $= 1/5\ (\,3125 - 32\,) = 618{,}6$

2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

   Contoh : $\int_2^2 x^4\,dx = [\,x^5 / 5\,]_2^2 = 1/5\ (\,32 - 32\,) = 0$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Contoh : $\int_2^5 x^4\,dx$

$-\int_5^2 x^4\,dx = -[\,x^5 / 5]_5^2 = -(32 - 3125)/5 = 618{,}6$

4. $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Contoh : $\int_2^5 5\,x^4\,dx = [\,x^5]_2^5 = 3125 - 32 = 3093$

$5\int_2^5 x^4\,dx = 5\,(618{,}6) = 3093$

5. $\int_a^b \{\,f(x) + g(x)\,\}\,dx = \int_a^b F(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Contoh : $\int_2^5 (\,x^4 + 5\,x^4\,)dx = \int_2^5 x^4\,dx + \int_2^5 5\,x^4\,dx$

$= 618{,}6 + 3093 = 3.711{,}6$

6. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Contoh : $\int_2^3 x^4\,dx + \int_3^5 x^4\,dx = [\,x^5 / 5\,]_2^3 + [\,x^5 / 5\,]_3^5$

$= 1/5\,(243 - 32) + 1/5\,(3125 - 243)$

$= 618{,}6$

13.4 SOAL LATIHAN

Tentukan fungsi untuk integral taktentu di bawah ini:

1. $\int 2x.\,dx$
2. $\int 3x^2.\,dx$
3. $\int 4x^{-1}.\,dx$
4. $\int x^5.\,dx$
5. $\int (4x^3+2x).\,dx$
6. $\int (4x+7)^5.\,dx$
7. $\int \frac{1}{(2x+8)^7}dx$

8. $\int e^{2x+4}.\,dx$

9. $\int 3x\,e^{x^2}.\,dx$

10. $\int \frac{8x}{4x^2+8}dx$

11. $\int \frac{(x+2)}{7x^2+28x-3}dx$

12. $\int 3x(2x^2+8).\,dx$

Tentukan nilai untuk integral tertentu di bawah ini:

1. $\int_1^3 x.\,dx$

2. $\int_0^2 (3x-3).\,dx$

3. $\int_2^5 (x^2+3x-3).\,dx$

4. $\int_3^7 (x-1)(x+1).\,dx$

5. $\int_2^8 (x-3)^2.\,dx$

6. $\int_1^6 2x(x-3).\,dx$

7. $\int_2^4 (x^3+2x^2-3x+1).\,dx$

8. $\int_1^6 (2x^2+3x).\,dx$

Bab 14

PENERAPAN INTEGRAL DALAM EKOMOMI

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:
1. Mencari fungsi biaya total dari fungsi biaya marginal;
2. Mencari fungsi penerimaan total;
3. Mencari fungsi penerimaan marginal;
4. Mencari fungsi konsumsi dari MPC;
5. Mencari fungsi tabungan dari MPS;
6. Mencari fungsi pembentukan modal;
7. Menghitung besarnya surplus konsumen (SK);
8. Menghitung besarnya surplus produsen (SP);
9. Menghitung keuntungan total maksimum jika diketahui MC dan MR.

14.1 INTEGRAL TAK TERTENTU

Pendekatan integral tak tentu dapat diterapkan untuk mencari persamaan fungsi total dari suatu variabel ekonomi apabila persamaan fungsi marjinalnya diketahui.

1.1.1 Fungsi Biaya

Biaya total : $TC = f(Q)$

Biaya marjinal : $MC = TC' = \frac{dTC}{dQ} = f'(Q)$

Biaya total adalah integral dari biaya marjinal

$$C = \int MC\, dQ = \int f'(Q)\, dQ$$

Contoh 1:
Biaya marginal suatu perusahaan ditunjukkan oleh fungsi sebagai berikut: MC = $3Q^2 - 6Q + 4$. Carilah persamaan biaya total dan biaya rata-ratanya. Besarnya biaya tetap adalah 4.

Penyelesaian:

Biaya total: $TC = \int MC\, dQ$

$= \int (3Q^2 - 6Q + 4)\, dQ$

$= Q^3 - 3Q^2 + 4Q + k$

Biaya rata-rata: $AC = \frac{TC}{Q} = Q^2 - 3Q + 4 + k/Q$

Konstanta k adalah biaya tetap. Diketahui biaya tetap tersebut sebesar 4, maka :

$TC = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$

$AC = Q^2 - 3Q + 4 + 4/Q$

Contoh 2:
Apabila biaya marjinal perusahaan adalah: MC= Q^2 - 2Q + 3 dan biaya total pada saat Q=2 adalah 10. Tentukan besarnya biaya tetap, kemudian tentukan biaya rata-ratanya (AC).

Penyelesaian:

MC= Q2 – 2Q+3

$TC = \int MC\, dQ$

TC = 1/3Q3 – Q2 + 3Q + K

10 = 1/3(2)3 – (2)2 + 3(2) + K

$K = 5\frac{1}{3}$

$AC = \frac{TC}{Q} = 1/3Q2 - Q + 3 + 5\frac{1}{3}/Q$

14.1.2 Fungsi Penerimaan

Penerimaan total : $TR = f(Q)$

Penerimaan marjinal : $MR = R' = \frac{dR}{dQ} = f'(Q)$

Penerimaan total adalah integral dari penerimaan marjinal

$$TR = \int MR\, dQ = \int f'(Q)\, dQ$$

Contoh:
Carilah persamaan penerimaan total, penerimaan rata-rata, dan fungsi permintaan (*Demand*) dari suatu perusahaan jika penerimaan marijinalnya MR = 16–4Q

Penyelesaian:

Penerimaan total: $TR = \int MR\, dQ$

$= \int (16 - 4Q)\, dQ$

$= 16Q - 2Q^2$

Penerimaan rata-rata : $AR = \frac{TR}{Q} = 16 - 2Q$,

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{P.Q}{Q} = P$$

Fungsi Permintaan: $P = 16 - 2Q$

$2Q = 16 - P$

$Q = 8 - 1/2P$

$Q = 8 - 0{,}5P$

Dalam persamaan penerimaan total konstanta k = 0, sebab penerimaan tidak akan ada jika tak ada barang yang dihasilkan atau terjual.

14.1.3 Fungsi Utilitas

Utilitas total : $U = f(Q)$

Utilitas marjinal : $MU = U' = \frac{dU}{dQ} = f'(Q)$

Utilitas total adalah integral dari utilitas marjinal

$$U = \int MU\, dQ = \int f'(Q)\, dQ$$

Contoh:
Carilah persamaan utilitas total dari seorang konsumen jika utilitas marjinalnya MU = 90 – 10Q

Penyelesaian:

Utilitas total : $U = \int MU\, dQ$

$= \int (90 - 10Q)\, dQ$

$= 90Q - 5Q^2$

Seperti halnya produk total dan penerimaan total, disinipun konstanta sama dengan nol (k = 0), sebab tidak akan ada kepuasan atau utilitas yang diperoleh seseorang jika tak ada barang yang tak dikonsumsi.

14.1.4 Fungsi produksi

Produksi total : $TP = f(X)$

di mana TP = output; X = input

Produksi marjinal: $MP = TP' = \frac{dTP}{dX} = f'(X)$

Produksi total adalah integral dari produk marjinal

$TP = \int MP\, dX = \int f'(X)\, dX$

Contoh :

Produksi marjinal sebuah perusahaan dicerminkan oleh $MP=18X- 3X^2$. Carilah persamaan produk total dan produk rata-ratanya.

Penyelesaian:

Produk total : $TP = \int MP\, dX$

$= \int (18X - 3X^2)\, dX$

$= 9X^2 - X^3$

Produk rata-rata: $AP = P/X = 9X - X^2$

Dalam persamaan produk total juga konstanta k = 0, sebab tidak akan ada barang (P) yang dihasilkan jika tak ada bahan (X) yang diolah atau digunakan.

1.1.5 Fungsi Konsumsi dan Fungsi Tabungan

Dalam ekonomi makro, konsumsi (C) dan tabungan (S) dinyatakan fungsional terhadap pendapatan nasional (Y).

$C = f(Y) = a + bY$

$MPC = C' = \frac{dC}{dQ} = f'(Y) = b$

Karena Y = C + S, maka

$S = g(Y) = -a + (1 - b)\,Y$

$MPS = S' = \frac{dS}{dQ} = g'(Y) = (1 - b)$

Berdasarkan kaidah integrasi, konsumsi dan tabungan masing-masing adalah integral dari *marginal propensity to consume* (MPC) dan *marginal propensity to save* (MPS).

$C = \int MPC\,dY = F(Y) + k \qquad k = a$

$S = \int MPS\,dY = G(Y) + k \qquad k = -a$

Konstanta k pada fungsi konsumsi dan fungsi tabungan masing-masing adalah *autonomous consumption* dan *autonomous saving*.

Contoh:
Carilah fungsi konsumsi dan fungsi tabungan masyarakat sebuah negara jika diketahui *autonomous consumption*-nya sebesar 30 M dan MPC = 0,8.

Penyelesaian:

$C = \int MPC\,dY = \int 0{,}8\,dY = 0{,}8Y + 30 \text{ milyar.}$

$S = \int MPS\,dY = \int 0{,}2\,dY = 0{,}2Y - 30 \text{ milyar,}$

Atau $S = Y - C = Y - (0{,}8Y - 30 \text{ milyar}) = 0{,}2Y - 30 \text{ milyar}$

14.1.6 Fungsi Investasi Pembentukan Modal

Investasi bersih (I) didefinisikan sebagai tingkat perubahan dalam formasi saham modal (*capital stock formation*) K selama waktu t. Jika proses formasi atau pembentukan modal berlangsung terus sepanjang waktu, I(t) = dK(t) / dt = K' (t). Pembentukan modal merupakan integral berkenaan dengan waktu investasi bersih.

$Kt = \int I(t)dt = K(t) + k = K(t) + Ko$

k = modal awal = Ko

Contoh:
Tingkat investasi bersih diberikan dengan $I(t) = 140t^{3/4}$ dan investasi modal awal pada t=0 adalah 150. Tentukan fungsi pembentukan modal K. Apabila besarnya modal pada t=2 adalah 400, tentukan besarnya investasi awal.

Penyelesaian:

$K = \int 140t^{3/4}\,dt = 140 \int t^{3/4}\,dt$

$= 140\,(4/7\,t^{7/4}) + k$

$= 80t^{7/4} + k$

$k = Ko = 150$

$K = 80t^{7/4} + 150$

$T = 2$

$400 = 80(2)^{7/4} + k$

$k = 130{,}91$

14.2 INTEGRAL TERTENTU

14.2.1 Surplus Konsumen

Surplus Konsumen (*Consumers' surplus*) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh konsumen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar suatu barang.

Fungsi permintaan $P = f(Q)$ menunjukkan jumlah sesuatu barang yang akan dibeli oleh konsumen pada tingkat harga tertentu. Jika tingkat harga pasar adalah P_e, maka bagi konsumen tertentu yang sebetulnya mampu dan bersedia membayar dengan harga lebih tinggi dari P_e hal ini akan merupakan keuntungan baginya, sebab ia cukup membayar barang tadi dengan harga P_e. Keuntungan lebih semacam inilah yang disebut surplus konsumen. Secara geometri, besarnya surplus konsumen ditunjukkan oleh luas area di bawah kurva permintaan tetapi di atas tingkat harga pasar.

Besarnya surplus konsumen untuk P = f(Q) adalah:

$$C_s = \int_0^{Qe} f(Q)\,dQ - Q_e P_e$$

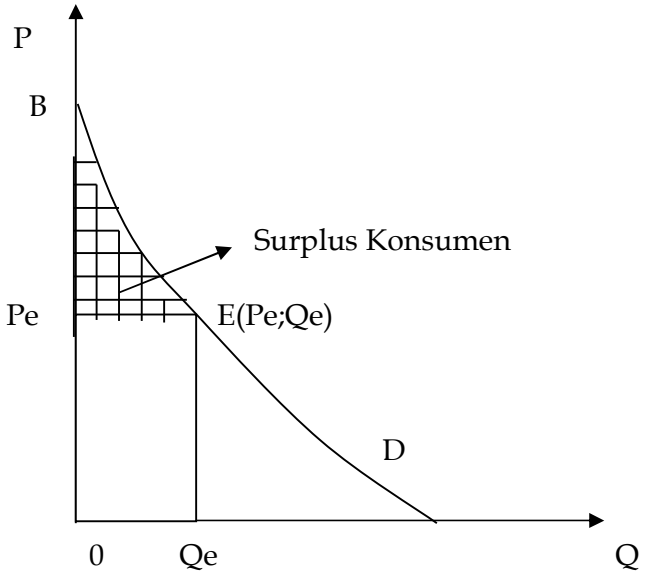
Sedangkan dalam hal fungsi permintaan berbentuk Q = f(P) adalah:

$$C_s = \int_{Pe}^{B} f(P)\,dP$$

Dalam hal fungsi permintaan berbentuk $Q = f(P)$; B adalah nilai P untuk Q = 0 atau penggal kurva permintaan pada sumbu harga.

Dengan demikian,

$$C_s = \int_0^{Qe} f(Q)\,dQ - Q_e P_e = \int_{Pe}^{B} f(P)\,dP$$



Contoh 1:
Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P = 49 - Q^2$. Hitunglah surplus konsumen jika tingkat harga pasar adalah 30 per unit barang.

Penyelesaian:

P = 30 maka, $30 = 49 - Q^2$

$Q^2 = 49 - 30$

$Q^2 = 19$

$Q^2 = \pm 4{,}36$

$$C_S = \int_{Pe}^{B} f(P)\, dP = \int_0^{4,36} (49 - Q^2)\, dQ - P.Q$$

$$= [49Q - \frac{1}{3} Q^3]_0^{4,36} - 30(4{,}36)$$

$$= \{(213{,}64 - 27{,}63) - (0)\} - 130{,}8$$

$$= 186{,}01 - 130{,}8$$

$$= 55{,}21$$

Contoh 2:
Hitunglah surplus konsumen dengan dua macam cara untuk fungsi permintaan Q = 40 – 2P yang tingkat harga pasarnya 10.

Penyelesaian:
Q = 40 – 2P
P = 20 – 0,50Q
Jika P = 0, Q = 40
Jika Q = 0, P = 20 = B
Jika P_e = 10, Q_e = 20

Cara pertama :
Fungsi Permintaan: Q = 40 – 2P

$$C_s = \int_{Pe}^{B} f(P)\, dP = \int_{10}^{20} (40 - 2P)\, dP$$

$$= [40P - \frac{2P^2}{2}]_{10}^{20} = [40P - P^2]_{10}^{20}$$

$$= \{40(20) - (20)^2\} - \{40(10) - (10)^2\} = 400 - 300 = 100.$$

Cara Kedua :
Fungsi Permintaan: Q = 40 - 2P
2P = 40 – Q
P = 20 – 0,5Q

$$C_s = \int_0^{Qe} f(Q)\, dQ - Q_eP_e = \int_0^{20} (20 - 0,5Q)\, dQ - (20)(10)$$

$$= [20Q - 0,25Q^2 \ {}_0^{20}] - 200$$

$$= \{20(20) - 0,25(20)^2\} - \{20(0) - 0,25(0)^2\} - 200$$

$$= 400 - 100 - 200$$

$$= 100$$

1.1.2 Surplus Produsen

Surplus produsen (*Producers' surplus*) mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh produsen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar dari barang yang ditawarkannya.

Fungsi penawaran $P = f(Q)$ menunjukkan jumlah sesuatu barang yang akan dijual oleh produsen pada tingkat harga tertentu. Jika tingkat harga pasar adalah P_e, maka bagi produsen tertentu yang sebetulnya bersedia menjual dengan harga yang lebih rendah dari P_e hal ini akan merupakan keuntungan baginya, sebab ia kini dapat menjual barangnya dengan harga P_e (lebih tinggi dari harga jual semula yang direncanakan). Keuntungan lebih semacam ini disebut surplus produsen ditunjukkan oleh luas area di atas kurva penawaran tetapi di bawah tingkat harga pasar.

Besarnya surplus produsen adalah:

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Qe} f(Q)\, dQ$$

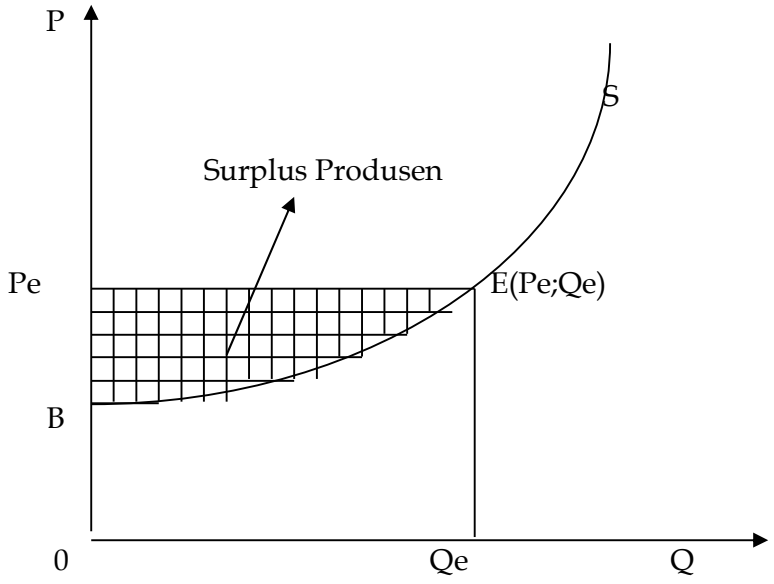
Dalam hal fungsi penawaran berbentuk $P = f(Q)$ atau

$$P_s = \int_B^{Pe} f(P)\, dP$$

Dalam fungsi penawaran berbentuk $Q = f(P)$; B adalah nilai P untuk Q=0, atau penggal kurva penawaran pada sumbu harga.

Dengan demikian :

$$P_s = Q_e P_e - \int_0^{Qe} f(Q)\, dQ = \int_B^{Pe} f(P)\, dP$$



Contoh:

Seorang produsen mempunyai fungsi penawaran yang dinyatakan dalam P = 0,5Q + 3. Berapa surplus produsen itu bila tingkat harga keseimbangan di pasar adalah 10.

Penyelesaian:

Lakukan perhitungan dengan dua cara.

$P = 0{,}5Q + 3 \longrightarrow Q = -6 + 2P$

$P = 0 \quad Q = -6$

$Q = 0 \quad P = 3 = B$

$P_e = 10 \quad Q_e = 14$

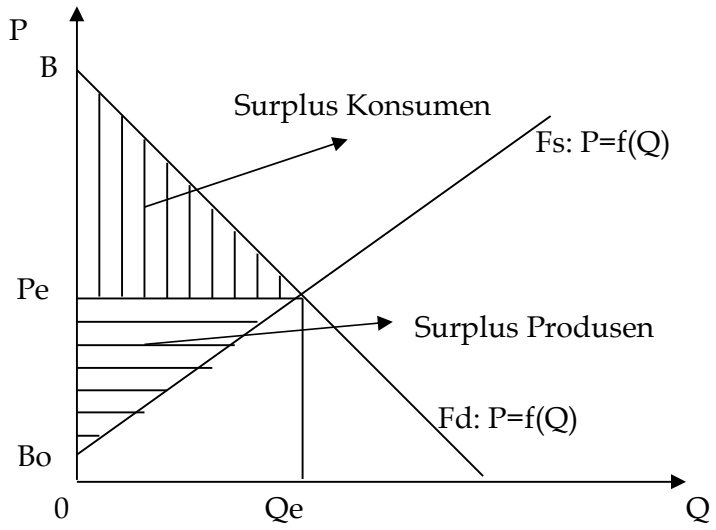
Cara pertama :
Fungsi Penawaran dinyatakan P = 0,5Q + 3 maka pakai cara pertama.

$$P_s = Q_eP_e - \int_0^{Qe} f(Q)\,dQ = (14)(10) - \int_0^{14} (0{,}5Q + 3)\,dQ$$
$$= 140 - [0{,}25Q^2 + 3Q]$$
$$= 140 - \{0{,}25(14)^2 + 3(14)\} - \{0{,}25(0)^2 + 3(0)\}$$
$$= 140 - 91 - 0$$
$$= 49$$

Cara kedua :
Fungsi Penawaran Q = -6 + 2P maka pakai cara ke dua.

$$P_s = \int_P^{Pe} f(P)\,dP = \int_3^{10} (-6 + 2P)\,dP$$
$$= [-6P + P^2] = \{-6(10) + 10^2\} - \{16(3) + 3^2\}$$
$$= 40 - (-9)$$
$$= 49.$$

14.2.3 Surplus Konsumen dan Produsen



Contoh:
Penawaran dan permintaan akan suatu barang di pasar masing-masing ditunjukkan oleh Q = -30 + 5P dan Q = 60 – 4P. Hitunglah masing-masing surplus yang diperoleh konsumen dan produsen.

Penawaran : $Q = -30 + 5P$
$P = 6 + 0{,}2Q$

Permintaan : $Q = 60 - 4P$
$P = 15 - 0{,}25Q$

Keseimbangan pasar : $Q_s = Qd$
$-30 + 5P = 60 - 4P$
$9P = 90$
$P = 10 = P_e$
$Q = 60 - 4P = 60 - 4(10) = 20 = Q_e$

Surplus konsumen: $C_s = \int_0^{Qe} f(Q)\, dQ - Q_e P_e$

$= \int_0^{20} (15 - 0{,}25Q)\, dQ - (20)(10)$

$= \left[15Q - 0{,}125^2\right]_{10}^{20} - 200$

$= 250 - 200$
$= 50.$

Surplus produsen: $P_s = Q_e P_e - \int_0^{Qe} f(Q)\, dQ$

$= (20)(10) - \int_0^{20} (6 + 0{,}2Q)\, dQ$

$= 200 - \left[6Q + 0{,}1Q^2\right]_{10}^{20}$
$= 200 - 160$
$= 40$

1.1.4 Penghasilan Lawan Biaya (Keuntungan)

Laba diperoleh dengan mengurangkan penghasilan dengan biaya, jika Penghasilan lebih besar daripada biaya diperoleh laba, jika dan apabila penghasilan lebih kecil daripada biaya diperoleh rugi.

Laba maksimum diperoleh jika turunan dari laba sama dengan nol atau dapat juga diperoleh dengan mencari dulu turunan dari penghasilan dan biaya, lalu turunan keduanya harus sama.

$$p = TR - TC$$

Laba max terjadi pada:

$$p^{I} = 0 \text{ dan } p^{II} < 0$$

atau,

$$MR = MC$$

$$TR^{I} = MR$$
$$TC^{I} = MC$$

Contoh:

Suatu perusahaan mempunyai fungsi biaya marginal (MC) dan penerimaan marginal (MR) sebagai berikut: $MC = 4 + (Q - 4)^2$ dan $MR = 20 - 2Q$
Tentukan output yang memaksimumkan laba dan besarnya laba total perusahaan tersebut! (*fixed cost* diasumsikan nol)

Jawaban:

$MR = MC$
$20 - 2Q = 4 + (Q - 4)^2$
$20 - 2Q = 4 + Q^2 - 8Q + 16$
$Q^2 - 6Q = 0$
$Q(Q - 6) = 0$
$Q = 0$ (tidak mungkin)
$Q = 6$

$$\pi = \int_0^Q (MR - MC)dQ$$
$$= \int_0^6 (20 - 2Q) - (Q^2 - 8Q + 20)dQ$$
$$= \int_0^6 -Q^2 + 6Q \, . \, dQ$$
$$= [-Q^3/3 + 6Q^2/2]_0^6$$
$$= (-6^3/3 + 3 \, . \, 6^2) - (-0^3/3 + 3 \, . \, 0^2)$$
$$= (-72 + 108) - (0)$$
$$= 36$$

14.3 SOAL LATIHAN

1. CV Surya Kencana adalah perusahaan sepeda yang berlokasi di Jakarta Utara. Saat ini fungsi biaya marjinal perusahaan adalah MC= $Q^2/4+3\ddot{O}Q$. biaya tetap yang dikeluarkan perusahaan sebesar $20.00. Tentukan fungsi biaya total dan biaya rata-ratanya.
2. Suatu perusahaan mempunyai fungsi biaya marginal dan penerimaan marginal sebagai berikut:

   $$MR = 20 - Q \text{ dan } MC = 4 + (Q-4)^2$$

   Tentukan output yang memaksimumkan laba dan berapa laba maksimumnya.
3. Veandi Co. berencana melakukan ekspor produknya ke luar negeri, hal ini dilakukan karena pasar dalam negeri telah mengalami kejenuhan dalam penjualannya. Fungsi biaya marjinal perusahaan adalah MC= $50Q+300/2\ddot{O}Q$. Pada saat tingkat produksi sebesar 2 unit besarnya biaya rata-ratanya adalah $1,000.00. tentukan fungsi biaya totalnya.
4. PT Wijaya Kusuma adalah perusahaan yang bergerak di bidang perakitan komputer untuk memenuhi pasar dalam negeri. Pada saat tingkat produksi sebesar 20 unit, biaya total yang dikeluarkan sebesar sebesar $10,000. Fungsi biaya marjinal perusahaan adalah MC=$3Q^2+4Q+2$. Berdasarkan data tersebut, tentukan fungsi biaya rata-rata perusahaan.
5. Berdasarkan hasil analisis yang dilakukan oleh manajer penelitian dan pengembangan perusahaan menyatakan bahwa fungsi penerimaan marjinal perusahaan adalah MR= $150+2/Q+Q^2/4$. Tentukan fungsi penerimaan total (TR) dan berapa besarnya penerimaan total pada saat tingkat produksi sebesar 3 unit.
6. Dalam upaya meningkatkan labanya, PT Wijaya Bangsa sedang mempertimbangkan melakukan diversifikasi produk untuk meningkatkan penerimaan totalnya. Saat ini fungsi penerimaan marjinal perusahaan adalah MR=2Q-21. Perusahaan menginginkan besarnya penerimaan totalnya adalah sebesar 100. Tentukan pada saat tingkat produksi berapa unit tujuan perusahaan tercapai.
7. Dalam perekonomian tertutup sederhana diketahui tingkat kecenderungan untuk mengkonsumsi adalah MPC = 0,75. Apabila diketahui saat pendapatan sebesar $10,000.00, maka besarnya konsumsi adalah $12,500.00. Carilah fungsi konsumsi dan fungsi tabungannya.
8. Fungsi permintaan yang dihadapi perusahaan monopoli adalah P=Q^2-17Q+30. Tentukan besarnya kelebihan (surplus) konsumen pada saat

kuantitas yang terjual sebesar 18 unit, kemudian tunjukkan dengan gambar surplus konsumen tersebut.

9. PT Jaya Abadi mempunyai fungsi penawaran sebagai berikut $P=(Q+4)^2$. Saat ini harga jual perusahaan adalah sebesar $36.00. Perusahaan sedang mempertimbangkan untuk meurunkan harga jualnya menjadi $32.00. Tentukan bagaimana efek (dampak) dari besarnya kelebihan (surplus) produsen sebagai akibat dari perubahan harga tersebut. Tunjukkan dengan grafiknya.
10. Apabila diketahui fungsi permintaan dan penawaran suatu barang adalah Fd: $P=\frac{24}{Q+2}$ dan Fs: $P=\frac{Q^2}{4}$, tentukan besarnya surplus konsumen dan surplus produsen pada saat keseimbangan pasar, kemudian tunjukkan dalam satu gambar kedua surplus tersebut.
11. CV Jaya Bangsa menghadapi fungsi permintaan untuk produknya adalah $Q=84-P^2$. Sementara fungsi penawaran perusahaan adalah $Q=P+4P^2$. Tentukan besarnya surplus konsumen dan produsen pada saat keseimbangan pasar. Kemudian tentukan surplus konsumen dan produsen yang baru apabila harga jual naik 10% dari harga keseimbangan pasar.
12. Dalam upaya meningkatkan laba maksimumnya, PT Abadi Wijaya menggunakan strategi pemasaran langsung. Saat ini fungsi biaya rata-rata perusahaan adalah $AC=1/20Q+29+100/Q$. Sementara itu pada saat perusahaan menetapkan harga jual sebesar $20.00 jumlah yang diminta sebesar 30 unit. Apabila harga jual naik sebesar 50%, maka jumlah yang diminta turun $33\frac{1}{3}\%$. Tentukan besarnya kuantitas yang harus dijual perusahaan untuk mencapai laba maksimum, dan tentukan berapa besarnya laba maksimum tersebut.
13. Suatu perusahaan mempunyai fungsi permintaan $P = -Q^2 + 274$ dan fungsi biaya marjinal adalah $MC = 3Q+4$. Tentukan besarnya laba maksimum dan berapa surplus konsumen dan produsennya pada saat laba maksimum, kemudian tunjukkan daerah surplus konsumen dan produsen tersebut dalam satu gambar.
14. Fungsi Permintaan Divisi Pemasaran PT Kusuma Wijaya ditunjukkan oleh persamaan berikut: $Q_m= 120 – 10P_m$ dengan fungsi biaya marginalnya (MC) adalah $MC_m = 0,2\ Q_m$. Sementara itu fungsi biaya marginal divisi produksi adalah $MC_p=4+0,2Q_p$. Divisi produksi menjual "*Intermediate Product*" di pasar persaingan sempurna seharga US$ 6 per unit. Tentukan:
    a. Tingkat output optimal divisi produksi.
    b. Tingkat output dan harga optimal divisi pemasaran

Bab 15

ALJABAR MATRIKS

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Menyelesaikan persoalan yang menyangkut konsep operasi matriks;
2. Menyelesaikan bentuk matriks khusus dan transpose matriks;
3. Menghitung dengan matriks partisi;
4. Menghitung determinan matriks;
5. Menghitung invers matriks.

15.1 ALJABAR MATRIKS

Matriks adalah kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang, termuat diantara sepasang tanda kurung.

Secara umum matriks digambarkan seperti di bawah ini:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A_{mxn} adalah matriks yang terdiri atas baris (i) sebanyak m dan kolom (j) sebanyak n. Matriks Amxn dinamakan matriks berordo atau berdimensi m×n.

Misalnya:

Matriks A_{2x3} adalah matriks yang terdiri dari 2 baris dan 3 kolom.

a_{ij} adalah elemen pada baris ke i dan kolom ke j

Misalnya:
a_{21} adalah elemen pada baris ke dua dan kolom ke satu.

15.2 PENGOPERASIAN MATRIKS

15.2.1 Penjumlahan Dan Pengurangan Matriks

Dua buah matriks hanya dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila keduanya berordo sama.

Contoh:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

15.2.2 Perkalian Matriks Dengan Skalar

Hasil kali sebuah matriks dengan suatu skalar/bilangan nyata k adalah sebuah matriks baru yang berordo sama dan unsur-unsurnya k kali unsur-unsur matriks semula.

Contoh:

a. Diketahui: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; k = 3

Maka: $k.A = 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

b. Diketahui: $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; k = 2

Maka: $k.B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

15.1.3 Perkalian Antar Matriks

Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila jumlah kolom dari matriks pertama yang akan dikalikan sama dengan jumlah baris matriks keduanya. Hasil kali kedua matriks tersebut adalah matriks yang berordo jumlah baris matriks pertama dan jumlah kolom matriks kedua.

Contoh:

Jika diketahui: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka A.B = …….

(3X3) **(3X2)**

sama

hasil

$$A.B = \begin{bmatrix} (2.1+1.2+3.1) & (2.2+1.2+3.1) \\ (2.1+2.2+2.1) & (2.2+2.2+2.1) \\ (3.1+2.2+3.1) & (3.2+2.2+3.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 10 \\ 10 & 13 \end{bmatrix}$$

(3X2)

Jika diketahui: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; Maka: $A.B = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 5 & 17 \end{bmatrix}$

(2X3) **(3X2)** **(2X2)**

sama

hasil

15.2 BENTUK-BENTUK KHAS MATRIKS

15.3.1 Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar yang semua unsurnya nol kecuali pada diagonal utama.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

15.3.2 Matriks Skalar

Matriks skalar adalah matriks seperti diagonal tetapi semua elemen pada diagonal utama harus sama.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

15.3.3 Matriks Identitas

Matriks identitas ialah matriks bujursangkar yang semua unsur pada diagonal utama adalah angka-angka 1, sedangkan unsur-unsur lainnya nol.

Contoh:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15.3. 4 Matriks Nol

Matriks nol ialah matriks yang semua unsurnya nol.

Contoh:

$$0_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 0_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka setiap matriks jika dikalikan nol akan menghasilkan matriks nol.

15.4 MATRIKS TRANSPOSE (MATRIKS UBAHAN)

Matriks ubahan (*transpose matriks*) adalah matriks yang merupakan hasil pengubahan matriks lain yang sudah ada sebelumnya, dimana elemen-elemen barisnya menjadi elemen-elemen kolom dan elemen-elemen kolomnya menjadi elemen-elemen baris. Hasil dari *transpose matriks* tersebut diberi notasi A' (jika matriks yang akan di *transpose* adalah matriks A).

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \text{ maka } A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}; \text{ maka } B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

15.4.1 Operasi matriks

a. Ubahan Penjumlahan dan Pengurangan

Ubahan dari jumlah atau selisih beberapa matriks adalah jumlah atau selisih matriks-matriks ubahannya.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A + B + C) = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}; \text{ maka } (A + B + C)' = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

15.4.2 Ubahan Perkalian

Ubahan dari perkalian matriks dengan skalar adalah perkalian skalar dengan matriks ubahannya.

$$\boxed{(kA)' = (kA)'}$$

Contoh:

$$\left\{3\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}\right\} = 3\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

15.4.3 Transpose dari bentuk Matriks Khsusus

Matriks vektor baris

Transpose dari vektor baris berdimensi n (berordo 1xn) adalah vektor kolom berdimensi n (berordo nx1)

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$; maka $A' = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 8]$

Matriks vektor kolom

Transpose dari vektor kolom berdimensi m (berordo mx1) adalah vektor baris berdimensi m (berordo 1xm)

Contoh:

$B = [2 \quad 7 \quad 8]$; maka $B' = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

Matriks Diagonal

Transpose matrik diagonal adalah matrik diagonal itu sendiri.

Contoh:

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}; \text{ maka } A'_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

15.4.4 Matriks Simetrik

Matriks simetrik ialah matriks bujur sangkar yang sama dengan ubahannya. Matriks A dikatakan simetrik apabila A = A'.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

15.4.5 Matriks Idempoten

Matrik idempoten adalah matriks yang sama dengan matriks transposenya dan jika keduanya dikalikan menghasilkan matrik itu sendiri.

$A=A^1$

$A \cdot A^1 = A^1 \cdot A = A = A^1$

Contoh:

$$A_{2X2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \longrightarrow A^1{}_{2X2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\frac{1}{5}.\frac{1}{5}+\frac{2}{5}.\frac{2}{5}) & (\frac{1}{5}.\frac{2}{5}+\frac{2}{5}.\frac{4}{5}) \\ (\frac{2}{5}.\frac{1}{5}+\frac{4}{5}.\frac{22}{5}) & (\frac{2}{5}.\frac{2}{5}+\frac{4}{5}.\frac{4}{5}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{25} & \frac{10}{25} \\ \frac{10}{25} & \frac{20}{25} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

15.4 HUKUM KOMUTATIF, ASOSIATIF, DAN DISTRIBUTIF DARI MATRIKS

15.4.4 Hukum Komutatif

a. Penjumlahan matriks: A+B = B+A
b. Pengurangan matriks: A-B ¹ B-A
c. Perkalian matriks AB ¹ BA

15.4.5 Hukum Asosiatif

a. Penjumlahan matriks: (A+B)+C = A+(B+C)
b. Pengurangan matriks: (A-B)-C ¹ A-(B-C)
c. Perkalian matriks: (AB)C = A(BC)

15.4.6 Hukum Distributif

A(B+C) = AB + AC

15.5 MATRIKS BERSEKAT (MATRIKS PARTISI)

Matriks bersekat adalah membagi matrik menjadi sub-sub matrik, bisa membagi barisnya saja, bisa juga kolomnya saja atau membagi baris sekaligus kolom.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \hdashline A_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ \hdashline 2 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$A' = \begin{bmatrix} A_1 \vdots A_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

Matrik bersekat bisa memudahkan dalam pengoperasian matrik dengan jumlah baris dan kolom yang besar, operasi matrik bersekat bisa untuk penjumlahan, pengurangan dan juga perkalian. Berikut contoh dari matriks bersekat dengan tujuan untuk memudahkan operasi perkalian antar matriks.

Contoh:

Jika diketahui: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ \hdashline 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$AB = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ \hdashline 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 15 \\ 19 & 7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 19 \\ 19 & 11 \\ 17 & 14 \end{bmatrix}$$

15.6 DETERMINAN MATRIKS

Determinan dari sebuah matriks ialah penulisan unsur-unsur sebuah matriks bujur sangkar dalam bentuk determinan, yaitu di antara sepasang garis tegak atau | |.

Determinan dapat dikerjakan hanya pada matriks bujur sangkar, yaitu matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama. Nilai dari determinan adalah sebuah konstanta.

15.6.1 Determinan Derajat Dua

15.6.1.1 Cara ekspansi/perluasan Laplace (Perluasan dari baris 1, baris 2, kolom 1 ataupun kolom 2)

$$A_{2X2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka $|A| = (a11.a22) - (a21.a12)$

Contoh:

$$A_{2X2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Determinan matrik A tersebut dengan perluasan baris pertama

$$|A| = a_{11} |C_{11}| + a_{12} |C_{12}|$$
$$= a_{11} (-1)^{1+1} |M_{11}| + a_{12} (-1)^{1+2} |M_{12}|$$
$$= 2. (-1)^2 |5| + 3. (-1)^3 |1|$$
$$= 10 - 3$$
$$= 7$$

Coba perluasan menurut kolom kedua,

15.6.1.2 Cara langsung

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 2. 5 - 1. 3 = 10 - 3 = 7$$

1.5.2 Determinan Derajat Tiga

1.5.2.1 Cara perluasan baris atau kolom (6 cara), untuk mempermudah pilihlah baris atau kolom yang paling banyak elemen 0 atau 1

$$A_{3X3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

maka | A | =
$\{(a_{11}a_{22}a_{33})+(a_{12}a_{23}a_{31})+(a_{13}a_{21}a_{32})\}-\{(a_{31}a_{22}a_{13})+(a_{32}a_{23}a_{11})+(a_{33}a_{21}a_{12})\}$

Contoh:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

Contoh perluasan menurut baris ketiga

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 6 & 0\end{vmatrix}= a_{31}\,|C_{31}| + a_{32}\,|C_{32}| + a_{33}\,|C_{33}|$$

$= 1\ |C31| + 6\,|C32| + 0\,|C33|$

$$= 1.\ (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix} + 6.\ (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix}4 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}$$

$= 1.\ 1.\ (3.\ 3 - 5.\ 2) + 6\ (-1)\ (4.\ 3 - 5.\ 1)$
$= -1\ -42$
$= -43$

Coba perluasan menurut kolom pertama!

15.6.2.2 Cara Cepat

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 6 & 0\end{vmatrix}$$

$= \{4.\ 2.\ 0 + 3.\ 3.\ 1 + 5.\ 6.\ 1\} - \{5.\ 2.\ 1 + 3.\ 6.\ 4 + 0.\ 1.\ 3\}$
$= -\ 43$

15.6.2.3 Cara Sarros

(Kolom 1 dan 2 ditulis kembali setelah kolom 3)

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 5 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6\end{vmatrix}$$

$= \{4.\ 2.\ 0 + 3.\ 3.\ 1 + 5.\ 2.\ 6\} - \{5.\ 2.\ 1 + 4.\ 3.\ 6 + 3.\ 1.\ 0\}$
$= -\ 43$

15.6. 3 Determinan Derajat Empat

Untuk derajat empat digunakan cara ekspansi/perluasan baris atau kolom (8 cara perluasan)

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Cari determinan A perluasan baris 2 (jawab –66)

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$= a_{21} |C_{21}| + a_{22} |C_{22}| + a_{23} |C_{23}| + a_{24} |C_{24}|$

$= 4 |C_{21}| + 0 |C_{22}| + 1 |C_{23}| + 0 |C_{24}|$

$= 4 |C_{21}| + 1 |C_{23}|$

$$= 4 (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 1 (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 4 (-1) (26) + 1 (-1) (-38)$

$= - 66$

Coba cari determinan tersebut menurut kolom kedua.

Konsep pencarian nilai determinan untuk matriks berordo 3X3 dan 4X4 juga dapat dicari dengan pendekatan lain, yaitu cara ekspansi Laplace dengan pendekatan minor dan kofaktor matriks. Pendekatan ini dilakukan dengan mengambil salah satu baris atau kolom yang dijadikan dasar untuk perhitungan determinan.

$|M_{ij}|$ adalah minor yaitu suatu sub determinan dengan menghapus baris ke i dari kolom ke j yang ada. Sedangkan $|C_{ij}|$ adalah kofaktor yang dapat dicari dengan $|C_{ij}| = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$

$$|A| = \sum (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

Determinan untuk matrik berordo 2x2 dengan ekspansi baris pertama yaitu:

$$|A| = (-1)^{1+1} a_{11} |a_{22}| + (-1)^{1+2} a_{12} |a_{21}|$$

Determinan untuk matrik yang berordo 3x3 dengan ekspansi baris pertama yaitu:

$$|A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Determinan matrik berordo 4x4 dengan ekspansi baris pertama yaitu:

$$A_{4X4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}$$

$$a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \{(a_{22}a_{33}a_{44}) + (a_{23}a_{34}a_{42}) + (a_{24}a_{32}a_{43})\} - \{(a_{42}a_{33}a_{24}) + (a_{43}a_{34}a_{22}) + (a_{44}a_{32}a_{23})\}$$
$$-a_{12}\{(a_{21}a_{33}a_{44}) + (a_{23}a_{34}a_{41}) + (a_{24}a_{31}a_{43})\} - \{(a_{41}a_{33}a_{24}) + (a_{43}a_{34}a_{21}) + (a_{44}a_{31}a_{23})\} +$$
$$a_{13}\{(a_{21}a_{32}a_{44}) + (a_{22}a_{34}a_{41}) + (a_{24}a_{31}a_{42})\} - \{(a_{41}a_{32}a_{24}) + (a_{42}a_{34}a_{21}) + (a_{44}a_{31}a_{22})\} -$$
$$a_{14}\{(a_{21}a_{32}a_{43}) + (a_{22}a_{33}a_{41}) + (a_{23}a_{31}a_{42})\} - \{(a_{41}a_{32}a_{23}) + (a_{42}a_{33}a_{21}) + (a_{43}a_{31}a_{22})\}$$

Contoh 1: Tentukan determinan dari matriks 2X2 di bawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$|A| = (-1)^{1+1}.(-1)|2| + (-1)^{1+2}(3)|3|$

$|A| = (-1.2) - (3.3) = -11$

Contoh 2: tentukan determinan dari matriks 3X3 di bawah ini.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$|B| = \{(2.1.3)+(1.1.3)+(2.0.3)\} - \{(3.1.2)+(3.1.2)+(3.0.1)\}$$

$= -3$

apabila pencarian determinan menggunakan cara perluasan Laplace matriks maka memberikan hasil yang sama. Di bawah ini menggunakan kolom pertama sebagai patokan.

$$|B| = (-1)^{1+1}\,2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix} + (-1)^{2+1}\,0\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix} + (-1)^{3+1}\,3\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$= 2(0) - 0(-3) + 3(-1)$

$= -3$

apabila kita menggunakan baris/kolom yang lain juga memberikan hasil determinan yang sama, misalnya digunakan baris kedua.

$$|B| = (-1)^{2+1}\,0\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\,1\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\,1\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}$$

$= -0(-3) + 1(0) - 1(-3)$

$= -3$

Contoh 3: tentukan determinan dari matriks 4X4 di bawah ini.

$$C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 3 & 3\\ 2 & 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Digunakan baris pertama sebagai patokan

$$|C| = (-1)^{1+1}\,1\begin{vmatrix}0 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\,0\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} + (-1)^{1+3}$$

$$2\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\,2\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 1\{(0.3.1)+(3.2.1)+(3.2.2)\} - \{(1.3.3)+(2.2.0)+(1.2.3)\} - 0 +$$
$$2\{(1.2.1)+(0.2.1)+(3.2.1)\} - \{(1.2.3)+(1.2.1)+(1.2.0)\} -$$
$$2\{(1.2.2)+(0.3.1)+(3.2.1)\} - \{(1.2.3)+(1.3.1)+(2.2.0)\}$$

$= 1((0+6+12)-(9+0+6)) - 0 + 2((2+0+6)-(6+2+0)) - 2((4+0+6)-(6+4+0))$

$= 3 - 0 + 0 - 0$

$|C| = 3$

catatan:
Untuk lebih mudah perhitungan mencari detrminan, lebih baik gunakan baris atau kolom yang memiliki angka 0 terbanyak.

15.7 INVERSE MATRIKS

Matriks balikan (*inverse matriks*) ialah matriks yang apabila dikalikan dengan matriks awal (sebelum didapatkan matriks *inverse*) akan menghasilkan sebuah matriks identitas.

Konsep inverse matriks sangat berhubungan dengan konsep determinan, karena untuk menentukan suatu matriks apakah memiliki inverse harus di cari besarnya nilai determinan. Suatu matriks memilik inverse apabila nilai determinan yang diperoleh dari hasil perhitungan terhadap suatu matriks adalah tidak sama dengan 0 (determinan ≠ 0).

Langkah-langkah pengerjaan untuk mencari inverse matriks adalah sebagai berikut:

1. mencari nilai determinan (determinan ≠ 0);
2. mencari matriks kofaktor (C) untuk matriks tersebut dengan cara mengganti setiap elemen matrik tersebut dengan kofaktornya;
3. mencari matriks adjoin (Adj. A) dengan cara mentranspose matriks kofaktor;
4. membagi matriks adjoin (langkah 3) dengan determinan (langkah 1).

Untuk membuktikan bahwa inverse matriks yang telah dicari adalah benar, maka dapat dilakukan pembuktian. Misalnya kita mencari inverse matriks A, maka pembuktiannya sebagai berikut:

$$AA^{-1} = I$$

Matriks A apabila dikalikan dengan inverse matriks A (A^{-1}) akan menjadi matriks identitas.

Mencari invers matrik bujur sangkar ada 2 cara yaitu:

1. Inverse Matriks Dengan Metode Adjoint

Inverse matriks bujur sangkar contohnya adalah sebagai berikut ini:

1. Untuk matrik bujur sangkar 2x2 contoh : $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

   $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

   - $|A| = (4.2) - (2.1) = 6$; $|A| \neq 0$ berarti ada matriks inversenya
   - $C = \begin{bmatrix} |c_{11}| & |c_{12}| \\ |c_{21}| & |c_{22}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

- Adj. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}{6} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

Pembuktian: $AA^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (terbukti)}$$

2. Untuk matrik bujur sangkar 3x3 contoh : $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

- $C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} -7 & 10 & -8 \\ -2 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

- Adj. $B = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 5 \\ 10 & 2 & -5 \\ -8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

- $B^{-1} = \frac{\text{Adj. } B}{|B|} = \frac{\begin{bmatrix} -7 & -2 & 5 \\ 10 & 2 & -5 \\ -8 & -1 & 4 \end{bmatrix}}{3} = \begin{bmatrix} -7/3 & -2/3 & 5/3 \\ 10/3 & 2/3 & -5/3 \\ -8/3 & -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}$

Pembuktian: $BB^{-1} = I$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7/3 & -2/3 & 5/3 \\ 10/3 & 2/3 & -5/3 \\ -8/3 & -1/3 & 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{(terbukti)}$$

2. Inverse Matriks Dengan Metode Eliminasi Gauss

Pencarian inverse pada suatu matriks, tidak hanya dapat diselesaikan dengan metode di atas. Akan tetapi pancarian suatu inverse juga dapat dilakukan dengan metode eliminasi Gauss. Pada intinya pengerjaan metode ini dilakukan dengan mengganti matriks asli menjadi matriks identitas, yang mana hasil perubahan matriks tersebut adalah inverse matriks.

Langkah-langkah pengerjaan:

Membuat matriks pembersaran yang menggabungkan matriks asli dengan matrik identitas, di mana matriks asli diletakkan di sebelah kiri dan matriks identitas di sebelah kanan serta dibatasi oleh suatu sekat.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} A_{11} & A_{12} & 1 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Mengubah matriks asli menjadi matriks identitas dengan cara melakukan operasi terhadap kolom dan baris. Pengoperasian pada kolom dan baris dilakukan pertama kali terhadap kolom pertama.

ÿ Kolom pertama (baris pertama): merubah A_{11} menjadi 1, yaitu dengan cara membagi dengan bilangan A_{11} itu sendiri. Seluruh elemen baris pertama juga mengalami perubahan, yaitu dengan cara di bagi A_{11}. Apabila pada kolom pertama dan baris pertama telah berupa angka 1 maka dilanjutkan pada baris kedua dan kolom pertama.

Kolom pertama (baris kedua): merubah A_{21} menjadi 0, yaitu dengan cara menambah atau mengurangi dengan bilangan tersebut yang telah dikalikan pada baris pertama (A_{21}-A_{21} (A_{11})). Seluruh elemen pada baris kedua juga mengalami perubahan yang sama seperti pada A_{21}.

ÿ Kolom kedua (baris kedua): dilakukan langkah yang sama pada A_{11}, yaitu merubah A_{22} menjadi 1

Kolom kedua (baris kedua): juga dilakukan langkah yang sama pada langkah di atas, yaitu merubah A_{12} menjadi 0.

Setelah dilakukan seluruh langkah-langkah di atas, maka inverse dari matriks tersebut telah ditemukan, yaitu pada saat seluruh elemen pada matriks sebelah kiri telah menjadi matriks identitas. Hasil inverse matriks tersebut adalah matriks pada sebelah kanan.

Contoh 1:

Cari inverse matriks dengan metode eliminasi Gauss untuk matriks 2x2 berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$B_1 : 4 \quad \left[\begin{array}{cc:cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$B_2 - 2(B_1) \quad \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$B_2 : 3/2 \quad \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$

$B_1 - 1/4(B_2) \quad \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right]$

Langkah pencarian inverse di atas telah selesai, dengan demikian inverse matriks telah didapatkan.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

Contoh 2:

Cari inverse matriks dengan metode eliminasi Gauss untuk matriks 3x3 berikut ini:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Pada baris pertama dan kolom pertama telah berupa angka 1 berarti dilanjutkan ke langkah berikutnya. Begitu pula pada kolom pertama dan baris kedua telah berupa angka 0, berarti kita lanjutkan ke langkah berikutnya kembali.

$B_3 - 2(B_1)$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$B_2 : 4$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$B_1 - 1(B_2)$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$B_3 - 1(B_2)$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5/4 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 5/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$B_3 : 3/4$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5/4 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 5/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & -2 & -1/4 & 1 \end{array}\right]$

$B_1 + 5/4(B_3)$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5/4 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 5/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8/3 & -1/3 & 4/3 \end{array}\right]$

$B_2 - 5/4(B_3)$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/3 & -2/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 5/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8/3 & -1/3 & 4/3 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/3 & -2/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 10/3 & 2/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -8/3 & -1/3 & 4/3 \end{array}\right]$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -7/3 & -2/3 & 5/3 \\ 10/3 & 2/3 & -5/3 \\ -8/3 & -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}$

15.8 SOAL LATIHAN

1. Diketahui: $X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; dan $Z = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

   Pertanyaan:
   a. X + Y
   b. X – Z
   c. 5Y
   d. 2X + 3Z
   e. 3Y – 2X

2. Diketahui: $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 7 \\ 2 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; dan $R = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ -3 & 2 & 4 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

   Pertanyaan:
   a. PQ
   b. QR
   c. PR

3. Tentukan determinan dari matriks-matriks di bawah ini.

   a. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

   b. $B = \begin{bmatrix} 1/2 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

   c. $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

   d. $D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

   e. $E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

4. Carilah inverse matriks (jika ada):

a. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 1/2 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

d. $D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

Bab 16 SISTEM PERSAMAAN LINIER SIMULTAN DAN PENERAPAN DALAM ILMU EKONOMI

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:
1. Menjelaskan pemahaman sistem persamaan linier simultan
2. Menghitung sistem persamaan linier simultan dengan cara matrik Cramer, Invers dan Gauss

16.1 SISTEM PERSAMAAN DALAM MATRIK

Pada pokok pembahasan sebelumnya suatu persamaan yang bersifat simultan dengan dua variabel bebas dipecahkan dengan cara substitusi atau eliminasi. Akan tetapi persamaan tersebut juga dapat dipecahkan dengan cara matriks. Dalam metode ini sistem persamaan ditransformasikan ke dalam suatu matriks (matriks bujur sangkar) dan setelah itu dicari pemecahan dari nilai-nilai variabel tersebut.

Ada tiga metode dalam pemecahan persamaan linier, yaitu:
1. Aturan Crammer (*Crammer's Ruler*)
2. Metode *Inverse*
3. Metode Eliminasi Gauss (*Elimination Gauss*)

16.2. ATURAN CRAMMER (CRAMMER'S RULER)

Konsep pengerjaan menurut aturan Crammer menggunakan pendekatan determinan, maksudnya aturan ini hanya mencari nilai determinan-determinan yang diperlukan untuk menetukan besarnya nilai variabel-variabel tersebut.

Misalnya, diketahui dua persamaan sebagai berikut:

$aX + bY = c$
$dX + eY = f$

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah membuat persamaan tersebut ke dalam matriks.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

--A-- -X- -H-

Misalnya $A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$, untuk menentukan nilai X dan Y dilakukan pendekatan determinan.

$$X = \frac{|A_1|}{|A|}, \text{ dan } Y = \frac{|A_2|}{|A|}$$

Untuk mencari $|A_1|$ dan $|A_2|$, maka terlebih dahulu menentukan matriks A_1 dan A_2. Matriks A_1 adalah matriks A yang mana kolom pertama diganti dengan kolom hasil sementara kolom kedua tetap. Sedangkan matrik A_2 adalah matriks A yang mana kolom keduanya diganti dengan kolom hasil sementara kolom pertamanya tetap. Dengan demikian matriks A_1 dan A_2 dapat diketahui.

$$A_1 = \begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix} \text{ dan } A_2 = \begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}$$

Contoh 1: Tentukan besarnya nilai X dan Y dari persamaan-persamaan di bawah ini.

$2X + 3Y = 13$
$3X + Y = 9$

Penyelesaian:

Langkah 1: merubah bentuk persamaan ke dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Langkah 2: mencari nilai determinan A, A_1, dan A_2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \ |A| = -7$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \ |A_1| = -14$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \ |A_2| = -21$$

Langkah 3: menentukan nilai masing-masing variabel

$$X = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$Y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-21}{-7} = 3$$

Jadi, besarnya nilai X = 2 dan Y = 3 yang memenuhi persamaan di atas.

Contoh 2: Tentukan besarnya nilai X, Y, dan Z dari persamaan-persamaan di bawah ini.

X + 2Y + Z = 8
2X – Y + 3X = 8
3X + Y – 2Z = 4

Penyelesaian:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}} = \underset{H}{\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}; |A| = 1\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -1+26+5=30$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}; |A_1| = 8\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = -8+56+12=60$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}; |A_2| = 1\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -28+104-16=60$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}; |A_3| = 1\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -12+32+40=60$$

$$X = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{60}{30} = 2$$

$$Y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{60}{30} = 2$$

$$Z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{60}{30} = 2$$

Jadi, besarnya nilai X = 2, Y = 2 dan Z = 2 yang memenuhi persamaan di atas.

16.3. METODE INVERSE

Konsep pengerjaan dengan metode inverse identik dengan pendekatan Crammer. Apabila pada aturan Crammer menggunakan pendekatan determinan dalam penetuan nilai variabel, pada metode inverse digunakan pendekatan inverse. Menurut pendekatan Cramer sebelumnya bahwa A.X = H, kemudian nilai X dicari dengan pendekatan determinan. Akan tetapi dengan pendekatan inverse untuk mencari nilai X terlebih dahulu harus diketahui inverse dari matriks A.

$$A.X = H$$

$$X = \frac{H}{A}$$

$$X = A^{-1}.H$$

Berarti setelah didapatkan inverse matriks dari A, maka langkah selanjutnya mengalikan hasil kali tersebut dengan matriks hasil (H). Hasil perkalian kedua matriks tersebut adalah jawaban dari nilai-nilai variabel tersebut.

Berdasarkan contoh pada aturan Crammer di atas, kita kerjakan contoh tersebut dengan metode inverse.

Contoh 1: Tentukan besarnya nilai X dan Y dari persamaan-persamaan di bawah ini.

$2X + 3Y = 13$
$3X + Y = 9$

Penyelesaian:

Langkah 1: merubah bentuk persamaan ke dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \end{bmatrix}$$

--A-- -X- -H -

Langkah 2: mencari matriks inverse A (A^{-1})

- $|A| = -7$; $|A| \neq 0$ berarti ada matriks inverse-nya.
- $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
- Adj. $A = C' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}{-7} = \begin{bmatrix} -1/7 & 3/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{bmatrix}$

Langkah 3: mengalikan hasil inverse tersebut dengan matriks hasil

$$X = A^{-1}.H$$

$$\begin{bmatrix} -1/7 & 3/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$X = (-1/7.13) + (3/7.9) = -13/7 + 27/7 = 2$
$Y = (3/7.13) + (-2/7.9) = 39/7 + -18/7 = 3$

Contoh 2: Tentukan besarnya nilai X, Y, dan Z dari persamaan-persamaan di bawah ini.

$X + 2Y + Z = 8$
$2X – Y + 3X = 8$
$3X + Y – 2Z = 4$

Penyelesaian:

Langkah 1: merubah bentuk persamaan ke dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

-----A----- -X- -H-

Langkah 2: mencari matriks inverse A (A^{-1})

- $|A| = 1\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -1+26+5=30;$
  $|A| \neq 0$ berarti ada matriks inverse-nya.

- $$C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -1 & 13 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \\ 7 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

➢ $\text{Adj. A} = C' = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 13 & -5 & -1 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$

➢ $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj. A}}{|A|} = \dfrac{\begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 13 & -5 & -1 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}}{30} = \begin{bmatrix} -1/30 & 5/30 & 7/30 \\ 13/30 & -5/30 & -1/30 \\ 5/30 & 5/30 & -5/30 \end{bmatrix}$

Langkah 3: mengalikan hasil inverse tersebut dengan matriks hasil

$$X = A^{-1}.H$$

$$\begin{bmatrix} -1/30 & 5/30 & 7/30 \\ 13/30 & -5/30 & -1/30 \\ 5/30 & 5/30 & -5/30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$X = (-1/30.8) + (5/30.8) + (7/30.4) = 2$
$Y = (13/30.8) + (-5/30.8) + (-1/30.4) = 2$
$Z = (5/30.8) + (5/30.8) + (-5/30.4) = 2$

16.4 METODE ELIMINASI GAUSS (*ELIMINATION GAUSS*)

Pada prinsipnya penyelesaian persamaan dengan metode ini adalah sama dengan pencarian inverse matriks pada metode ini pula. Kalau pada inverse matriks, matriks sebelah kanan adalah matriks identitas, maka pada sistem persamaan linier matriks sebelah kanan adalah matriks hasil (H). Langkah pengerjaan metode ini, yaitu dengan cara merubah matriks sebelah kiri menjadi matriks identitas. Setelah menjadi matriks identitas maka matriks sebelah kanan merupakan jawaban dari persamaan linier tersebut.

Contoh 1:
Tentukan besarnya nilai X dan Y dari persamaan-persamaan di bawah ini dengan menggunakan eliminasi Gauss.

$2X + 3Y = 13$
$3X + Y = 9$

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 13 \\ 3 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

$B_1 : 2 \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 13 \\ 3 & 1 & 9 \end{array}\right]$

$B_2 - 3(B_1) \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3/2 & 13/2 \\ 3 & 1 & 9 \end{array}\right]$

$B_2 : -7/2 \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3/2 & 13/2 \\ 0 & -7/2 & -21/2 \end{array}\right]$

$B_1 - 3/2(B_2) \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3/2 & 13/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Jadi, nilai X = 2 dan Y = 3 yang memenuhi persamaan tersebut di atas.

Contoh 2: Tentukan besarnya nilai X, Y, dan Z dari persamaan-persamaan di bawah ini dengan menggunakan eliminasi Gauss.

X + 2Y + Z = 8
2X – Y + 3X = 8
3X + Y – 2Z = 4

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$B_2 - 2(B_1)$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$B_3 - 3(B_1)$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & -8 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$B_2 : -5$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & -5 & -5 & -20 \end{bmatrix}$

$B_3 + 5(B_2)$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1/5 & 8/5 \\ 0 & -5 & -5 & -20 \end{bmatrix}$

$B_1 - 2(B_2)$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

$B_3 : -6$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/5 & 24/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$

$B_1 - 7/5(B_3)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/5 & 24/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$B_2 + 1/5(B_3)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Jadi, nilai X = 2, Y = 2, dan Z = 2 yang memenuhi persamaan di atas.

16.5 PENERAPAN DALAM ILMU EKONOMI

Contoh penerapan dalam Ilmu Ekonomi, adalah sebagai berikut: Pemilik kios beras memiliki 2 buah kios pada 2 pasar di suatu kota , beras yang dijual ada 2 macam beras (X dan Y). Pada bulan pertama kedai dibuka: Kios pada pasar I menjual beras jenis X sebanyak 2 kwintal dan beras jenis Y sebanyak 3 kwintal, total penerimaannnya 13 juta Rupiah . Kios pada pasar II menjual beras jenis X sebanyak 3 kwintal dan beras jenis Y sebanyak 1 kwintal, total penerimaannnya 9 juta Rupiah. Susunlah Persamaan matrik tersebut lalu carilah harga per kg beras X dan harga per kg beras Y, gunakan metode Cramer untuk menyelesaikannya !
Persamaan-persamaannya adalah :

$2Px + 3Py = 13$
$3Px + 1Py = 9$

Penyelesaian:
Langkah 1: merubah bentuk persamaan ke dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Langkah 2: mencari nilai determinan A, A_1, dan A_2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \ |A| = -7$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \ |A_1| = -14$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \ |A_2| = -21$$

Langkah 3: menentukan nilai masing-masing variabel

$$Px = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-14}{-7} = 2$$

$$Py = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-21}{-7} = 3$$

Jadi, besarnya nilai X = 2 dan Y = 3 yang memenuhi persamaan di atas.

Harga perkwintal beras X adalah Rp 2000.000, dan harga perkwintal beras Y adalah Rp 3000.000.

Jadi harga beras X per kwintal (100kg) adalah Rp 2000.000 : 100 kg = Rp20.000, sedangkan harga beras Y per kwintal adalah Rp 3000.000 : 100 kg = Rp30.000,

16.6 SOAL LATIHAN

1. Gunakan Aturan Crammer (*Crammer's Ruler*), metode Inverse, dan metode Eliminasi Gauss (*Elimination Gauss*) untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (2X2) di bawah ini.

1.	A + B	= 5	4.	X – 5Y	= 85
	2A + 4B	= 10		2X + 4Y	= 40
2.	3A + 5B	= 11	5.	3X + 4Y	= 25
	7A + B	= 15		-2X + 5Y	= 14
3.	4A – 3B	= 14	6.	2X – 3Y	= 5
	A + 4B	= 13		-X + 2Y	= -2

2. Gunakan Aturan Crammer (*Crammer's Ruler*), metode Inverse, dan metode Eliminasi Gauss (*Elimination Gauss*) untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (3X3) di bawah ini.

1.	A + 2B + 3C	= 14	2.	X + 4Y – 3Z	= 16
	-A + B +2C	= 7		8X – 12Y + 4Z	= -10
	3A – 2B + 5C	= 16		-2X – 3Y -Z	= 14
3.	A + B - C	= 0	4.	-X + 2Y – 3Z	= 13
	2A + B + 3C	= 9		2X – 4Y +Z	= -36
	A + 3B + C	= 6		3X – 6Y + 9Z	= -39

3. Penerapan dalam ilmu ekonomi;Pemilik kedai kopi memiliki 2 buah kedai kopi di Jakarta selatan dan Jakarta Barat , kopi yang dijual ada 2 macam (A dan B).Pada hari pertama kedai dibuka: Kedai pertama menjual kopi jenis A sebanyak 8 gelas dan 6 gelas kopi B, total penerimaannya 2000 satuan mata uang (smu). Kedai kedua menjual kopi jenis A sebanyak 10 gelas dan 10 gelas kopi B, total penerimaannya 3000 satuan mata uang (smu).

   Persamaan persamaan dari permasalahn tersebut adalah:

   $8P_A + 6P_B = 2000$

   $10P_A + 10P_B = 3000$

   Carilah harga per gelas kopi A($=P_A$) dan harga per gelas kopi B($=P_B$), gunakan metode Cramer, inverse atau Gauss untuk menyelesaikannya!

Bab 17 MAKSIMUM DAN MINIMUM FUNGSI

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Mencari nilai dari n variabel dalam persamaan linear simultan dengan cara standar;
2. Mencari nilai dari n variabel dalam persamaan linear simultan dengan cara invers;
3. Mencari nilai dari n variabel dalam persamaan linear simultan dengan cara Gauss;
4. Menerapkan konsep persamaan linear simultan dengan metode (standar, invers, dan Gauss) dalam Ilmu Ekonomi dan Bisnis.

17.1 PENDAHULUAN

Pada bagian ini kita akan digambarkan penggunaan aljabar matriks dalam penentuan maksimum dan minimum dari fungsi tujuan yang mengandung n variabel yaitu $Z= f(X_1, X_2 \ldots X_n)$.

17.2 MAKSIMUN DAN MINIMUM FUNGSI DARI N VARIABEL TANPA KENDALA

Kondisi yang diperlu dan dibutuhkan untuk menentukan apakah sebuah titik itu maksimun atau minimum dari sebuah objectif function dengan n variabel. Fungsi dengan n variabel adalah $Z= f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Syarat untuk titik ekstrim adalah semua derivatif parsial ordo pertama adalah 0.

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = \frac{\partial f}{\partial X_2} = \ldots\ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial X_n} = 0$$

Kondisi maksimum dan minimum dari fungsi tersebut dapat berupa kondisi yang tanpa kendala maupun yang dengan kendala setelah syarat diperoleh, selanjutnya dilakukan syarat cukup dengan mencari determinan dari turunan parsial kedua disebut sebagai *determinan Hess/Hessian* dengan symbol $|H_n|$ atau Δ_n

$$|H_n| = \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_n \partial X_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_n \partial X_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_n^2} \end{vmatrix}$$

Penentuan maksimum atau minimum maka dicari:

$$|H_1| = \Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}$$

$$|H_2| = \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} \end{vmatrix}$$

$$|H_3| = \Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_3 \partial X_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_3 \partial X_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_3^2} \end{vmatrix}$$

$|Hn| = \Delta n$

Kesimpulan perhitungan determinan Hessian adalah:

Titik maksimum bila : $\Delta_1 < 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 < 0;\ldots.$
Titik minimum bila : $\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 > 0;\ldots.$

Apabila dijumpai kondisi di luar itu, maka fungsi harus diuji dalam wilayah titik tertentu tadi. Perlu diingat bahwa kondisi maksimum dan minimum dari suatu fungsi dengan dua variabel atau lebih merupakan suatu kasus khusus atau pengecualian terhadap kondisis untuk fungsi dengan n variabel tersebut.

Contoh 1:
Tentukan titik maksimun dan minimum (jika ada) dari fungsi berikut:
$f(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2 + 10X_1 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$

Jawab :

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = X_2 + 10 - X_1 = 0 \quad \rightarrow \quad -2X_1 + X_2 = -10$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} = X_1 - X_2 = 0 \quad \rightarrow \quad X_1 - 2X_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_3} = 2X_3 = 0 \quad \rightarrow \quad -2X_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 \\ X1 \\ X1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A \,.\, X = C$

$$|A| = 0 + 0 - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2.\ (3) = 6$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = 0 + 0 - 2 \begin{vmatrix} -10 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.\ (20) = -40$$

$X_1 = \left|\frac{A_1}{A}\right| = \frac{-40}{-6} = \frac{20}{3}$

$|A_2| = 0 + 0 + (-2)\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 10.(-2) = -20$

$X_2 = \left|\frac{A_2}{A}\right| = \frac{-20}{-6} = \frac{10}{3}$

$A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -10 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$|A_3| = -10\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} +$

$X_3 = \left|\frac{A_3}{A}\right| = 0$

$\Delta_1 = -2$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$

$\Delta_3 = |A| = -6$

$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$ jadi $\left(\frac{20}{3}, \frac{10}{3}, 0\right)$ adalah titik maksimum dari fungsi

$f(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2 + 10X_1 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$

Contoh 2:

Tentukan titik maksimum dan minimum (jika ada) dari fungsi berikut:

$f(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 + X_1 + X_2 - 2X_3 - 7X_1 + 12$

Jawab:

$\frac{\partial f}{\partial X_1} = 2X_1 + X_2 - 7 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial X_2} = 4X_2 + X_1 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial X_3} = 2X_3 - 2 = 0$$

Jika $\frac{\partial f}{\partial X_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial X_2} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial X_3} = 0$, maka

$$2X_1 + X_2 = 7$$
$$X_1 + 4X_2 = 0$$
$$2X_3 = 2$$

Nilai X_1, X_2 dan X_3 dapat dicari dengan menggunakan pendekatan matriks. Dari hasil perhitungan, dapat diperoleh:

$X_2 = -1$
$X_1 = 4$
$X_3 = 1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_3^2} = 2$$

$\Delta_1 = -2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 0 + 0 - (0 + 0 + 2) = 14$$

$\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 > 0$, jadi titik (4,-1,1) adalah titik minimum dari fungsi

$f(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 + X_1X_2 - 2X_3 - 7X_1 + 12$

17.3 MAKSIMUM DAN MINIMUM DENGAN KENDALA

17.3.1. Kendala Persamaan (Multiplier Lagrange)

Sebuah fungsi tujuan dengan n variabel f (X_1, X_2, X_3) dengan batasan g(X_1, X_2.....X_n) = 0, maka turunan pertama dari fungsi tersebut adalah:

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial X_1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial X_2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial X_n} = 0$$

Proses pencarian determinan Hessian untuk fungsi dengan kendala menggunakan pendekatan n+1, Δ_{n+1} atau $\left|\overline{H_n}\right|$

$$\left|\overline{H_n}\right| = \Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & gx_1 & gx_2 & \cdots & gx_n \\ gx_1 & fx_1x_1 - \lambda gx_1x_1 & fx_1x_2 - \lambda gx_1x_2 & \cdots & fx_1x_n - \lambda gx_1x_n \\ gx_2 & fx_2x_1 - \lambda gx_2x_1 & fx_2x_2 - \lambda gx_2x_2 & \cdots & fx_2x_n - \lambda gx_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ gx_n & fx_nx_1 - \lambda gx_nx_1 & fx_nx_2 - \lambda gx_nx_2 & \cdots & fx_nx_n - \lambda gx_nx_n \end{vmatrix}$$

Kesimpulan perhitungan Determinan Hessian adalah:
Titik maksimum bila : $\Delta_3 < 0$; $\Delta_4 > 0$; $\Delta_5 > 0$,……
Titik minimum bila : $\Delta_3 < 0$; $\Delta_4 < 0$; $\Delta_5 < 0$,……

Contoh 1:
Tentukan apakah fungsi di bawah ini maksimum/minimum pendekatan Determinan Hessian berkendala.

f(X,Y,Z) = $-X^2 - 2Y^2 - Z^2 + XY + Z$

Kendala: $X + Y + Z = 35$

Jawab :

$$f(X,Y,Z,\lambda) = -X^2 - 2Y^2 - Z^2 + XY + Z - \lambda(X + Y + Z - 35)$$

$$\frac{\partial f}{\partial X} = -2X + Y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = -4Y + X - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial Z} = -2Z + 1 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = -(X + Y + Z - 35) = 0$$

$$-2X + Y = \lambda$$
$$-4Y + X = \lambda$$
$$-2Z + 1 = \lambda$$

Dari persamaan pertama dan kedua

$$3X = 5Y$$
$$X = \frac{3}{5}Y$$

Dari persamaan pertama dan ketiga

$$-2Z + 1 = Y - \frac{10}{3}Y = -\frac{7}{3}Y$$

$$Z = \frac{1 + \frac{7}{3}Y}{2} = \frac{3 + 7Y}{6}$$

Substitusi X dan Z dalam persamaan kendala X + Y + Z = 35

$$\frac{5y}{3} + y + \frac{3 + 7y}{6} = 35$$
$$10y + 6y + 3 + 7y = 210$$
$$23y = 207$$
$$y = 9$$
$$x = \frac{5y}{3} = 15$$
$$z = \frac{3 + 7y}{6} = 11$$
$$\lambda = -2x + y = -21$$

$f_{xx} = -2 \quad f_{yy} = -4 \quad f_{zz} = -2$

$f_{xy} = 1 \quad f_{xz} = 0 \quad f_{yz} = 0$

$g_x = 1 \quad g_y = 1 \quad g_z = 1$

$g_{xx} = 0 \; g_{yy} = 0 \quad g_{zz} = 0$

$g_{xy} = 0 \; g_{xz} = 0 \quad g_{yz} = 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (0+1+1) - (-2+0-4) = 8$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - [8+0+0-(0+0-2)] + [-2+0+0-(0+0+4)] - [0+8+0-(1-0+0)]$$

$$= 0 - 10 - 6 - 7 = 23$$

17.3.2. Kendala Pertidaksamaan (KUHN-TUCKER)

Sebuah fungsi dengan n variabel $f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ dengan batasan $g(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n) \leq$ atau ≥ 0. Untuk pengerjaan metode ini dapat dikerjakan dengan mengsumsikan kendala pertidaksamaan dapat dikerjakan dengan kendala persamaan. Maka turunan pertama dari fungsi tersebut adalah:

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial X_1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial X_2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial X_n} = 0$$

Proses pencarian determinan Hessian untuk fungsi dengan kendala menggunakan pendekatan n+1.

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & gx_1 & gx_2 & \cdots & gx_n \\ gx_1 & fx_1x_1 - \lambda gx_1x_1 & fx_1x_2 - \lambda gx_1x_2 & \cdots & fx_1x_n - \lambda gx_1x_n \\ gx_2 & fx_2x_1 - \lambda gx_2x_1 & fx_2x_2 - \lambda gx_2x_2 & \cdots & fx_2x_n - \lambda gx_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ gx_n & fx_nx_1 - \lambda gx_nx_1 & fx_nx_2 - \lambda gx_nx_2 & \cdots & fx_nx_n - \lambda gx_nx_n \end{vmatrix}$$

Jika $\lambda = 0$, maka pengerjaan kendala pertidaksamaan dapat dikerjakan dengan tanpa kendala. Jadi turunan pertama dari fungsi tersebut adalah:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

Kesimpulan perhitungan Determinan Hessian adalah sama denganpada fungsi tanpa kendala, yaitu:

Titik maksimum bila : $\Delta_1<0;\Delta_2>0;\Delta_3<0,\ldots\ldots$

Titik minimum bila : $\Delta_1>0;\Delta_2>0;\Delta_3>0,\ldots\ldots$

Contoh :
Carilah maksimum dari fungsi $f(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 = xy + z$ dengan batas $x + y + z \leq 35$

Diasumsikan bahwa kendala ketidaksamaan diselesaikan seperti kendala persamaan $\lambda = 0$, maksimum tanpa kendala merupakan maksumym dengan kendala ketidaksamaan.

$$\frac{\partial f}{\partial X} = -2X + Y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = -4Y + X \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = -4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial Z} = -2Z + 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial Y \partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial Y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial Z} = 0, \text{ maka}$$

$$\begin{aligned} -2x + y &= 0 \\ x - 4y &= 0 \\ 2z &= 1 \end{aligned}$$

Jadi,

$X = Y = 0$

$Z = \frac{1}{2}$

$\Delta_1 = -2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 0 + 0 - (0 + 0 - 2) = -14$$

$\Delta_1 < 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 < 0$, sehingga titik $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ merupakan sebuah fungsi maksimum.

$$\frac{\partial f}{\partial X} - \lambda \frac{\partial g}{\partial X} = -2X + Y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial Y} = -4Y + X - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial Z} - \lambda \frac{\partial g}{\partial Z} = -2Z + 1 - \lambda = 0$$

$$\lambda(X + Y + Z - 35) = 0 \qquad X + Y + Z \leq 35$$

Juga $\lambda = 0$ atau $X + Y + Z - 35 = 0$; jika $\lambda = 0$

X=Y=0 $\qquad Z = \frac{1}{2}$

$X + Y + Z \leq 35$ terpenuhi dan $f\left(0,0,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Jika $X + Y + Z = 35$, penyelesaian tiga persamaan pertama :

$$\begin{aligned} -2x + y - \lambda &= 0 \\ 3x - 4y - \lambda &= 0 \\ 2z + \lambda &= 1 \end{aligned}$$

Dari dua persamaan pertama $3X - 5Y = 0$ dan dua persamaan kedua $X - 4Y + 2Z = 1$ dan Jika $X + Y + Z = 35$, $Z = 35 - X - Y$ dan $X - 4Y + 2(35 - X - Y) = 1$, maka

$X + 6Y = 96$
$3X - 5Y = 0$
$23Y = 207$
$Y = 9$
$X = 15$
$Z = 11$

Penyelesaian X = 15, Y = 9, Z = 11 memenuhi $-2X + Y - \lambda = 0$, $X - 4Y - \lambda = 0$ dan $2Z + \lambda = 1$ jika $\lambda = -21$ $f(1,9,11) = -362$ di mana lebih kecil dari $f\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$, jadi maksimum f(X,Y,Z) adalah saat X=0, Y=0 dan $Z = \frac{1}{2}$.

17.4 SOAL LATIHAN

1. Untuk setiap fungsi tanpa kendala dibawah ini, tentukan apakah fungsi minimum, maksimum dengan menggunakan Determinan Hessian:
   a. f(X,Y) = 395X – 20X2 – Y2 + XY
   b. f(X,Y) = 40X + 20Y – 4X2 – Y2
   c. f(X,Y) = 16X + 30Y – X2 – 3Y2 – XY
   d. f(X,Y) = 2X2 – 2XY + Y2 + 5X – 3Y
   e. f(X,Y) = 3 + 2X + 2Y – 2X2 – 2XY – Y2
   f. f(X,Y) = X2 + XY + Y2 – 6X + 2
   g. f(X,Y) = 4X + 2Y – X2 + XY – Y2
   h. f(X,Y) = X2 + Y2 – 2X + 4Y + 6
   i. f(X,Y) = X2 – 2XY + 2Y2 – 2X + 2Y +1
2. Untuk setiap fungsi dengan kendala dibawah ini, apakah fungsi minimum, maksimum dengan menggunakan Determinan Hessian.
   a. Z = -3X2 – 4Y2 – 3X + 2Y + 60 dengan kendala X + Y ≤ 60
   b. Z = 2X2 + Y2 – 4X – 2Y + 80 dengan kendala X + Y ≥ 5
   c. Z = 3X2 + 4Y2 + 2XY dengan kendala X + Y = 25
   d. Z = 10X + 20Y – X2 – 2Y2 dengan kendala 3X + Y = 20
   e. Z = 2XY – X2 – 2Y2 + 100 dengan kendala X + 2 = 20

Bab 18

PENERAPAN MATRIKS DALAM EKONOMI

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:
1. Mencari laba maksimum;
2. Mencari biaya minimum;
3. Mencari optimasi fungsi utilitas;
4. Mencari optimasi fungsi produksi.

18.1 PENDAHULUAN

Pada prinsipnya konsep pemecahan masalah menggunakan cara substitusi atau eliminasi pada bagian sebelumnya, hampir sama dengan cara pemecahan dengan menggunakan matriks. Pada metode matriks, setelah persamaan tersebut diturunkan dan disamadengankan dengan nol, maka langkah selanjutnya untuk mencari nilai variabel bebas digunakan pendekatan matriks. Ada tiga cara pemecahan dengan menggunakan matriks, yaitu aturan Crammer (*Crammer's Ruler*), metode Inverse, metode Eliminasi Gauss (*Elimination Gauss*). Setelah nilai variabel bebas diketahui, maka untuk menguji maksimasi/minimasi digunakan pendekatan Determinan Hessian.

18.2 MAKSIMUM DAN MINIMUM TANPA KENDALA

18.2.1 Biaya

Misalkan, seorang produsen memproduksi dua macam barang (A dan B), dengan biaya produksinya dinyatakan dalam TC = $f(Q_a,Q_b)$, maka besarnya kuantitas (A dan B) yang menyebabkan biaya total minimum dinyatakan dalam:

$$\frac{dTC}{dQ_a} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{dTC}{dQ_b} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial TC}{\partial Q_A} & \frac{\partial TC}{\partial Q_A Q_B} \\ \frac{\partial TC}{\partial Q_B Q_A} & \frac{\partial TC}{\partial Q_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_A \\ Q_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Untuk mengetahui besarnya biaya total minimum, maka dilakukan substitusi (A dan B) terhadap fungsi biaya, sehingga hasil substitusi tersebut merupakan biaya minimum. Dan untuk menguji apakah biaya tersebut adalah biaya minimum maka dilakukan pendekatan determinan Hessian.

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 TC}{\partial Q_A^2}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial TC}{\partial Q_A^2} & \frac{\partial TC}{\partial Q_A Q_B} \\ \frac{\partial TC}{\partial Q_B Q_A} & \frac{\partial TC}{\partial Q_B^2} \end{bmatrix}$$

Biaya minimum apabila :$\Delta_1 > 0$ dan $\Delta_2 > 0$

Contoh:

Biaya total yang dikeluarkan oleh seorang produsen tercermin dari persamaan $TC = 2X^2 + 3Y^2 - 10X - 9Y - XY + 50$. Tentukan besarnya kuantitas yang menyebabkan biaya minimum dan berapa biaya total minimumnya dan buktikan dengan menggunakan determinan Hessian kalau biaya tersebut minimum.

Penyelesaian:

$TC = 2X^2 + 3Y^2 - 10X - 9Y - XY + 50$

$\frac{dTC}{dX} = 0 = 4X - 10 - Y = 0 \longrightarrow 4X - Y = 10$……..(1)

$\frac{dTC}{dY} = 0 = 6Y - 9 - X = 0 \longrightarrow -X + 6Y = 9$……(2)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$X = \frac{|A_1|}{|A|}$, dan $Y = \frac{|A_2|}{|A|}$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \ |A| = 23$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}, \ |A_1| = 69$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, \ |A_2| = 46$$

$$X = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{69}{23} = 3$$

$$Y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{46}{23} = 2$$

$$TC_{min} = 2(3)^2 + 3(2)^2 - 10(3) - 9(2) - (3)(2) + 50 = 36$$

$$\Delta_1 = |4| = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 23$$

Kesimpulan: Karena $\Delta_1 > 0$ dan $\Delta_2 > 0$ maka berarti biaya total minimum pada 36.

18.2.2 Laba

Laba merupakan sejumlah pendapatan yang diterima perusahaan dengan menjual sejumlah produk tertentu pada harga tertentu atau dengan perkataan lain laba merupakan selisih antara nilai penjualan dengan biaya produksi.

Apabila selisih tersebut bernilai positif, maka perusahaan memperoleh keuntungan. Tetapi apabila selisih tersebut bernilai negatif, maka perusahaan mengalami kerugian. Dan apabila selisih tersebut bernilai 0, maka perusahaan tidak mendapatkan keuntungan dan juga tidak mengalami kerugian atau dengan perkataan lain perusahaan mengalami *break even*.

Misalkan perusahaan memproduksi dua macam produk tertentu (A dan B) dengan fungsi permintaan di bawah ini:

$$Q_A = f(P_A, P_B) \text{ dan } Q_y = g(P_A, P_B)$$

Di mana:

Q_A = Jumlah produk A
Q_B = Jumlah produk B
P_A = Harga produk A
P_B = Harga produk B

Maka besarnya penerimaan totalnya (TR) adalah:

$$TR = TR_A + TR_B = P_A . Q_B + P_A . Q_B$$

Dan jika biaya gabungan (*joint cost*) nya adalah:

$$TC = f(Q_A, Q_B)$$

Maka besarnya laba adalah:

$$\prod = TR_A + TR_B - TC$$

atau,

$$\prod = P_A . Q_A + P_B . Q_B - TC$$

Laba akan maksimum, apabila:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Qx} = 0 \text{ dan } \frac{\partial \pi}{\partial Qy} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial Q_A^2} & \frac{\partial \Pi}{\partial Q_A Q_B} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial Q_B Q_A} & \frac{\partial \Pi}{\partial Q_B^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_X \\ Q_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Untuk mengetahui besarnya laba maksimum perusahaan, maka dilakukan substitusi (A dan B) terhadap fungsi laba, sehingga hasil substitusi tersebut merupakan laba maksimum. Untuk menguji apakah laba tersebut adalah laba maksimum, maka dilakukan pendekatan determinan Hessian.

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_X^2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial Q_A^2} & \frac{\partial \Pi}{\partial Q_A Q_B} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial Q_B Q_A} & \frac{\partial \Pi}{\partial Q_B^2} \end{vmatrix}$$

laba maksimum apabila : $\Delta_1 > 0$ dan $\Delta_2 < 0$

Contoh 1: Biaya total yang dikeluarkan sebuah perusahaan yang memproduksi 2 macam barang, A dan B, ditunjukkan oleh $TC=Q_a^2+3Q_b^2+Q_a.Q_b$. Harga jual masing-masing barang per unit adalah $P_a=7$ sedangkan $P_b=20$.

Pertanyaan:

a. Hitunglah berapa unit masing-masing barang harus diproduksi agar keuntungannya maksimum
b. Berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut?
c. Buktikan dengan menggunakan determinan Hessian kalau laba tersebut maksimum!

Penyelesaian:

$TR_a = Q_a.P_a = 7Q_a$
$TR_b = Q_b.P_b = 20Q_b$
$TR = TR_a + TR_b$
$= 7Q_a + 20Q_b$

$p = TR - TC$
$p = 7Q_a + 20Q_b - (Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a.Q_b)$
$p = 7Q_a + 20Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_a.Q_b$

Agar p maksimum, $\pi' = 0$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Qa} = 0 \rightarrow 7 - 2Q_a - Q_b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots -2Q_a - Q_b = -7 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Qb} = 0 \rightarrow 20 - 6Q_b - Q_a = 0 \ldots\ldots\ldots - Q_a - 6Q_b = -20 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{|A_1|}{|A|}, \text{ dan } Y = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}, \; |A| = 11$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -20 & -6 \end{bmatrix}, \; |A_1| = 22$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -20 \end{bmatrix}, \; |A_2| = 33$$

$$Q_a = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{22}{11} = 2$$

$$Q_b = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{33}{11} = 3$$

p maksimumnya adalah $= 7(2) + 20(3) - (2)^2 - 3(3)^2 - (2.3)$
$= 14 + 60 - 4 - 27 - 6 = 37$

$$\Delta_1 = -2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 11$$

Kesimpulan: Karena $\Delta_1 > 0$ dan $\Delta_2 < 0$ maka berarti laba tersebut maksimum pada 37.

Contoh 2:
Apabila fungsi permintaan terhadap suatu produk di pasar S dan R adalah:

$$P_S = 105 - 10Q_S$$
$$P_R = 175 - 15Q_R$$

Dan fungsi biaya gabungan adalah:

$$TC = 40 + 25(Q_s + Q_R)$$

Keterangan : $Q = Q_s + Q_R$

Tentukan laba maksimum perusahaan apabila menerapkan diskriminasi harga dan bagaimana apabila tidak menerapkan diskriminasi harga pada kedua pasar tersebut. Kemudian bandingkan!

Penyelesaian:
Dengan diskriminasi harga

$p = TR_S + TR_R - TC$
$p = (105 - 10Q_S)Q_S + (175 - 15Q_R)Q_R - [40 + 25(Q_s + Q_R)]$
$p = 105Q_S - 10Q_s^2 + 175Q_R - 15Q_R^2 - 40 - 25Q_S - 25\,Q_R$
$p = -10Q_s^2 - 15Q_R^2 + 80Q_s + 150Q_R - 40$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Qs} = -20Q_s + 80 = 0 \rightarrow -20Q_s = -80$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Qr} = -30Q_R + 150 = 0 \rightarrow -30Q_R = -150$$

$$\begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_S \\ Q_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 \\ -150 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{|A_1|}{|A|}, \text{ dan } Y = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$A = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -30 \end{bmatrix}, \ |A| = 600$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -80 & 0 \\ -150 & -30 \end{bmatrix}, \ |A_1| = 2400$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -20 & -80 \\ 0 & -150 \end{bmatrix}, \ |A_2| = 3000$$

$$Q_a = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2400}{600} = 4$$

$$Q_b = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{3000}{600} = 5$$

$\pi_{max} = -10Q_s^2 - 15Q_R^2 + 80Q_s + 150Q_R - 40$

$\pi_{max} = -10(4)^2 - 15(5)^2 + 80(4) + 150(5) - 40$

$\pi_{max} = -160 - 375 + 320 + 750 - 40$

$\pi_{max} = 495$

$$\Delta_1 = |-20| = -20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -30 \end{vmatrix} = 600$$

Kesimpulan: Karena $\Delta_1 > 0$ dan $\Delta_2 < 0$ maka berarti laba tersebut maksimum pada 495.

Tanpa diskriminasi harga

$P_S = 105 - 10Q_S \rightarrow Q_S = 10{,}5 - 1/10\ P_S$
$P_R = 175 - 15Q_R \rightarrow Q_R = 11{,}7 - 1/15\ P_R$

$Q = Q_S + Q_R$
$Q = 10{,}5 - 1/10\ P_S + 11{,}7 - 1/15\ P_R$
$Q = 22{,}2 - 0{,}1\ P_S - 0{,}07\ P_R$
$P_S = P_R = P$
$Q = 22{,}2 - 0{,}17\ P$
$P = 131 - 6Q$
$TC = 40 + 25Q$
$p = TR - TC$
$p = (131 - 6Q)Q - (40 + 25Q)$
$p = 131Q - 6Q^2 - 40 - 25Q$
$p = -6Q^2 + 106Q - 40$

$p' = -12Q + 106 = 0$ ® $-12Q = -106$
$p'' = -12 \rightarrow p'' < 0$ Jadi, fungsi maksimum
$p_{max} = -6Q^2 + 106Q - 40$
$p_{max} = -6(8{,}8)^2 + 106(8{,}8) - 40$
$p_{max} = -464{,}64 + 932{,}8 - 40$
$p_{max} = 428{,}16$

Kesimpulan:
p dengan diskriminasi harga = 495
p tanpa diskriminasi harga = 428,16
Jadi, lebih baik perusahaan menerapkan diskriminasi harga, karena laba yang dihasilkan lebih besar

18.2.3 Fungsi Produksi

Untuk menghasilkan suatu produk tertentu digunakan beberapa factor produksi, diantaranya tenaga kerja, modal, tanah, bahan baku, dan mesin-mesin. Apabila perusahaan hanya memproduksi dengan menggunakan input (faktor produksi) modal (K) dan tenaga kerja (L), maka fungsi produksinya dapat dinyatakan

dalam: z = f(K,L). Z merupakan jumlah output (produk) yang dihasilkan dari penggunaan input K dan L.

Pada fungsi produksi dalam pasar persaingan sempurna, diasumsikan bahwa perusahaan menggunakan dua macam input saja (K dan L). Di samping itu perusahaan tidak dapat menetukan harga input-input dan harga output, sehingga harga input K dan L diasumsikan adalah a dan b serta harga output Q adalah c. Sehingga besarnya laba perusahaan adalah seperti di bawah ini.

$\prod = TR - TC$
$\prod = cQ - (aK + bL)$
$\prod = CQ - Ak - bL$
atau
$\prod = c.f(K,L) - aK - bL$

Untuk memaksimumkan laba, caranya sama yaitu harus mencari derivatif parsial pertama dan disamadengankan dengan nol.

Contoh:
Misalkan fungsi produksi adalah $16Q = 60 - 2(K-5)^2 - 4(L-4)^2$, dan harga masing-masing input K dan L , berturut-turut adalah 8 dan 4, sedangkan harga output adalah 16. Tentukan berapa input K dan L yang digunakan agar laba maksimum dan berapa nilai laba maksimumnya.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\prod &= cQ - aK - bL \\ &= 16Q - 8K - 4L \\ &= 60 - 2(K-5)^2 - 4(L-4)^2 - 8K - 4L\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = -4(K-5) - 8 = 0 \ldots\ldots\ldots -4K = -12 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial L} = -8(L-4) - 4 = 0 \ldots\ldots\ldots -8L = -28 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -28 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{|A_1|}{|A|}, \text{ dan } L = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$K = \frac{|A_1|}{|A|}, \text{ dan } L = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad |A| = 32$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ -28 & -8 \end{bmatrix}, \quad |A_1| = 96$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 0 & -28 \end{bmatrix}, \quad |A_2| = 112$$

$$K = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{96}{32} = 3$$

$$L = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{112}{32} = 3{,}5$$

Jadi, laba maksimum adalah,

$$\pi_{maks} = 60 - 2(3-5)^2 - 4(3{,}5-4)^2 - 8(3) - 4(3{,}5)$$
$$= 13$$

Pembuktian untuk laba maksimum:

$$\Delta_1 = |-4| = -4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 32$$

Kesimpulan: Karena $\Delta_1 > 0$ dan $\Delta_2 < 0$ maka berarti laba tersebut maksimum pada 13.

18.3 MAKSIMUM DAN MINIMUM DENGAN KENDALA

18.3.1 Fungsi Utilitas

Fungsi utilitas menjelaskan besarnya utilitas (kepuasan, kegunaan) yang didapatkan oleh seorang konsumen dari hasil mengkonsumsi suatu barang atau jasa. Semakin banyak jumlah suatu barang yang dikonsumsi oleh konsumen, maka semakin besar kepuasan/kegunaan yang diperoleh. Akan tetapi pada titik

tingkat konsumsi tertentu akan mencapai puncaknya, sehingga sesudah titik itu justru kepuasan/kegunaan akan menjadi berkurang atau bahkan dapat menjadi negatif apabila jumlah barang yang dikonsumsi terus menerus ditambah.

Secara umum fungsi utilitas dipengaruhi oleh kendala-kendala. (misalnya jumlah uang yang dimiliki, jumlah sumber daya yang ada, dll). Di samping itu jumlah produk yang akan di konsumsi juga dapat mempengaruhi utilitas, karena konsumen tidak hanya mengkonsumsi satu produk saja tetapi biasanya lebih dari satu produk. Oleh karena itu penyelesaian persamaan tersebut harus menggunakan pendekatan Lagrange (fungsi kendala).
Misalkan utilitas yang hendak dimaksimumkan: $U = f(X,Y)$
Dengan fungsi kendala: $XP_X + YP_Y = B$

Keterangan :
X = jumlah barang X yang akan dibeli
Y = jumlah barang Y yang akan dibeli
P_X = harga barang X
P_Y = harga barang Y
B = dana yang dimiliki konsumen
Maka penyelesaiannya menggunakan pendekatan pendekatan Lagrange.

$$U(X,Y,\lambda) = f(X,Y) + \lambda\,(B - XP_X - YP_Y)$$

Nilai maksimum dari fungsi utilitas dapat dicari dengan membuat turunan pertamanya sama dengan nol.

$$U_X = f_x + \lambda P_X = 0$$
$$U_Y = f_y + \lambda P_Y = 0$$
$$U_\lambda = B - XP_X - YP_Y = 0$$

Nilai X, Y, dan l dapat diperoleh dari ketiga persamaan di atas dengan pendekatan matriks. Kemudian untuk menentukan berapa nilai utilitas maksimum dilakukan substitusi terhadap fungsi utilitas tersebut. Dan untuk menguji apakah utilitas tersebut maksimum dilakukan pendekatan determinan Hessian.

Contoh:
Apabila kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi barang A dan B dicerminkan oleh fungsi utilitas: $U = -A^2 - 3B^2 + 4AB$. Berapa unit barang A dan B yang harus dikonsumsikannya bila ia ingin memaksimumkan tingkat kepuasan atau utilitas atas barang-barang tersebut jika diketahui harga barang

A (P_A = 2) dan barang B (P_B = 3) serta daya beli konsumen tersebut sebesar 45 itu? Kemudian hitunglah nilai utilitas maksimum tersebut.

Penyelesaian:

Fungsi utilitas : $U = 4AB - A^2 - 3B$

Fungsi anggaran : $2A + 3B = 45$

Fungsi Lagrangian : $U = 4AB - A^2 - 3B^2 + \lambda(45 - 2A - 3B)$

Untuk mencari nilai maksimum *U*, syarat yang diperlukan adalah derivatif parsial pertama terhadap *X,Y*, dan λ harus disamakan dengan nol.

$U_A = 4B - 2A - 2\lambda = 0 \longrightarrow -2A + 4B - 2\lambda = 0$..... (1)

$U_B = 4A - 6B - 3\lambda = 0 \longrightarrow 4A - 6B - 3\lambda = 0$..... .(2)

$`U_\lambda = 45 - 2A - 3B = 0 \longrightarrow -2A - 3B = 45$ .....(3)

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -6 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{bmatrix}$$

-----A----- -X- -H-

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -6 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}; |A| = -2\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = 90$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & -3 \\ 45 & -3 & 0 \end{bmatrix}; |A_1| = 0\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + 45\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} = 1080$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \\ -2 & 45 & 0 \end{bmatrix}; |A_2| = 0\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + 45\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = 630$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & -3 & 45 \end{bmatrix}; |A_3| = 0\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + 45\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = -180$$

$$A = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1080}{90} = 12$$

$$B = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{630}{90} = 7$$

$$\lambda = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-180}{90} = -2$$

Untuk mendapatkan nilai Utilitas yang maksimal dilakukan substitusi A dan B terhadap fungsi utilitas.

$$\begin{aligned} U_{maks} &= 4(12)(7) - (12)^2 - 3(7) \\ &= 45 \end{aligned}$$

Pembuktian utilitas maksimum:

$$\Delta_{n+1} = \Delta_{2+1} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} = 90$$

karena $\Delta_3 > 0$, berarti utilitas tersebut maksimum.

18.3.2 Biaya

Suatu perusahaan memiliki fungsi biaya total atas 2 jenis barang yang diproduksi yaitu $TC = 4X^2 - 2XY + 6Y^2$, apabila barang X dan Y yang harus diproduksi sebesar 72 unit yaitu $X + Y = 72$

a. Tentukan besarnya X dan Y saat total biaya minimum dengan menggunakan metode Cramer!
b. Lakukan uji total biaya minimum dengan determinan Hessian yang berkendala!
c. Berapa total biaya minimum tersebut!

Penyelesaian:
Fungsi Total Biaya : $TC = 4X^2 - 2XY + 6Y^2$
Fungsi kuota oroduksi : $X + Y = 72$
Fungsi Lagrangian : $F = 4X^2 - 2XY + 6Y^2 + \lambda (72 - X - Y)$

Selanjutnya dapat diselesaikan seperti contoh fungsi utilitas

18.3.3 Laba

Dua jenis barang yang diproduksi oleh suatu perusahaan dijual dengan harga yang diperlihatkan oleh persamaan berikut:
P1 = 1000 – 10 Q1 + 10 Q2 dan P2 = 1500 + 10 Q1 – 5 Q2
Sedangkan biaya yang dikeluarkan sebesar: TC =10Q12 + 5Q22+ 200Q1+ 300Q2 + 1000

Tentukan :

a. Jumlah dan harga dari masing-masing barang agar keuntungan maksimum (gunakan aturan *Cramer*)!
b. Buktikan dengan menggunakan Determinan *Hessian* bahwa pada jumlah dan harga tersebut keuntungan maksimum. Berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut ?
c. Jika terdapat kuota Q1 + Q2 = 300, maka berapa laba maksimum yang diperoleh perusahaan!

Penyelesaian:
Fungsi Laba : $\prod = (P1 .Q1 + P2 Q2) - TC$
Fungsi kuota oroduksi : $Q1 + Q2 = 300$
Fungsi Lagrangian : $F = \prod + \lambda (300 - Q1 - Q1)$
Selanjutnya dapat diselesaikan seperti contoh fungsi utilitas

18.3.4 Fungsi Produksi

Fungsi produksi suatu perusahaan adalah
Q = Q = 16L0,25 K0,75
Kendala yang dihadapi produsen adalah dana yg tersedia 50.000.000 smu, harga input K dan L masing-masing 10.000 smu dan 5.000 smu .
Carilah K dan L yang harus digunakan agar Q optimum dan berapa banyaknya Q optimum tersebut

Penyelesaian:

Fungsi Produksi : Q = 16L0,25 K0,75

Fungsi Biaya : 5.000 L + 10.000 K = 50.000.000

Fungsi Lagrange : F = 16L0,25 K0,75 - λ (5.000 L + 10.000K – 50.000.000)

FL = 4L-0,75 K0,75 - 5000 λ = 0 → $\lambda = \frac{4L^{-0,75}5K^{0,75}}{5000}$

FK = 4L0,25 K-0,25 – 10.000 λ = 0 → $\lambda = \frac{4L^{0,25}5K^{-0,25}}{10.000}$

Fλ = -5.000 L – 10.000K + 50.000.000 = 0

$$\frac{4L^{-0,75}5K^{0,75}}{5000} = \frac{4L^{0,25}5K^{-0,25}}{10.000}$$

$$\frac{10.000}{5.000} = \frac{12L^{0,25}5K^{-0,25}}{4L^{-0,75}K^{0,75}}$$

$$2 = \frac{12L}{4K}$$

$$8K = 12L$$

$$K = \left(\frac{12}{8}L\right)$$

$$5000\ L + 10.000\left(\frac{12}{8}L\right) = 50.000.000$$

$$20.000\ L = 50.000.000$$

$$L = 2500$$

$$K = \frac{12}{8} \cdot 2500 = 3750$$

Q optimum = 54.216,114

$l = 1,084322982 \times 10^{-3}$

Selanjutnya uji dengan Determinan Hessian berkendala.

18.4 SOAL LATIHAN

1. Suatu perusahaan mempunyai fungsi total profit sebagai berikut:

$$\lambda = 144\ X - 3X^2 - XY - 2Y^2 + 120\ Y - 35$$

Tentukan:

a. Tingkat output dari setiap komoditas yang menghasilkan maksimum profit.
b. Nilai dari profit maksimum.
c. Buktikan kalau laba tersebut maksimum dengan Determinan Hessian.

2. Biaya total yang dikeluarkan CV. Lestari yang memproduksi 2 jenis barang A dan B ditunjukkan oleh TC = $16\text{-}2A^3+AB+30A+12B+0{,}5A^2$. Harga jual masing-masing barang per unit untuk barang A dan B adalah P = $35–2A^2$ dan q = 20–B. (P=harga barang A, dan q=harga barang B). Hitunglah berapa unit masing-masing barang yang harus diproduksi agar keuntungannya maksimum, dan berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut.

3. Fungsi permintaan terhadap barang X dinyatakan dalam fungsi sebagai berikut $Q_X=7\text{-}P_X+P_Y$, sementara itu untuk barang Y adalah $Q_Y=6+P_X\text{-}2P_Y$. Untuk menghasilkan kedua produk (X dan Y) tersebut, perusahaan mengeluarkan biaya yang dinyatakan dalam fungsi TC= $3Q_X+2Q_Y$.

   Pertanyaan:

   a. ubah fungsi permintaan ke dalam P= f(Q)
   b. tentukan besarnya kuantitas dan harga jual perusahaan agar laba maksimum.
   c. berapa nilai laba maksimum perusahaan.
   d. buktikan dengan menggunakan determinan Hessian.

4. PT Wijaya Kusuma dalam operasionalnya menghasilkan dua macam produk, yaitu kaos (A) dan kemeja (B). Saat ini dalam upaya meningkatkan kesejahteraan pemiliknya, maka perusahaan menetapkan kebijaksanaan laba maksimum. Fungsi permintaan terhadap produk A dinyatakan dalam fungsi $Q_A=11\text{-}\ 2P_X\ \text{-}\ 2P_Y$, sementara itu untuk produk B adalah $Q_B=16\ \text{-}\ 2P_A\ \text{-}\ 3P_B$. Untuk menghasilkan kedua produk tersebut, perusahaan mengeluarkan biaya gabungan yang dinyatakan dalam fungsi TC= $3Q_A + Q_B$.

   Pertanyaan:

   a. ubah fungsi permintaan ke dalam P= f(Q)
   b. tentukan besarnya kuantitas dan harga jual perusahaan agar laba maksimum.
   c. berapa nilai laba maksimum perusahaan.
   d. buktikan dengan menggunakan determinan Hessian.

5. Perusahaan "Pelita Kasih" akan memproduksi suatu jenis jamu yang menggunakan 2 bahan yaitu X dan Y. Fungsi penerimaan total dan fungsi biaya total untuk memproduksi jamu tersebut adalah:
   $TR = 150X - 4X^2 - 3XY - 2Y^2 + 100Y$
   $TC = 40X + X^2 + XY - 40Y$
   Berdasarkan hasil penelitian agar jamu tersebut manjur, maka jumlah input X yang digunakan harus dua kali jumlah input Y.
   a. Berapa X dan Y yang harus digunakan agar laba maksimum dan memenuhi syarat tersebut?
   b. Berapa besarnya laba maksimum?
   c. Uji dengan determinan Hessian.

6. PT ABC menghasilkan 3 macam barang, yaitu A, B, dan C. harga jual masing-masing barang adalah Rp 215.000, Rp 192.500, dan Rp 265.000. Biaya total untuk ketiga barang tersebut dinyatakan dalam fungsi berikut ini: $TC= 0{,}5A^2+0{,}75B^2+C^2+2AB+3BC+4AC$. Carilah jumlah masing-masing barang agar tercapai keuntungan maksimum dan berapa keuntungan maksimumnya.

7. Fungsi produksi suatu jenis barang adalah 2,5Q=30KL. Untuk kegiatan produksi tersedia dana $240.00, sedangkan harga input K dan L masing-masing adalah $10.00 dan $7,5.00.
   Pertanyaan:
   a. Tentukan jumlah input K dan L yang digunakan agar produksi optimum
   b. Berapa tingkat produksi optimumnya
   c. Buktikan kalau produksi tersebut optimum dengan menggunakan Determinan Hessian.

8. Sebuah perusahaan melakukan penjualan pada dua pasar A dan B. Andaikan di pasar A permintaannnya adalah $Q_A= 120–20P_A$ dan di pasar B permintaannya adalah $Q_B= 120–20P_B$; dan besarnya biaya totalnya adalah TC= 90+2Q. Tentukan:
   a. Tingkat output di pasar A (Q_A) dan harga di pasar A (P_A) demikian juga Q_B dan P_B.
   b. Berapa besar profit yang diperoleh perusahaan ini dengan cara diskriminasi harga tersebut.
   c. Bandingkan tingkat profit bila tidak melakukan diskriminasi harga.

9. Jika fungsi utilitas adalah $U = 24X+32Y-X^2-Y^2$ dan dana yang dimiliki oleh seorang produsen untuk mengkonsumsi produk tersebut adalah \$9.00, sedangkan harga barang X adalah \$1.00 serta harga barang Y adalah dua kali harga barang X. Tentukanlah nilai X dan Y yang memaksimumkan U dan tentukan berapa nilai U maksimum serta uji dengan determinan Hessian!
10. Dalam upaya memaksimalkan kepuasannya, seorang konsumen terbentur oleh dana yang dimiliki dan harga masing-masing barangnya. Harga barang X adalah \$1.00 dan harga barang Y adalah \$3.00. sementara itu daya beli konsumen tersebut adalah \$14.00. Jika fungsi kepuasannya adalah $U = 24X+48Y-X^2-Y^2$ tentukanlah nilai X dan Y yang memaksimumkan U dan tentukan berapa nilai U maksimum serta uji dengan determinan Hessian!

11. Bapak Wijaya Kusuma sedang mempertimbangkan untuk membeli sejumlah barang X dan Y untuk memaksimumkan kepuasannya. Dana yang tersedia untuk membeli kedua produk tersebut adalah sebesar Rp. 900.000, sedangkan harga barang X dan Y masing-masing sebesar Rp. 100.000,-. Fungsi kepuasan Bapak Wijaya Kusuma dinyatakan dalam $U=27+6XY-2X^2-Y^2$.

    Pertanyaan:
    a. Tentukan berapa unit barang X dan Y yang harus dibeli agar kepuasan Bapak Wijaya Kusuma maksimum!
    b. Berapa nilai kepuasan maksimumnya!

12. Sebuah pabrik ingin memproduksi susu dengan menggunakan dua bahan baku yang dicampurkan, yaitu: susu sapi murni dan bahan lain. Untuk mendapatkan satu kaleng susu (400 gram) diperlukan pencampuran dengan formula sebagai berikut: $20X+10Y-2X^2-Y^2$, di mana X adalah susu sapi murni dan Y adalah bahan lain serta Z adalah susu kalengan. Biaya pembelian bahan susu sapi yang menghasilkan satu kaleng susu adalah Rp. 2000, sedangkan bahan campuran lain seharga Rp 1000. Pabrik menjual produk tersebut di pasar seharga Rp 20.000 tiap kalengnya.

    Pertanyaan:
    a. Agar keuntungan diperoleh maksimum berapa jumlah bahan baku yang harus di beli dan berapa kaleng susu yang harus diproduksi.
    b. Perlihatkan dengan formula tersebut kalau keuntungan tersebut

13. Apabila diketahui fungsi permintaan terhadap barang X dan Y masing-masing adalah $Q_X=7-P_X+P_Y$ dan $Q_Y=6+P_X-2P_Y$. Sementara itu fungsi biaya gabungan adalah $TC=3Q_X+2Q_Y$.
    Pertanyaan:
    a. Tentukan kuantitas dan harga jual agar laba maksimum.
    b. Berapa nilai laba maksimumnya.
    c. Buktikan dengan menggunakan Determinan Hessian.
14. PT Wijaya Bangsa memproduksi dua produk utama (baju dan kaos). Produk yang dihasilkan perusahaan untuk memenuhi pasar dalam negeri. Saat ini perusahaan berusaha memaksimalkan produksinya dengan cara mengunakan dua macam input modal (K) dan tenaga kerja (L). Fungsi produksi persahaan adalah $Q=2KL+32L-K^2-L^2$. sementara itu harga input K dan L masing-masing adalah \$10.00 dan \$20.00. Dana untuk produksi tersebut tersedia sebesar \$90.00.

    Pertanyaan:
    a. Berapa input K dan L yang digunakan agar produksi maksimum
    b. Tentukan berapa unit produksi maksimumnya
    c. Buktikan dengan menggunakan Determinan Hessian.

Bab 19

ANALISIS INPUT – OUTPUT

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Mencari matriks transaksi;
2. Mencari matriks teknologi;
3. Menggunakan matriks transaksi maupun teknologi dalam menyelesaikan permasalahan ekonomi dan bisnis.

19.1. PENDAHULUAN

Metode analisis input-output diperkenalkan pertama kali pada tahun 1936 oleh Waissily W. Leontief. Metode ini lazim diterapkan untuk menganalisis perekonomian secara makro, nasional, maupun regional. Motode analisis input output digunakan untuk mempelajari hubungan di antara industri-industri (sektor-sektor) dalam suatu perekonomian, baik itu dalam ruang lingkup regional, nasional, maupun internasional. Di samping itu analisis ini digunakan untuk mencatat aliran produksi dengan tujuan mempelajari pengaruh perubahan permintaan akhir akan barang-barang pada produksi primer dan barang-barang jadi

Analisis input output bertolak dari anggapan bahwa suatu sistem perekonomian terdiri atas sektor-sektor yang saling berkaitan. Masing-masing sektor menggunakan keluaran dari sektor lain sebagai masukan bagi keluaran yang akan dihasilkannya, kemudian keluaran yang dihasilkannya merupakan masukan pula bagi sektor lain. Selain menjadi masukan bagi sektor lain, terdapat pula keluaran dari sesuatu sektor yang menjadi masukan bagi sektor itu sendiri dan sebagai barang konsumsi bagi pemakai akhir.

19.2 TUJUAN DARI ANALISIS INPUT-OUTPUT

Tujuan dari analisis input-output ini adalah untuk menentukan berapa banyak tingkat output dari setiap industri yang harus diproduksi dalam suatu perekonomian agar dapat memenuhi total permintaan produk secara pasti.

Dengan melihat hubungan ketergantungan di antara sektor-sektor maka tingkat output yang benar dari setiap sektor harus berkesesuaian dengan kebutuhan input dalam suatu perekonomian yang secara matematis dapat dirumuskan menjadi:

OUTPUT SUATU SEKTOR =
permintaan suatu sektor + permintaan bukan sektor

Oleh karena itu, tingkat output dari suatu sektor tertentu yang benar akan tergantung pada kebutuhan input dari seluruh n (jumlah) sektor.

19.3 MATRIKS TRANSAKSI

Langkah awal dalam analisis input-output adalah menyusun suatu tabel yang berisi keterangan-keterangan tentang bagaimana (baik dalam satuan kuantitatif fisik maupun dalam satuan nilai uang) keluaran suatu sektor terdistribusi ke (diminta oleh) sektor-sektor lain sebagai masukan dan ke (oleh) pemakai akhir sebagai barang konsumsi. Tabel demikian dinamakan matriks transaksi atau matriks masukan-keluaran (input-output). Contoh suatu matriks transaksi dapat dilihat di bawah ini:

Matriks transaksi perekonomian Negara

Keluaran / Masukan	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan akhir	Keluaran total
Pertanian	20	35	5	40	100
Industri	15	80	60	135	290
Jasa	10	50	55	120	235
Nilai tambah	55	125	115	70	365
Keluaran total	100	290	235	365	990

Dari tabel di atas, melalui pembacaan ke samping dapat diketahui bahwa dari seluruh keluaran sektor pertanian senilai 100, senilai 20 digunakan oleh sektor itu sendiri sebagai masukan (input), senilai 35 digunakan oleh sektor industri sebagai masukan sektor tersebut, dan sebesar 5 digunakan sebagai masukan sektor jasa, dan sisanya senilai 40 dibeli oleh konsumen akhir sebagai

barang konsumsi. Sedangkan melalui pembacaan ke bawah nilai keluaran total 100, senilai 20 berupa masukan dari sektor itu sendiri, senilai 15 berupa masukan yang berasal dari sektor industri, senilai 35 berupa masukan dari sektor jasa, dan selebihnya merupakan nilai tambah (*value added*) sektor pertanian tersebut yaitu senilai 55. Nilai tambah ini sering juga disebut **masukan primer** (*primary input*).

Tabel transaksi juga dapat dituliskan dalam bentuk notasi matriks. Misalnya X_{ij} melambangkan keluaran dari sektor i yang dipergunakan sebagai masukan oleh sektor j, U_j melambangkan pemintaan akhir terhadap keluaran sektor i, Y_j melambangkan nilai tambah sektor j, dan X_j adalah keluaran total dari sektor j, maka tabel transaksinya secara matriks:

Matriks transaksi

Keterangan	Distribusi konsumsi (output)	Permintaan akhir	Keluaran total
I Distribusi II Produksi (input) M	X_{11} X_{12}……..….X_{1m} X_{21} X_{22}…….……..X_{2m} X_{m1} X_{m2}……X_{mm}	U_1 U_2 U_m	X_1 X_2 X_m
Nilai tambah	Y_1 Y_2……..…Y_m	U_{m+1}	X_{m+1}
Keluaran total	X_1 X_2……..…X_m	X_{m+1}	x

Pemakaian total oleh sektor *i*:

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} Xij + Ui$$

Di mana i = 1, 2, ……., m+1

Keluaran total dari sektor j:

$$X_i = \sum_{i=1}^{m} Xij + Yj$$

Dimana j = 1, 2, ……., m+1

Keterangan:

Xij	=	keluaran dari sektor i yang dipergunakan sebagai masukan oleh sektor j
Ui	=	permintaan akhir terhadap keluaran sektor i
Yj	=	nilai tambah sektor j
Xj	=	keluaran total dari sektor j

19.4 MATRIKS TEKNOLOGI

Dari matriks transaksi di atas diketahui, bahwa bagi sektor j untuk memproduksi keluaran sejumlah X_i diperlukan masukan-masukan dari sektor 1 hingga sektor m dan sejumlah tertentu nilai tambah atau masukan primer. Hal ini berarti bahwa masing-masing kolom manggambarkan hubungan masukan-keluaran antar sektor. Begitu pula pada saat yang sama matriks transaksi memberikan informasi tentang bagaimana keluaran dari sesuatu sektor terdistribusi di antara sektor-sektor yang ada, termasuk sektor konsumen akhir. Hal inipun manggambarkan hubungan masukan-keluaran antar sektor. Jika nilai setiap unsur dalam matriks transaksi tersebut dibagi dengan nilai jumlah baris antar nilai jumlah kolom yang bersesuaian, maka diperoleh suatu rasio yang dinamakan **koefisien teknologi.**

Koefisien teknologi

$$A_{ij} = \frac{Xij}{Xj}$$

i = 1, 2,……., m

j = 1, 2,……., m

Koefisien teknologi a_{ij} adalah suatu rasio yang menjelaskan jumlah atau nilai keluaran sektor i yang diperoleh untuk menghasilkan 1 unit keluaran di sektor j. Secara umum matriks tekologi dapat dirumuskan sebagai berikut:

Matriks teknologi

Sektor		Sektor 1	2	……..m
1	a_{11}	a_{12}	……	a_{1m}
2	a_{21}	a_{22}	……	a_{2m}
m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mm}
Nilai tambah	$(1 - \Sigma a_{i1})$	$(1 - \Sigma a_{i2})$	……..	$(1 - \Sigma a_{im})$

Sedangkan himpunan koefisien teknologi untuk unsur-unsur permintaan akhir dan keluaran total masing-masing adalah berupa vektor kolom.

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ | \\ U_M \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ | \\ X_M \end{pmatrix}$$

Karena koefisien masukan $a_{ij} = X_{ij} / X_j$, berarti $X_{ij} = a_{ij} X_{ij}$.
Menurut matriks transaksi,

$$X_{ij} = \sum_{i=1}^{m} Xij + Ui$$

padahal $X_{ij} = a_{ij} X_j$

maka: $X_i = = \sum_{i=1}^{m} aij\, Xj + Ui$

Bila ditulis ringkas dengan notasi matriks:

$$\mathbf{X = AX + U}$$

A dapat disebut matriks koefisien teknologi. Untuk mencari tingkat output total yang diperlukan untuk memenuhi permintaan akhir, kita dapat mencari x dalam matriks koefisien teknologi dan vektor kolom permintaan akhir.

$$X - AX = U$$
$$(I - A)X = U$$

$$\boxed{X = (X - A)^{-1} U}$$

Matriks (I - A) disebut matriks leontief. Dalam suatu tabel input-output yang lengkap, tenaga kerja dan modal juga akan dimasukkan sebagai input, yang merupakan nilai tambah oleh perusahaan tersebut. Penjumlahan vertikal dari elemen-elemen sepanjang kolom j dalam model seperti itu akan sama dengan satu unit komoditi atau memproduksi komoditi seharga satu rupiah.

Contoh Soal:
Contoh 1,
Diketahui matriks transaksi dua sektor (pertanian dan jasa) pada suatu negara yang masih tradisional seperti di bawah ini:

Sektor	Pertanian	Jasa	Permintaan akhir	Keluaran total
Pertanian	30	15	5	50
Jasa	10	5	15	30
Nilai tambah	10	10		20
Keluaran total	50	30	20	100

Pertanyaan:

a. Hitunglah matriks koefisien teknologinya
b. Jika permintaan akhir terhadap sektor pertanian dan sektor jasa diharapkan masing-masing berubah jadi 10 dan 20 berapa keluaran total yang baru bagi masing-masing sektor tersebut
c. Hitunglah nilai tambah yang baru bagi masing-masing sektor dan buat matriks transaksi yang baru.

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/2 \\ 1/5 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$[I - A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/5 & 1/2 \\ 1/5 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/2 \\ -1/5 & 5/6 \end{bmatrix}$$

$$|I - A| = \frac{7}{30}$$

$$[I - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 5/6 & 1/2 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}}{\frac{7}{30}} = \begin{bmatrix} 25/7 & 15/7 \\ 6/7 & 12/7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 25/7 & 15/7 \\ 6/7 & 12/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78\,4/7 \\ 42\,6/7 \end{bmatrix}$$

Nilai tambah yang baru:
Sektor pertanian : 78 4/7 X 1/5 = 15 5/7
Sektor Jasa : 42 6/7 X 1/3 = 14 2/7

Matriks transaksi yang baru

Sektor	Pertanian	Jasa	Permintaan akhir	Keluaran total
Pertanian	47 1/7	21 3/7	10	78 4/7
Jasa	15 5/7	7 1/7	20	42 6/7
Nilai tambah	15 5/7	14 2/7		30
Keluaran total	78 4/7	42 6/7	30	150 3/7

Contoh 2,

Hubungan masukan-keluaran antar sektor dalam perekonomian sebuah negara diketahui seperti ditunjukkan dalam tabel transaksi di bawah ini:

Sektor	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan akhir	Keluaran total
Pertanian	11	19	1	10	41
Industri	5	89	40	106	240
Jasa	5	37	37	106	185
Nilai tambah	20	95	107	21	243
Keluaran total	41	240	185	243	659

Pertanyaan:

a. Hitunglah masing-masing koefisien keluarannya
b. Jika permintaan akhir terhadap sektor pertanian, sektor industri, dan sektor jasa diharapkan masing-masing berubah jadi 25, 201, dan 45, berapa keluaran total yang baru bagi masing-masing sektor tersebut
c. Hitunglah nilai tambah yang baru bagi masing-masing sektor dan buat matriks transaksi yang baru.

Jawab:

a. Koefisien masukannya =

	P	I	J
Pertanian	0,27	0,08	0,01
Industri	0,12	0,37	0,22
Jasa	0,12	0,15	0,2
Nilai Tambah :	0,49	0,4	0,57
	1	1	1

b. $\mathbf{X = (I - A)^{-1} U}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-0,27 & 0-0,08 & 0-0,01 \\ 0-0,12 & 1-0,37 & 0-0,21 \\ 0-0,12 & 0-0,15 & 1-0,2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 25 \\ 201 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,73 & -0,08 & -0,01 \\ -0,12 & 0,63 & -0,21 \\ -0,12 & -0,15 & 0,8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 25 \\ 201 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } | I - A | = (-1)^2\, 0,73 \begin{vmatrix} 0,63 & -0,21 \\ -0,15 & 0,8 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} -0,08 & -0,01 \\ -0,15 & 0,8 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^4 \begin{vmatrix} -0,08 & -0,01 \\ 0,63 & -0,21 \end{vmatrix}$$

$$= 0,73\ (0,504 - 0,0315) - 1(\ -0,12\ (\ -0,064 - 0,0015)) + 1\ (\ -0,12\ (\ 0,0168\ + 0,0168\ + 0,0063\ )$$

$$= 0,344925 - 0,00786 - 0,002772$$

$$= 0,334293$$

$$(\ I - A\ )^{-1} = \frac{\text{adj.}\,(I - A)}{|I - A|}$$

$$\begin{pmatrix} 0,73 & -0,08 & -0,01 \\ -0,12 & 0,63 & -0,21 \\ -0,12 & -0,15 & 0,8 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\text{Kofaktor}\,(I - A)}{|I - A|} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0,63 & -0,21 \\ -0,15 & 0,8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -0,12 & -0,21 \\ -0,12 & 0,8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -0,12 & 0,63 \\ -0,12 & -0,15 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -0,08 & -0,01 \\ -0,15 & 0,8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0,73 & -0,01 \\ -0,12 & 0,8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0,73 & -0,08 \\ -0,12 & -0,15 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -0,08 & -0,01 \\ 0,63 & -0,21 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0,73 & -0,01 \\ -0,12 & -0,21 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0,73 & -0,08 \\ -0,12 & 0,63 \end{vmatrix} \end{pmatrix} : 0,344293$$

$$\frac{\text{Kofaktor}\,(I-A)}{|I-A|} = \begin{pmatrix} 0{,}4725 & 0{,}1212 & 0{,}0936 \\ 0{,}0655 & 0{,}5828 & 0{,}1191 \\ 0{,}0231 & 0{,}1545 & 0{,}4503 \end{pmatrix} : 0{,}334293$$

$$\frac{\text{adj.}\,(I-A)}{|I-A|} = \begin{pmatrix} 0{,}4725 & 0{,}0655 & 0{,}0231 \\ 0{,}1212 & 0{,}5828 & 0{,}1545 \\ 0{,}0936 & 0{,}1191 & 0{,}4503 \end{pmatrix} : 0{,}334293$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}4134 & 0{,}1959 & 0{,}0691 \\ 0{,}3626 & 1{,}7434 & 0{,}4622 \\ 0{,}28 & 0{,}3563 & 1{,}347 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1{,}4134 & 0{,}1959 & 0{,}0691 \\ 0{,}3626 & 1{,}7434 & 0{,}4622 \\ 0{,}28 & 0{,}3563 & 1{,}347 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 210 \\ 45 \end{pmatrix}$$

X1 = 52,8204
X2 = 380,287
X3 = 139,2313

Jadi, keluaran total masing-masing sektor akan menjadi:
Pertanian = 52,8204 ≈ 53
Industri = 380,287 ≈ 380
Jasa = 139,2313 ≈ 139

c. Sedangkan nilai tambah sektornya:
Pertanian = 0,49 x 53 = 25,97
Industri = 0,4 x 380 = 152
Jasa = 0,57 x 139 = 79,23

Matriks Transaksi yang Baru

	Pertanian	Industri	Jasa	Permintaan akhir	Keluaran total
Pertanian	14,31	30,4	1,39	25	53
Industri	6,36	140,6	30,58	201	380
Jasa	6,36	57	27,8	45	139
Nilai tambah	25,97	152	79,23		572
Keluaran total	53	380	139	572	

Contoh 3,

Bila diketahui koefisien teknologi A = $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$

dan permintaan akhir U = $\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Tentukan permintaan total untuk industri 1, 2, dan 3.

Jawab:

$$(I-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7 & -0,5 & -0,1 \\ -0,4 & 0,8 & -0,3 \\ -0,1 & -0,6 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$| I-A | = 0,079$

$$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 8,86 & 4,94 & 4,56 \\ 6,46 & 7,85 & 5,95 \\ 2,91 & 3,16 & 4,56 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 8,86 & 4,94 & 4,56 \\ 6,46 & 7,85 & 5,95 \\ 2,91 & 3,16 & 4,56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 406,4 \\ 391,3 \\ 210,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

19.5 SOAL LATIHAN

Soal 1

Bila diketahui koefisien teknologi $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,12 & 0,02 \\ 0,15 & 0,28 & 0,26 \\ 0,1 & 0,17 & 0,23 \end{pmatrix}$

dan permintaan akhir $U = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$

Pertanyaan:

a. Tentukan permintaan total untuk industri 1, 2, dan 3
b. Tentukan pula nilai tambah untuk masing-masing industrinya
c. Buat matriks transaksi yang baru.

Soal 2

Diketahui matriks transaksi dua sektor (pertanian dan jasa) pada suatu negara yang masih tradisional seperti di bawah ini:

Sektor	Pertanian	Jasa
Pertanian	40	30
Jasa	20	15
Nilai tambah	20	15

Pertanyaan:

a. Hitunglah matriks koefisien teknologinya
b. Jika permintaan akhir terhadap sektor pertanian dan sektor jasa diharapkan masing-masing berubah jadi 10 dan 20 berapa keluaran total yang baru bagi masing-masing sektor tersebut
c. Hitunglah nilai tambah yang baru bagi masing-masing sektor dan buat matriks transaksi yang baru.

Soal 3

Andaikan hubungan masukan-keluaran antar sektor dalam suatu perekonomian ditunjukkan oleh tabel di bawah ini:

	Pertanian	**Industri**	**jasa**	**Permintaan akhir**
Pertanian	80	100	100	40
Industri	80	200	60	60
Jasa	80	100	100	20

Pertanyaan:

a. Tentukan masing-masing koefisien teknologinya
b. Berapa keluaran total masing-masing sektor bila permintaan akhir diharapkan sama untuk masing-masing sektor sebesar 60
c. Buatlah matriks transaksi yang baru
d. Apabila permintaan akhir berubah menjadi 120 (pertanian), 40 (industri), dan 10 (jasa).

Soal 4

Suatu perekonomian yang terdiri dari tiga sektor (pertanian, industri, dan jasa). Dari seluruh keluaran sektor pertanian senilai 300, senilai 150 digunakan oleh sektor itu sendiri sebagai masukan (input), senilai 50 digunakan oleh sektor industri sebagai masukan sektor tersebut, dan sebesar 25 digunakan sebagai masukan sektor jasa, dan sisanya dipakai oleh konsumen akhir sebagai barang konsumsi. Untuk sektor industri menghasilkan sebesar 200, dimana digunakan sektor pertanian sebesar 75, sektor jasa, sebesar 25, dan sektor industri itu sendiri sebesar 50, sementara sisanya digunakan untuk konsumsi akhir. Sedangkan untuk sektor jasa dihasilkan sebesar 100, hasil tersebut digunakan untuk sektor itu sendiri sebesar 25, sektor pertanian dan industri masing-masing sebesar 20, dan sisanya digunakan untuk konsumsi.

Pertanyaan:

a. Buat matriks transaksi dari soal di atas
b. Tentukan koefisien teknologinya
c. Buat matriks transaksi yang baru apabila konsumsi berubah menjadi 50 untuk masing-masing sektor.

Soal 5

Diketahui data perekonomian suatu negara di bawah ini yang dinyatakan dalam matriks transaksi sebagai berikut:

	Pertanian	Industri	jasa	Permintaan akhir	Keluaran total
Pertanian	30	?	20	?	?
Industri	20	?	?	60	200
Jasa	?	50	20	?	?
Nilai tambah	?	?	?		
Keluaran total	100	?	100	90	

Persentase nilai tambah untuk masing-masing sektor adalah 40%, 20%, dan 10%.
Pertanyaan:

a. Lengkapi matriks transaksi di atas
b. Buat matriks koefisien teknologinya
c. Apabila permintaan akhir meningkat 100% untuk masing-masing sektor, buat matriks transaksi yang baru.

Bab 20

PROGRAMASI LINEAR (LINEAR PROGRAMMING)

Tujuan Instruksional Khusus (TIK):

Setelah pokok pembahasan ini selesai diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami ide dasar programsi linear;
2. Mengetahui bentuk umum model programsi linear;
3. Memahami metoda grafik dalam programsi linear.

20.1 IDE DASAR PROGRAMASI LINEAR

Programasi linear ialah suatu model optimisasi persamaan linear berkenaan dengan kendala-kendala linear yang dihadapinya. Masalah programasi linear berarti adalah masalah pencarian nilai-nilai optimum (maksimum atau minimum) sebuah fungsi linear pada suatu sistem atau sehimpun kendala linear. Fungsi linear yang hendak dicari nilai optimumnya, berbentuk sebuah persamaan, disebut fungsi tujuan. Sedangkan fungsi-fungsi linear yang harus terpenuhi dalam optimisasi fungsi tujuan tadi, dapat berbentuk persamaan maupun pertidaksamaan, disebut fungsi kendala.

Suatu masalah optimisasi dapat diselesaikan dengan programasi linear, ada beberapa syarat atau karakteristik yang harus dipenuhi, yaitu:

1. Masalah tersebut harus dapat diubah menjadi permasalahan matematis. Ini berarti bahwa masalah tadi harus bisa dituangkan ke dalam bentuk model matematik, dalam hal ini model linear, baik merupakan persamaan maupun pertidaksamaan.
2. Keseluruhan sistem permasalahan harus dapat dipilah-pilah menjadi satuan-satuan aktivitas;
   misal : $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq k_1$, di mana X_1 dan X_2 adalah aktivitas.
3. Masing-masing aktivitas harus dapat ditentukan dengan tepat baik jenis maupun letaknya dalam model programasi.

4. Setiap aktivitas harus dapat dikuantifikasikan sehingga masing-masing nilainya dapat dihitung dan dibandingkan.

Dengan demikian di dalam suatu masalah programasi linear harus terdapat rangkaian "kendala-aktivitas-tujuan" atau "masukan-aktivitas-keluaran".

Perumusan model programasi linear dapat dilakukan melalui langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan aktivitas
2. Menentukan sumber-sumber (masukan)
3. Menghitung jumlah masukan dan keluaran untuk setiap satuan aktivitas
4. Menentukan kendala-kendala aktivitas
5. Merumuskan model, yakni membentuk fungsi tujuan dan fungsi-fungsi kendalanya.

20.2 BENTUK UMUM MODEL PROGRAMASI LINEAR

Sebagaimana telah dinyatakan sebelumnya, masalah programasi linear tak lain adalah masalah optimisasi bersyarat, yakni pencarian nilai maksimum (maksimisasi) atau pencarian nilai minimum (minimisasi) sesuatu fungsi tujuan berkenaan dengan keterbatasan-keterbatasan atau kendala yang harus dipenuhi. Masalah-masalah tersebut secara umum dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Masalah maksimisasi

Maksimumkan fungsi tujuan

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

terhadap kendala-kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m$$

di mana:

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1, 2, ... , n$$

Ringkasnya, maksimumkan $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{n} CjXj$

terhadap $\sum_{j=1}^{n} aijxj \le b$

$$x_j \ge 0 \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

2. Masalah minimisasi

Minimumkan fungsi tujuan

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

terhadap kendala-kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m$$

di mana : $x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, ..., n$

Ringkasnya, minimumkan $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{n} Cj Xj$

terhadap $\sum_{j=1}^{n} aijxj \geq bj$

$x_j \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., m.$

Masalah optimisasi dijumpai misalnya dalam kasus penentuan kombinasi jumlah produk (*product-mix*) guna memperoleh laba maksimum. Sedangkan masalah minimisasi ditemui misalnya dalam kasus upaya menekan biaya produksi. Variabel x_j, yang mencerminkan aktivitas, dalam programasi linear disebut juga variabel keputusan (*decision variable*). Variabel keputusan tidak boleh negatif, karenanya di dalam setiap rumusan model programasi linear (harus) selalu dicantumkan notasi $xj \geq 0$. Hal ini dikenal dengan sebutan "pembatas ketidaknegatifan" (*non-negativity restriction*).

Penyelesaian masalah programasi linear dapat dikerjakan dengan tiga macam cara atau metoda, yaitu metoda grafik (geometri), metoda aljabar dan metoda simplex.

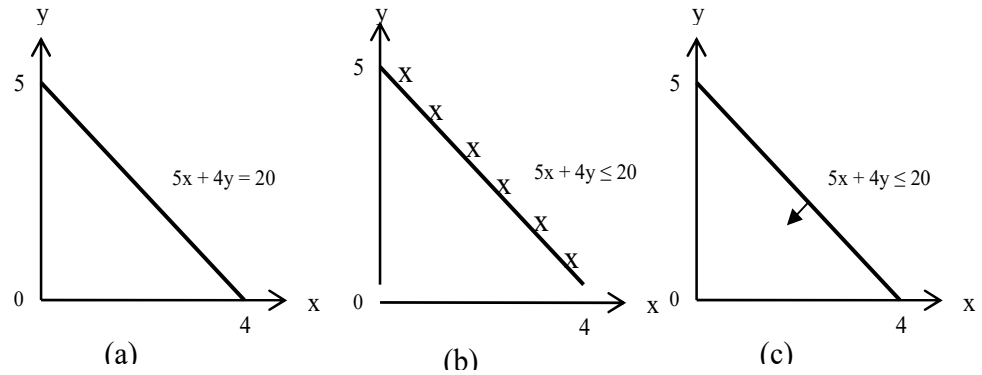
20.3 METODE GRAFIK

Penyelesaian dengan metoda grafik atau geometri dilakukan dengan jalan menggambarkan fungsi-fungsinya (fungsi kendala maupun fungsi tujuan) pada sistem sepasang sumbu-silang, di mana sumber-sumber horisontal dan vertikal masing-masing mencermikan jumlah setiap keluaran.

Langkah-langkah penyelesaian dengan metoda grafik, setelah model permasalahannya dirumuskan, adalah sebagai berikut:

1. Gambarkan fungsi-fungsi kendalanya.
2. Tentukan area laik (*feasible area*) bagi masalah yang bersangkutan, yakni area yang dibatasi oleh garis-garis kendala.
3. Gambarkan fungsi tujuannya dengan menetapkan sembarang nilai z.
4. Lakukan pergeseran-pergeseran seperlunya atas kurva atau garis tujuan, dengan mengubah-ubah nilai z, agar dapat ditentukan titik penyelesaian optimal.
5. Titik penyelesaian optimal adalah titik sudut terjauh dari area laik yang dapat dicapai oleh garis tujuan. Dalam masalah maksimisasi, sudut area laik terjauh biasanya berupa sudut teratas atau terkanan; sedangkan dalam masalah minimisasi, sudut area laik terjauh biasanya berupa sudut terbawah atau terkiri (tergantung pada lereng garis tujuannya).

Sebelum memulai dengan contoh-contoh, ada baiknya terlebih dahulu diketahui cara menyajikan pertidaksamaan linear secara grafik. Perhatikan ketiga gambar berikut ini dan kalimat-kalimat fungsinya.



Gambar (a) memperlihatkan gambar dari sebuah persamaan. Wilayah persamaan 5x + 4y = 20 adalah titik-titik sepanjang garis yang bersangkutan. Sedangkan gambar (b) dan (c) memperlihatkan sebuah pertidaksamaan. Tanda-tanda silang pada gambar (b) mengisyaratkan bahwa bidang di sebelah atas/kanan garis tidak termasuk wilayah pertidaksamaan 5x + 4y ≤ 20, jadi wilayahnya adalah mulai dari garis yang bersangkutan ke bawah /kiri. Atau dengan cara yang ditunjukkan oleh gambar (c); anak panah menjelaskan wilayah yang termasuk di dalam pertidaksamaan 5x + 4y ≤ 20.

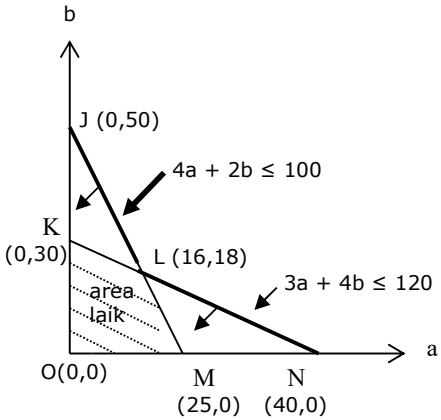
Contoh 1,

Maksimumkan fungsi tujuan z = 5000a + 6000b

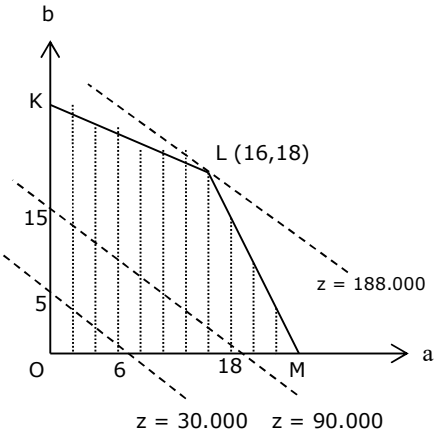
Terhadap kendala-kendala 4a + 2b ≤ 100

3a + 4b ≤ 120

a, b ≥ 0



(a)



(b)

Area penyelesaian yang laik (*feasible area*) bagi masalah yang dihadapi oleh perusahaan adalah bidang OKLM yang diarsir. Menghasilkan kombinasi jumlah A dan B di atas/kanan bidang OKLM merupakan hal yang tidak mungkin dilakukannya, mengingat keterbatasan sumber daya atau masukan (dalam hal ini bahan mentah) yang dimiliki. Area di luar bidang OKLM disebut area taklaik (*unfeasible area*).

Pada gambar (b) yang gambarnya diperbesar, fungsi tujuan z = 5000a + 6000b digambarkan dengan mencobakan nilai-nilai z tertentu. Di sini terlihat bahwa sudut area laik terjauh yang dapat dicapai oleh garis fungsi tujuan adalah titik L. Titik L ini, yang merupakan perpotongan antara kedua garis kendala, terletak pada kedudukan a = 16 dan b = 18. Berarti penyelesaian optimalnya adalah memproduksi barang A sebanyak 16 unit dan barang B sebanyak 18 unit. Penerimaan maksimum yang diperoleh dengan kombinasi ini adalah z = 5000 (16) + 6000 (18) = 188.000.

Bila perlu, hasil penyelesaian ini dapat diuji kebenarannya. Pengujian dilakukan terhadap kendala-kendala yang ada, guna membuktikan kelaikan dan terhadap semua kemungkinan penyelesaian yakni sudut-sudut area laik (*feasible corners*) guna membuktikan optimalitas.

Pengujian terhadap kendala :

$4a + 2b \leq 100 \longrightarrow 4(16) + 2(18) \leq 100$ (terpenuhi)
$3a + 4b \leq 120 \longrightarrow 3(16) + 4(18) \leq 120$ (terpenuhi)

Karena ruas kiri fungsi kendala mencerminkan jumlah masukan yang terpakai dan ruas kanan menunjukkan jumlah masukan yang tersedia, maka dengan membandingkan kedua ruas dapat diketahui jumlah masukan yang tersisa atau tidak terpakai. Dalam contoh ini, baik masukan R (lihat pengujian terhadap kendala pertama) maupun masukan S (lihat pengujian terhadap kendala kedua) semuanya terpakai habis, tidak ada tersisa. Berdasarkan pengujian terhadap kendala-kendala ini terbukti bahwa kombinasi produksi 16 A dan 18 B adalah laik.

Pengujian terhadap optimalitas :

K(0, 30) $\longrightarrow$ z = 5000(0) + 6000(30) = 180.000
L(16,18) $\longrightarrow$ z = 5000(16) + 6000(18) = 188.000
M(25, 0) $\longrightarrow$ z = 5000(25) + 6000(0) = 125.000

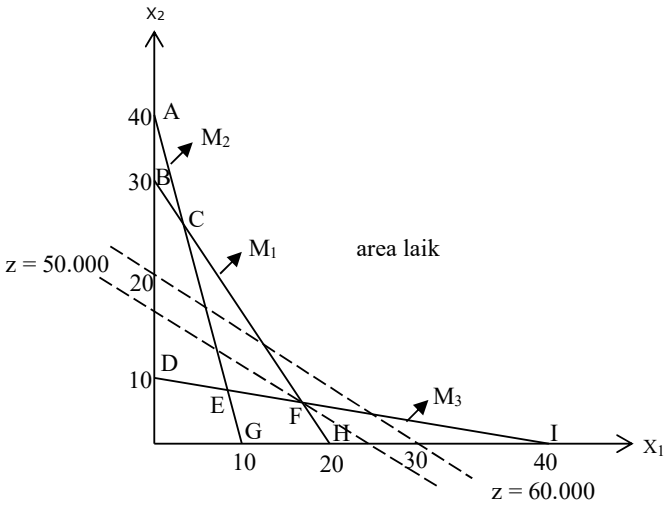
Titik *O* (0,0) tak perlu diuji karena jelas z = 0. Sedangkan titik *J* dan *N* juga tidak perlu diuji karena diluar area laik. Berdasarkan pengujian optimalitas ini terbukti bahwa titik L, kombinasi produksi 16 *A* dan 18 *B*, adalah yang terbaik.

Contoh 2,

Sebuah perusahaan memproduksi dua macam barang, X_1 dan X_2, masing-masing menggunakan tiga macam bahan yaitu M_1, M_2, dan M_3. Setiap unit X_1 memerlukan 3 unit M_1, 4 unit M_2, dan 2 unit M_3. Sedangkan tiap unit X_2 membutuhkan 2 unit M_1, 1 unit M_2, dan 8 unit M_3. Biaya total untuk membuat X_1 dan X_2 masing-masing Rp 2 ribu dan Rp 3 ribu per unit. Setiap harinya perusahaan dapat menggunakan setidak-tidaknya 60 unit M_1, 40 unit M_2, dan 80 unit M_3 untuk diproses menjadi barang-barang yang dihasilkannya. Berapa unit masing-masing barang sebaiknya dibuat agar biaya total harian optimal ?

Jawab:

Minimumkan $z = 2000\, x_1 + 3000\, x_2$
Terhadap kendala M_1 : $3\, x_1 + 2\, x_2 \geq 60$
kendala M_2 : $4\, x_1 + x_2 \geq 40$
kendala M_3 : $2\, x_1 + 8\, x_2 \geq 80$
$x_1, x_2 \geq 0$



Area laiknya adalah bidang terbuka ACFI. Sudut terjauh yang dapat ditarik oleh garis tujuan adalah titik F (16,6), perpotongan antara kendala M_1 dan kendala M_3.

Sehingga $X_1 = 16$ unit dan $X_2 = 6$ unit

Biaya total minimum per hari, dengan memproduksi 16 X_1, dan 6 X_2, adalah Rp 50 ribu (sebagai perbandingan : pada A, z = 120 ribu; pada C, z = 80 ribu; sedangkan di titik I, z = 80 ribu).

Contoh 3,

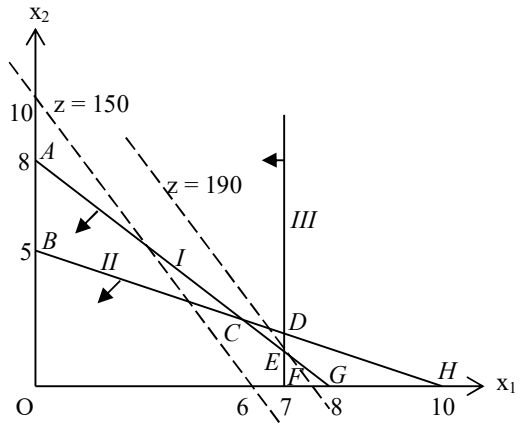
PT "Double-X" memproduksi dua macam barang, X_1 dan X_2, masing-masing mendatangkan profit 25 ribu dan 15 rupiah per unit. Produk X_1 dibuat dari campuran masukan-masukan K, L, M. Sedangkan X_2 hanya dibuat dari campuran K dan L. Tiap unit X_1 terdiri atas 3 K, 2 L, dan 3 M, sementara tiap unit X_2 hanya terdiri atas 3 unit K dan 4 unit L. Jumlah masukan yang tersedia untuk diolah masing-masing tidak melebihi 24 unit K, 20 unit L dan 21 unit M per menit. Berapa unit masing-masing barang harus dihasilkan per menit agar profit optimal ?

Jawab:

Maksimumkan $z = 25\ x_1 + 15\ x_2$

Terhadap	(I)	: $3\ x_1 + 3\ x_2 \leq 24$	(masukan K)
	(II)	: $2\ x_1 + 4\ x_2 \leq 20$	(masukan L)
	(III)	: $3\ x_1 \leq 21$	(masukan M)

$x_1, x_2 \geq 0$



Area laiknya adalah bidang OBCEF. Penyelesaiaan optimal pada titik E (7,1) dengan z = 190.

Jadi, dengan memproduksi $7X_1$ dan $1X_2$ per menit diperoleh laba maksimum 190 rupiah. x_2

Jumlah masukan yang terpakai :

K $= 3x_1 + 3x_2 = 3(7) + 3(1) = 24$
L $= 2x_1 + 4x_2 = 2(7) + 4(1) = 18$
M $= 3x_1 = 3(7) = 21$

Semua masukan K dan L yang tersedia habis terpakai, sedangkan untuk masukan L terdapat sisa yang tidak terpakai sebanyak 20 – 18 = 2 unit.

Catatan tentang metoda grafik

1. Metoda grafik terbatas pemakaiannya hanya untuk masalah dengan **dua variabel keputusan.**
2. Metoda ini dapat pula diselesaikan tanpa menggambarkan garis dari fungsi tujuannya, yakni dengan cara langsung menguji optimalitas dari titik-titik sudut yang terdapat pada area laik. (dalam contoh 3 (PT"Double-X") ini berarti menguji optimalitas titik-titik B, C, E, dan F).
3. Dalam hal lereng fungsi tujuan sama dengan lereng salah satu kendala yang membentuk area laik, maka akan terdapat lebih dua titik optimum.
4. Kendala yang melalui titik penyelesaian optimal disebut kendala mengikat (binding constraint), sedangkan yang tidak malalui titik optimum disebut kendala tidak mengikat (non-binding constraint). Dalam contoh PT"Double-X"di atas, kendala I dan III merupakan kendala-kendala yang mengikat

karena melalui titik optimum E, sedangkan kendala II merupakan kendala yang tidak mengikat.

20.4 SOAL LATIHAN

Soal 1
Sebuah perusahaan ingin memproduksi dua macam produk, yaitu komputer dan radio. Berdasarkan pengalaman pada masing-masing departemen bahwa untuk menghasilkan produk komputer departemen I membutuhkan 2 jam tenaga kerja, di departemen II membutuhkan 2 jam tenaga kerja, dan di departemen III memerlukan 1 jam tenaga kerja. Sedangkan untuk menghasilkan produk radio departemen I membutuhkan 3 jam tenaga kerja, departemen II membutuhkan 1 jam tenaga kerja, dan depertemen III membutuhkan 4 jam tenaga kerja. Sumber daya perusahaan yang tersedia untuk menghasilkan kedua jenis produk tersebut di masing-masing departemen berturut-turut adalah maksimum 24 jam tenaga kerja untuk departemen I, 16 jam tenaga kerja untuk departemen II, dan 27 jam tenaga kerja untuk departemen I. Keuntungan setiap unit untuk komputer dan radio masing-masing adalah Rp 8000,- dan Rp 7000,-berpakah kombinasi optimal dari produk tersebut agar profit maksimal!

Soal 2
Sebuah perusahaan membuat dua macam sepatu, yaitu sepatu kulit dan sepatu karet. Untuk membuat sepatu kulit digunakan mesin A selama 2 jam, mesin B selama 1 jam, dan mesin C selama 1 jam tetapi tidak diproses di mesin D. Untuk membuat sepatu karet membutuhkan waktu selama 1 jam di mesin A, 2 jam di mesin B, 1 jam di mesin C, dan 2 jam di mesin D. Keuntungan setiap membuat sepatu kulit sebesar Rp. 4.000,- dan sepatu karet Rp. 6.000,- Dengan menggunakan metode grafik, hitunglah banyaknya sepatu kulit dan sepatu karet yang harus dibuat agar diperoleh keuntungan maksimum!

Soal 3
Perusahaan pembuat barang-barang *furniture* PT Jaya mendapat pesanan dari sebuah toko furniture untuk membuat meja dan kursi yang harus diselesaikan. Dari perhitungan PT Jaya akan mendapat profit dari meja sebesar RP. 80.000,- dan dari kursi sebesar Rp. 60.000,- untuk setiap unitnya. Guna memenuhi pesanan tersebut sesuai dengan jangka waktu yang ditetapkan, maka PT Jaya hanya mempunyai waktu selama 60 jam untuk pekerjaan perakitan dan 48 jam untuk pekerjaan penghalusan. Untuk membuat setiap unit meja dibutuhkan 4 jam

perakitan dan 2 jam penghalusan, sedangkan untuk membuat 1 unit dibutuhkan 2 jam perakitan dan 4 jam penghalusan. Agar perusahaan memperoluh laba maksimum, berapa unit kursi dan meja yang harus diproduksi!

Soal 4

Sebuah perusahaan memproduksi dua macam produk. Setiap produk harus melewati dua bagian perakitan, A dan B. Setiap unit produk I memerlukan 4 jam di A dan 4 jam di B. Produk II membutuhkan 3 jam di A dan 1 jam di B. Sumber daya yang tersedia di bagian perakitan A adalah 110 jam, sementara di bagian perakitan B adalah 90 jam. Laba bersih untuk setiap unit I dan II masing-masing adalah Rp 10.000,- dan Rp 6.000,- Berapa kombinasi optimal produk I dan II yang harus dibuat agar laba maksimum.

Soal 5

Perusahaan pabrikasi Wijaya Kusuma menghasilkan pintu kaca dan jendela kaca. Setiap pintu kaca memerlukan 6 jam pekerja di departemen 1 dan 2 jam pekerja di departemen 2. sementara itu untuk membuat setiap jendela kaca membutuhkan 4 jam pekerjaan di departemen 1 dan 3 jam pekerjaan di departemen 2. Profit untuk setiap pintu kaca dan jendela kaca masing-masing adalah Rp. 25.000,- dan Rp 20.000,- Terdapat 60 jam pekerja di departemen 1 dan 30 jam pekerja di departemen 2. berapa kombinasi optimal dari jendela kaca dan pintu kaca agar laba maksimal!

Soal 6

Sebuah pabrik membuat dua jenis radio, model 1 dan 2. Proses pembuatan model 1 memerlukan 2 jam di departemen X, 2 jam di departemen Y dan 1 jam di departemen Z. Sedangkan model 2 membutuhkan 1,5 jam di departemen X, 0,5 jam di departemen Y, dan 2 jam di departemen Z. Profit masing-masing unit untuk model 1 dan 2 adalah Rp 45.000,- dan Rp 20.000,- Terdapat 60 jam di departemen X, 40 jam di departemen Y, dan 60 jam di departemen Z. Tentukan berapa unit model 1 dan 2 yang harus dibuat agar laba maksimal!

Soal 7

Nona Venny sedang mempersiapkan sarapan yang akan dikonsumsinya. Sarapan yang dibutuhkan paling sedikit 7 unit vitamin A dan paling sedikit 11 vitamin B. Kebutuhan ini dapat dipenuhi dari dua jenis makanan. Setiap unit makanan I mengandung 1 unit vitamin A dan 2 unit vitamin B dengan biaya Rp 8.000,- sementara itu setiap unit makanan II mengandung 2 unit vitamin A

dan 1 unit vitamin B dengan biaya Rp 12.000,- Tentukan kombinasi terbaik dari kedua jenis makanan tersebut agar biaya minimum!

Soal 8

Nona Heni memerlukan paling sedikit 750 gram protein dan 975 karbonhidrat. Kebutuhan ini dapat dipenuhi dengan mengkonsumsi dua jenis makanan. Setiap unit makanan I mengandung 12 gram protein dan 15 gram karbonhidrat dengan biaya Rp 3.500,- sedangkan untuk makanan II mengandung 9 gram protein dan 12 gram karbonhidrat dengan biaya Rp 4.000,- Berapa gram dari setiap makanan yang akan dibeli untuk memenuhi kebutuhan harian dengan biaya minimum!

Soal 9

Nona Martha harus melengkapi dietnya dengan paling sedikit 80 mg kalsium dan 17 mg zat besi. Kebutuhan ini dapat dipenuhi dari dua jenis tablet vitamin, yaitu B dan C. Setiap tablet vitamin B mengandung 5 mg kalsium dan 1 mg zat besi, sementara itu setiap tablet vitamin C mengandung 8 mg kalsium dan 2 mg zat besi. Biaya untuk vitamin B adalah Rp 6.000,- dan vitamin C adalah Rp. 8.000,- berapa banyak tablet dari setiap jenisnya yang harus Martha beli untuk memenuhi kebutuhan hariannya dengan biaya minimum!

Soal 10

Terdapat dua jenis makanan yang tersedia untuk sarapan pagi. Setiap ons makanan jenis I mengandung 1 unit vitamin A dan 2 unit vitamin B dengan biaya Rp 1.000,- sementara itu setiap ons jenis makanan II mengandung 4 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B dengan biaya Rp 2.000,- Berapa ons dari masing-masing jenis makanan yang harus dibeli untuk memenuhi kebutuhan minimum harian dari 10 unit vitamin A dan 15 unit vitamin B agar biaya minimum!

DAFTAR PUSTAKA

Bachouse, R. E., (2002). *The penguin history of economics.* England: Penguin Books.

Beaud, Michael, and G. Dostaler., (1997). *Economic thought since Keynes: A history and dictionary of major economists.* London: Routledge.

Black, J., N. Hashimzade and G. Myles., (2012). *Dictionary of economics.* Oxford: Oxford University Press.

Brigham, F. E. and Houston, F. J., (2004). *Fundamentals of financial management.* Singapore: Cengage Learning.

Chiang, A.C., Kevin, W., Frensidy, B., Ekananda, M., Falianty, T.A., (2010). *Fundamental Methods of Mathematics for Business and Economics.* Salemba.

Chiang, A.C., and Kevin, W., (2005). *Fundamental methods of mathematical economics (4th ed.).* McGraw-Hill.

Dowling, E. T. (2012). *Schaum's Outline of Introduction to Mathematical Economics (3rd ed.*). McGraw-Hill.

Dumairy, 1998. *Matematika terapan untuk bisnis dan ekonomi*. FEUB UGM.

Haeussler, E.F., Paul, R.S., Wood, R.J., (2010). *Pengantar Matematika Ekonomi untuk Analisis Bisnis dan Ilmu-Ilmu Sosial (Edisi Ketigabelas).* PT. Gelora Aksara Pratama.

Jacques, I. (2023). *Mathematics for Economics and Business (10th ed).* Pearson Education Limited.

Kalangi, J.B., (2011). *Matematika ekonomi dan bisnis.* Jakarta: Salemba Empat.

Nachrowi, D.N., dan H. Usman., (2006). *Pendekatan popular dan praktis ekonometrika untuk analisis ekonomi dan keuangan*. Jakarta: LP FEUI.

Purcell, E. J., Varberg, D., and Rigdon, S. E., (2003). *Calculus* (8^{th} ed.). Singapore: Prentice Hall, Inc.

Weber, J. E., (1982). *Mathematical analysis: Business and economic application*. Arizona: Harper & Row.

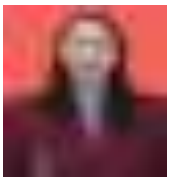
TENTANG PENULIS

Andi Wijaya, S.E., M.M., adalah dosen tetap Fakultas Ekonomi dan Bisnis Universitas Tarumanagara, sejak tahun 1999. Penulis merupakan lulusan Program Studi S1 Manajemen dari Universitas Tarumanagara dan meraih gelar Magister Manajemen (S2) juga dari Universitas Tarumanagara. Penulis mengampu mata kuliah Kewirausahaan, Matematika Ekonomi dan Manajemen Operasional. Selain aktivitas pengajaran, penulis aktif dalam berbagai penelitian dan memiliki sejumlah publikasi ilmiah pada bidangnya.

Dra. Nur Hidayah, M.M. adalah dosen tetap Matematika Ekonomi di Fakultas Ekonomi dan Bisnis Universitas Tarumanagara sejak tahun 1992. Penulis menyelesaikan pendidikan S1 Jurusan ilmu Ekonomi dan Studi Pembangunan di Fakultas Ekonomi Universitas Sebelas Maret, Surakarta pada tahun 1991 dan melanjutkan S2 pada program Magister Manajemen IPWI di Jakarta pada tahun 1997. Selain mengajar Matematika Ekonomi, juga mengajar Pengantar Ilmu Ekonomi dan Ekonomi manajerial serta melakukan kegiatan penelitian dan publikasi ilmiah.

Dr. Lydiawati Soelaiman, S.T., M.M. adalah lulusan Program Studi Teknik Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Tarumanagara yang menyelesaikan gelar sarjana pada tahun 2001. Beliau kemudian menyelesaikan pendidikan di jenjang Magister Manajemen di Universitas Tarumanagara pada tahun 2004. Pada tahun 2024, beliau menyelesaikan gelar Doktoral di bidang Ilmu Manajemen di universitas yang sama. Saat ini beliau merupakan dosen tetap Program Studi Sarjana Manajemen, Fakultas Ekonomi dan Bisnis Universitas Tarumanagara-

Jakarta. Beliau mengampu beberapa mata kuliah di antaranya Kewirausahaan, Matematika Ekonomi dan Manajemen Operasional. Selain mengajar, beliau juga aktif melakukan penelitian dan publikasi ilmiah terkait bidang manajemen.



Joyce A. Turangan, S.E., M.Pd., adalah dosen tetap Fakultas Ekonomi dan Bisnis Universitas Tarumanagara, sejak tahun 2001. Beliau merupakan lulusan Program Studi S1 Manajemen dari Universitas Tarumanagara dan meraih gelar Magister Pendidikan (S2) dari Universitas Pelita Harapan. Mengajar dengan fokus pada konsentrasi Manajemen Keuangan dan Manajemen Sumber Daya Manusia, termasuk mata kuliah Matematika Ekonomi. Selain aktivitas pengajaran, beliau aktif dalam berbagai penelitian dan memiliki sejumlah publikasi ilmiah di bidangnya.